Die Vollständigkeit der Intensionalen Logik*

Thomas Ede Zimmermann

16. September 2015

1 Intuitive Vorüberlegungen zum Begriff der Intensionalität

Wenn man sich daran machen will, die Vollständigkeit von *IL* zu beweisen, so stößt man zunächst auf zwei wesentliche Hindernisse, die die Intensionale Logik von der Prädikatenlogik erster Stufe unterscheiden:

(1) *IL* ist eine Sprache höherer Stufe;

(2) *IL* ist nicht extensional.

Wäre (2) nicht der Fall, hätten wir begründete Hoffnung, bei einem Vollständigkeitsbeweis nach einer ähnlichen Strategie zu verfahren, wie man es üblicherweise bei Sprachen höherer Stufe tut. (1) ist offenbar der Fall, da für jeden Typ (τ, t) eine Variable dieser Kategorie intuitiv eine Menge bezeichnet[1] und τ beliebig hoch geschaukelt werden kann. So steht zum Beispiel der Typ $((e, t), t)$ für Mengen von Mengen von Individuen, und da es auch Variablen dieses Typs gibt, kann man beliebig über solche Entitäten quantifizieren, womit wir schon mal die gesamte zweistufige Prädikatenlogik in der Tasche haben. An "echte" Vollständigkeit ist also überhaupt nicht zu denken. Wie steht es aber mit einer *verallgemeinerten* Vollständigkeit? Dazu müssen wir uns das Hindernis (2) wohl einmal vornehmen.

Das Dumme an (2) ist, dass nicht genau klar ist, was "extensional" in diesem Zusammenhang eigentlich genau heißen soll. Was ist eigentlich das Intensionale an der Intensionalen Logik? Eine – immer noch vage, aber immerhin weiterführende – Antwort ist die folgende: Das Intensionale an *IL* ist das, was verhindert, dass gewisse, in der klassischen Logik wahre Formeln in *IL* gültig sind. Beispielsweise:

*Durchgesehene und korrigierte Abschrift eines Skripts aus dem WS 1980/81 (Uni Konstanz), im SoSe 2015 geTeXt von Johannes Wolf (Goethe-Uni). Der Text basiert im wesentlichen auf Gallin [IHM], 17-37.

[1] Genau genommen bezeichnet sie die charakteristische Funktion einer Menge, aber das macht ja keinen Unterschied.

(3) $\forall x^e[\exists y^e[x^e \equiv y^e]] \rightarrow \exists y^e[\mathbf{c}^e \equiv y^e]$

oder

(4) $[\mathbf{c}^e \equiv \mathbf{d}^e] \rightarrow [\mathbf{c}^e \equiv \mathbf{c}^e \rightarrow \mathbf{c}^e \equiv \mathbf{d}^e]$

Die Nicht-Gültigkeit solcher Formeln hängt also offenbar von der Deutung der Konstanten und der Deutung von "$\hat{\ }$" ab: Das Symbol "$\equiv$" wird ja definitorisch letztlich auf "$\hat{\ }$" zurückgeführt und insofern ist der Intensor wohl für die Widerlegbarkeit von (4) mitverantwortlich. Die Intensionalität könnte sich also in der Festlegung zur Deutung von Konstanten und Ausdrücken der Form $\hat{\ }\alpha$ versteckt haben. Sehen wir uns diese Klauseln also noch einmal genauer an: Eine Konstante bezeichnet an einem Referenzpunkt (oder in einer möglichen Welt) eine Entität des ihrer Kategorie entsprechenden Typs. Die Deutung ist also eine Funktion f von einer Menge I von möglichen Welten in irgendeine andere, uns in diesem Zusammenhang nicht weiter interessierende Menge D_τ *in Abhängigkeit von* dieser Funktion. Sonst wäre es ja auch nicht möglich, Ausdrücke wie

(5) $x^\tau \equiv c^\tau$

vernünftig zu deuten, und zwar an einem Punkt $i \in I$; denn x^τ hängt als Variable bekanntlich nicht in dieser Weise von i ab. Um aber (5) auszuwerten[2], müssen wir zunächst $f(c^\tau)$ auf i anwenden, um dann die gewünschte Entität in $u \in D_\tau$ zu erhalten, von der wir dann wissen wollen, ob sie mit der von x^τ bezeichneten übereinstimmt. Wenn wir einen Ausdruck wie (5) lesen, müssen wir uns also im Geiste immer noch einen "Parameter" i dazudenken, als Argument für c^τ's Deutung:

(5′) $x^\tau \equiv c^\tau(i)$

(5′) ist natürlich keine Formel aus *IL*, aber eben eine Explikation der Art und Weise, wie (5) tatsächlich gedeutet wird. Genau genommen stammt (5′) aus einer Sprache, in der wir zusätzlich zu den *IL*-Symbolen auch noch Variablen für mögliche Welten haben. Andere Formeln dieser Sprachen wären z.B.:

(6) $c^\tau(i) \equiv c^\tau(j)$

(7) $i \equiv i$

(8) $c^\tau(i) \equiv d^\tau(i)$

Schauen wir uns aber einmal (6) und (7) an, so fällt auf, dass diese beiden Formeln nicht in der Weise einer *IL*-Formel entsprechen, wie das bei (5′) der Fall war. Bei (6) liegt es offenbar daran, dass wir es mit zwei verschiedenen Welten-Variablen i und j zu tun haben, was aber in *IL* nicht möglich ist, da die Weltenvariablen ja nur den "Ausgangspunkt" andeuten sollen, von dem es eben jeweils nur einen gibt. In (7) kommt zwar nur eine "neue" Variable vor, aber trotzdem können wir nicht viel damit anfangen, denn sie kommt

[2] Wir vernachlässigen hier die Belegung für x^τ, da sie für diese Überlegungen keine Rolle spielt. Man kann sie sich als fest vorgegeben denken.

in einer Umgebung vor, die es in *IL* einfach nicht gibt; das heißt, sie taucht z.B. nicht als Argument einer Konstanten auf. “Alleinstehende” Welten-Variablen – intuitiv gesprochen: Variablen der Kategorie s – haben wir in *IL* eben nicht.

AUFGABE: (i) Wie steht es mit (8)?

Sprachen wie die eben skizzierte nennt man übrigens auch *zweisortig*, weil sie zusätzlich zum Typ t der Wahrheitswerte noch zwei weitere Grundtypen (e und s) benötigen, über die verschiedene Sorten von Variablen (die x und y einerseits und i und j andererseits) laufen. Solche Sprachen hat vor allem P. Tichý zur indirekten Deutung natürlicher Sprachen benutzt; Gallin hat die oben erläuterten und unten noch weiter dargestellten Zusammenhänge zwischen zweisortigen Sprachen und *IL* etwas näher und genauer untersucht.[3]

Unsere bisherige Betrachtung hat also ergeben, dass man einen Teilaspekt der Intensionalität, nämlich die Deutung der Konstanten, auf das Phänomen der Zweisortigkeit reduzieren kann. Es lässt sich m.a.W. in einer anderen Sprache wegerklären, die – wie man leicht sieht – nicht mehr “intensional” ist. Wie steht es nun mit dem anderen, bereits beobachteten Aspekt, dem Intensor? Lässt er sich auch in einer zweisortigen Sprache nachvollziehen? Diese Frage lässt sich leicht durch einen Blick auf die Definition zur Deutung von *IL*-Ausdrücken der Form $[\,\hat{}\alpha]$; unter Vernachlässigung der Variablenbelegung können wir sie etwa so formulieren:

(9) $\hat{}\alpha$ bezeichnet an einem Punkt diejenige Funktion f, die jedem Punkt j die Entität zuordnet, die α an j bezeichnet.

Ein kleiner Trick zeigt, was in (9) passiert: Wir müssen uns nämlich nur überlegen, dass in einem zweisortigen Ausdruck wie (5′) i als Variable auftaucht bzw. (genauer gesagt) durch eine solche bezeichnet wird. Was nun in (9) geschieht, ist einfach das Abbinden dieser Variablen durch einen Abstraktor. Ausdrücke der Form $[\,\hat{}\alpha]$ entsprechen also zweisortigen Ausdrücken der Form

(10) $[\lambda i\, \alpha]$

wobei i die einzige Variable der Kategorie s ist, die in α vorkommt, also die, die den Referenzpunkt angibt.

AUFGABEN:
(ii) Man mache plausibel, dass der Extensor eine Form der Funktionalapplikation ist.
(iii) Wie sehen die zweisortigen Entsprechungen zu (3) und (4) aus? Warum sind sie nicht gültig?
(iv) Was sind (bei einer zweisortigen Betrachtungsweise) Notwendigkeits- und Möglichkeitsoperator?

[3] vgl. Gallin [IHM], 58-63, sowie Tichý [AIA].

Die hier dargestellte “extensionale” Betrachtungsweise wird uns beim Beweis des Vollständigkeitssatzes sehr weiterhelfen. Wir werden uns oft den “verborgenen Parameter” – zweisortig gesprochen: die s-Variable – hinzudenken, um klar zu sehen, was zu tun ist. Man sollte sich allerdings davor hüten, den Schluss zu ziehen, dass die Beschäftigung mit der Intensionalen Logik deswegen überflüssig wird, weil man ja doch alles extensionalisieren kann. Natürlich hat eine entsprechende zweisortige Sprache mindestens die gleiche Ausdruckskraft wie *IL*[4]; das Anliegen Montagues und überhaupt derjenigen Logiker, die sich mit intensionalen Systemen beschäftigt haben, war es aber nicht nur, möglichst ausdrucksstarke Systeme zu erfinden, sondern gewisse in natürlichen Sprachen auftretende Phänomene (wie z.B. das des opaken Kontexts) in einer formalen Sprache nachzuvollziehen. Montague ging es dabei vor allem um eine (mengentheoretische) Rekonstruktion der Fregeschen Sprachphilosophie, ein Unterfangen, welches sich mit einer zweisortigen Sprache allein wohl kaum bewerkstelligen lässt.[5]

AUFGABE:
(v) Warum heißen die modal geschlossenen Ausdrücke wohl modal geschlossen? Man betrachte die zweisortigen Entsprechnungen!

2 Henkinisierung in *IL*: Die Grundidee der Konstruktion

Da wir nun das zweite Hindernis, nämlich die Intensionalität, insofern aus dem Weg geräumt haben, als wir uns *IL* jederzeit als eine notationelle Variante einer (zweisortigen) extensionalen Sprache vorstellen können, bleibt eigentlich nur noch das erste Problem übrig; d.h. wir müssen auf einen irgendwie gearteten verallgemeinerten Begriff von Gültigkeit kommen, der sich axiomatisieren lässt. Dann können wir darauf hoffen, mit einem üblichen Henkin-Beweis die Vollständigkeit von *IL* nachweisen zu können. Auf das Problem der Verallgemeinerung des Gültigkeitsbegriffs werden wir im nächsten Abschnitt eingehen; zunächst wollen wir einmal überlegen, wie ein solcher Henkin-Beweis im Falle von *IL* zu führen wäre, unter der Annahme, wir hätten bereits Axiomensystem und Modellbegriff. Bei einem “normalen” Henkin-Beweis müssen wir ja bekanntlich zwei Dinge zeigen:

(1) Jede (syntaktisch) widerspruchsfreie Menge lässt sich in eine maximal-widerspruchsfreie Menge einbetten, die zeugenabgeschlossen ist; d.h. eine Menge Σ^* für die gilt: falls $[\exists x\ \alpha] \in \Sigma^*$, so gibt es einen Term t mit $\alpha[x/t] \in \Sigma^*$;

[4] In einem gewissen Sinne sind solche Sprachen sogar wesentlich ausdrucksstärker!

[5] Diese Rekonstruktion befindet sich im Formelwirrwarr von Montague [UG], insbesondere im 4. Teil (227-231), der den Titel: “Semantics: Theory of Reference“ trägt.

(2) jede maximal-widerspruchsfreie, zeugenabgeschlossene Menge lässt sich erfüllen.

Teil (1) des Beweises nennen wir hier auch “Henkinisierung” (einer widerspruchsfreien Menge). Um zu sehen dass dabei noch eine kleine Schwierigkeit auftaucht, müssen wir uns ins Gedächtnis rufen, wie eine Henkinisierung üblicherweise abläuft: man geht aus von einer Aufzählung $(\alpha_i)_{i\in\omega}$ der jeweiligen Sprache und einer widerspruchsfreien Menge Σ, die induktiv zu einer Menge Σ^* erweitert wird:

(3) $\Sigma = \Sigma^0 \subseteq \Sigma^1 \subseteq \Sigma^2 \subseteq \cdots \subseteq \Sigma^n \subseteq \Sigma^{n+1} \subseteq \ldots$

(4) $\Sigma^* := \bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n$

Dabei wird in jeder Stufe n des Prozesses (3) geguckt, ob $\Sigma_n \cup \{\alpha_n\}$ widerspruchsfrei ist; insbesondere gilt, dass im Falle der Widerspruchsfreiheit von $\Sigma_n \cup \{\alpha_n\}$ geprüft werden muss, ob α_n die Form $\exists x\beta$ hat: wenn ja, nehmen wir es hinzu und suchen uns einen geeignetene Term t (z.B. eine neue Konstante), der als “Zeuge” der Existenzaussage fungiert und nehmen $\beta[x/t]$ auch noch hinein.

Bei *IL* liegt die Sache allerdings noch ein bisschen komplizierter: wie man in Aufgabe 1.(iv) hoffentlich nachgewiesen hat, haben wir außer den üblichen Existenzquantoren $\exists x_i^\tau$ auch noch den Möglichkeitsoperator, für den wir also auch noch Zeugen finden müssen. Nun sieht man aber leicht, dass dies nicht in der üblichen Art und Weise geschehen kann, denn angenommen, wir hätten eine Menge $\Sigma = \{\Diamond\alpha, \Diamond\neg\alpha\}$, die ja widerspruchsfrei sein kann, dann würden bei einer üblichen Henkinisierung zwangsläufig α und $\neg\alpha$ als Zeugen hineinkommen, wodurch Σ^* widersprüchlich würde. Auch eine zweisortige Betrachtungsweise hilft da zunächst nicht weiter, denn in *IL* gibt es ja nur eine einzige (“unsichtbare”) s-Variable, wie die Beispiele (6) und (7) des vorhergehenden Abschnitts gezeigt haben.

Einen sehr trickreichen Ausweg aus diesem Dilemma hat D. Gallin gefunden. Seine Idee war es, simultan (abzählbar) unendlich viele Henkinisierungen vorzunehmen, von denen die eine die Henkinisierung der Ausgangsmenge Σ ist. Wenn wir dann an einen Ausdruck der Form $[\Diamond\alpha]$ geraten, werden wir ihn zwar aufnehmen, seinen Zeugen α aber in eine andere Henkinisierung stecken, mit der er verträglich ist; die Konstruktion wird dabei (wie wir im 6. Abschnitt sehen werden) garantieren, dass eine solche Henkinisierung existiert. Das Ganze sieht dann also nicht mehr so aus wie in (3) und (4), sondern etwa folgendermaßen:

(5)

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Sigma & \varnothing & \varnothing & & \varnothing & \varnothing & \\
\| & \| & \| & & \| & \| & \\
\Sigma_0^0 & \Sigma_0^1 & \Sigma_0^2 & \cdots\cdot & \Sigma_0^i & \Sigma_0^{i+1} & \cdots\cdot \\
\rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \\
\Sigma_1^0 & \Sigma_1^1 & \Sigma_1^2 & \cdots\cdot & \Sigma_1^i & \Sigma_1^{i+1} & \cdots\cdot \\
\rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \\
\Sigma_2^0 & \Sigma_2^1 & \Sigma_2^2 & \cdots\cdot & \Sigma_2^i & \Sigma_2^{i+1} & \cdots\cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\Sigma_j^0 & \Sigma_j^1 & \Sigma_j^2 & \cdots\cdot & \Sigma_j^i & \Sigma_j^{i+1} & \cdots\cdot \\
\rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & \\
\Sigma_{j+1}^0 & \Sigma_{j+1}^1 & \Sigma_{j+1}^2 & \cdots\cdot & \Sigma_{j+1}^i & \Sigma_{j+1}^{i+1} & \cdots\cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

(6)

$$\begin{aligned}\Sigma^0 &:= \bigcup_{j\in\omega}\Sigma^0_j\\ \Sigma^1 &:= \bigcup_{j\in\omega}\Sigma^1_j\\ \Sigma^2 &:= \bigcup_{j\in\omega}\Sigma^2_j\end{aligned}$$

Jedes Σ^i wird dann eine (im Sinne der üblichen Existenzquantoren) zeugenabgeschlossene, maximal-widerspruchsfreie Menge sein. Die Zeilen der Matrix (5) – also der untere Index – geben dabei die Stufe der simultanen Henkinisierungen aller dieser Ausgangsmengen an, von denen alle bis auf höchstens eine (nämlich Σ^0_0) leer sind. Die Spalten stehen intuitiv für mögliche Welten, d.h. Zeugen für $\Diamond$-Formeln. Aus diesen Ansatz ergibt sich dann auch eine Konsequenz für Teil (2) des Beweises: die Menge I der möglichen Welten in dem zu konstruierenden Modell wird die Menge der oberen Indizes der Henkinisierung (5) sein – also die Menge der natürlichen Zahlen.

Bei einem solchen Vorgehen, das wir weiter unten natürlich noch zu präzisieren haben, müssen wir allerdings noch eine wesentliche Kleinigkeit beachten, die man sich am besten an einem Beispiel veranschaulicht: angenommen $\Sigma = \{\neg \Diamond \alpha\}$. Dann müssen wir sicherstellen, dass in keinem Σ^i der Ausdruck α selbst auftaucht, denn sonst wären wir wohl kaum in der Lage aus unserer Henkinisierung ein Modell aufzubauen: in einem solchen Modell müsste (am Punkt 0) einerseits wahr sein, dass es keine Welt gibt, in der α wahr ist, andererseits wäre α überall da wahr, wo es als Zeuge reingerutscht ist. Aus den bisherigen Bemerkungen zur Konstruktion (5) geht jedoch nicht hervor, wie diese Schwierigkeit umgangen werden soll: es wäre ja möglich, dass die Hinzunahme von α an einer Stufe j aus Σ^i_j keine widersprüchliche Menge macht (z.B. wenn $\Sigma^i_j = 0$).Der Grund, warum die Konstruktion dann doch noch zusammenbrechen kann, ist eben der, dass in Σ bereits etwas über alle <u>anderen</u> Henkinisierungen ausgesagt wird, nämlich dass α nicht mit ihnen verträglich sein darf. Um dieses Problem zu lösen, werden wir den Begriff der Widerspruchsfreiheit auf solche Systeme von Formelmengen ausdehnen müssen, wie sie die Stufen (d.h. Zeilen) in (5) darstellen; das wird sich jedoch als relativ problemlos erweisen. Es sollte, bevor wir uns auf die Suche nach einer geeigneten Verallgemeinerung des Gültigkeitsbegriffs machen, noch erwähnt werden, dass sich die hier skizzierte Methode der simultanen Henkinisierung auch auf andere modallogische Systeme (insbesondere S5-Logiken) übertragen lässt.

3 Verallgemeinerte semantische Begriffsbildungen für *IL*

Im Falle der Prädikatenlogik zweiter (oder höherer) Stufe gibt es bekanntlich eine sehr einfache Art und Weise, die semantischen Begriffsbildungen so zu verallgemeinern, dass der Gültigkeitsbegriff axiomatisierbar wird: man lässt als Variablenbereich nicht nur die gesamte Klasse aller zweit- (bzw. höher-)stufigen Mengen und Relationen zu, sondern auch beliebige, nicht-leere Teilmengen davon.[6] Wir werden zunächst einmal etwas Analoges für *IL* vesuchen, dann aber bald merken, dass es ganz so einfach nicht geht. Das naheliegenste Vorgehen, wäre wohl die folgende Verallgemeinerung des Begriffs der semantischen Kategorie. Um terminologische Konfusionen zu vermeiden, sprechen wir im folgenden von Ontologien:

(1) Seien D und I nicht-leere Mengen. Eine *auf* (D, I) *basierende Ontologie* ist ein System $(M_\tau)_{\tau \in Typ}$ mit:
   a. $M_e = D$;
   b. $M_t = \{0, 1\}$;
   c. $\sigma, \tau \in Typ \Rightarrow M_{(\sigma,\tau)} \subseteq {M_\tau}^{M^\sigma}$;
   d. $\tau \in Typ \Rightarrow M_{(s,\tau)} \subseteq {M_\tau}^I$;
   e. $\tau \in Typ \Rightarrow M_\tau \neq \varnothing$.

Dass (1) noch zu allgemein ist, zeigt die folgende Überlegung: angenommen, wir ließen ein Nonstandard-Modell $\mathcal{M}$ auf einer Ontologie $(M_\tau)_{\tau \in Typ}$ fußen, die die folgenden Eigenschaften hat:

(2) a. $(M_\tau)_{\tau \in Typ}$ basiert auf (D, I);
   b. $D = \omega$;
   c. $D_{(e,e)} = \{f\}$, wobei f diejenige Funktion aus D^D ist, so dass für alle $n \in D$ $(= \omega)$ gilt:

$$f(n) = \begin{cases} 7, \text{ falls } n \text{ gerade;} \\ 13, \text{ sonst.} \end{cases}$$

In einem solchen Nonstandard-Modell hätten wir Schwierigkeiten mit der Interpretation einiger *IL*-Terme. Ein einfaches Beispiel wäre der Term $[\lambda x^e g(g(x^e))]$, wobei g eine Variable vom Typ (e, e) ist.

AUFGABE:
(vi) Wo liegen die Schwierigkeiten in einem solchen Nonstandard-Modell?

Offenbar brauchen wir also eine gewisse Abgeschlossenheits-Eigenschaft bei den Ontologien, die wir unseren Modellen zugrunde legen wollen. Das einfachste, diese zu erreichen, ist, sie in der Definition explizit zu fordern, dann kann nämlich nichts schiefgehen. Wir versuchen diesmal wieder terminologische Verwirrungen zu vermeiden, indem wir statt

[6] Dies ist natürlich nicht die einzige und keineswegs die "stärkste" Möglichkeit einer solchen Verallgemeinerung, aber eben die einfachste.

von Modellen von Interpretationen sprechen; zuvor müssen wir auch noch den Begriff der Belegung verallgemeinern, was allerdings keine Schwierigkeiten bereitet:

(3) Sei $(M_\tau)_{\tau\in Typ}$ eine (auf irgendeinem (D,I) basierende) Ontologie. Eine *Belegung für* $(M_\tau)_{\tau\in Typ}$ ist eine Funktion ν von $\bigcup\limits_{\tau\in Typ} Var_\tau$ nach $\bigcup\limits_{\tau\in Typ} M_\tau$, so dass für jedes $\tau \in Typ$ und jedes $x \in Var_\tau$ gilt:

$$\nu(x) \in M_\tau$$

.

(4) Sei $(M_\tau)_{\tau\in Typ}$ wie in (2), ν eine Belegung dafür, $x \in Var_\tau$, $a \in M_\tau$. Dann ist

$$\nu(a/x)(y) := \begin{cases} \nu(y), \text{ falls } y \neq x \\ a, \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle Variablen y.

(5) Eine *Interpretation* $\mathcal{M}$ ist ein Paar $\mathcal{M} = (M,V)$, wobei gilt:
   a. $M = (M_\tau)_{\tau\in Typ}$ ist eine Ontologie mit Basis (D,I);
   b. V ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\bigcup\limits_{\tau\in Typ} Con_\tau$ und Wertebereich $\bigcup\limits_{\tau\in Typ} M_\tau$;[7]
   c. falls $\mathbf{c} \in Con_\tau$, so ist $V(\mathbf{c}) \in {M_\tau}^I$;
   d. es gibt eine Funktion *Ext*, die jeder Belegung ν für M, jedem $i \in I$ und jedem $\alpha \in Tm_\tau$ einen Wert $Ext_{\nu,i}(\alpha)$ in M_τ zuordnet, sodass gilt:
      i. Falls $\mathbf{c} \in Con_\tau$, so ist $Ext_{\nu,i}(\mathbf{c}) = V(\mathbf{c})(i)$;
      ii. falls $x \in Var_\tau$, so ist $Ext_{\nu,i}(x) = \nu(x)$;
      iii. falls $\alpha = \beta(\gamma)$, so ist $Ext_{\nu,i}(\alpha) = Ext_{\nu,i}(\beta)(Ext_{\nu,i}(\gamma))$;
      iv. falls $\alpha = [\lambda x\beta]$, $x \in Var_{\tau_1}$, $\beta \in Tm_{\tau_2}$, so ist $Ext_{\nu,i}(\alpha)$ diejenige Funktion $f \in {M_{\tau_2}}^{M_{\tau_1}}$, so dass für beliebige $a \in M_{\tau_1}$ gilt: $f(a) = Ext_{(\nu,a/x),i}(\beta)$;
      v. falls $\alpha = [\beta \equiv \gamma]$, so ist $Ext_{\nu,i}(\alpha) = 1$ gdw. $Ext_{\nu,i}(\beta) = Ext_{\nu,i}(\gamma)$;
      vi. falls $\alpha = [\check{}\beta]$, so ist $Ext_{\nu,i}(\alpha) = Ext_{\nu,i}(\beta)(i)$;
      vii. falls $\alpha = [\hat{}\beta]$ und $\beta \in Tm_\sigma$, so ist $Ext_{\nu,i}(\alpha)$ diejenige Funktion $f \in {M_\sigma}^I$, so dass für beliebige $j \in I$ gilt: $f(j) = Ext_{\nu,j}(\beta)$.

Noch einige Bemerkungen zu Definition (5): es ist klar, dass die in Klausel (d) postulierte Funktion einzig ist, in dem Sinne, dass es höchstens eine gibt, wenn es mindestens eine

[7]Man würde hier vielleicht $\bigcup\limits_{\tau\in Typ} [{M_\tau}^I]$ als Wertebereich erwarten, aber die übrigen Festlegungen stellen sicher, dass das keinen Unterschied macht, da jedes $V(c)$ auch in dem entsprechenden $M_{(s,\tau)}$ sein wird.

gibt. Außerdem folgt trivialerweise sofort, dass jedes (Standard-)Modell auch eine Interpretation ist[8]. Die Tatsache, dass es auch Interpretationen gibt, die keine Standardmodelle sind, wird dann aus dem Vollständigkeitssatz folgen.

Der Vollständigkeit (!) halber seien noch die üblichen verallgemeinterten semantischen Begriffsbildungen definiert, die natürlich genauso sind, wie man sie erwarten würde. Dabei werden wir uns der folgenden, naheliegenden Konvention bedienen: falls $\mathcal{M}$ eine Interpretation ist, so bezeichnen wir mit $Ext^{\mathcal{M}}$ die nach Klausel (d) in (5) eindeutig bestimmte (Interpretations-)Funktion; wenn klar ist, welche Interpretation gemeint ist, lassen wir auch manchmal den oberen Index weg.

(6) Sei $\mathcal{M} = (M, V)$ eine Interpretation, wobei M auf (D, I) basiert. $\alpha \in Tm_\tau$ heißt (wahr in $\mathcal{M}$ – $\mathcal{M} \vDash \alpha$ – gdw. für jede M-Belegung ν und alle $i \in I$ gilt:

$$Ext^{\mathcal{M}}_{\nu,i}(\alpha) = 1$$

.

(7) Sei $\mathcal{M}$ wie oben, $\Sigma \subseteq Tm_t$. $\mathcal{M}$ ist ein (Modell für Σ – $\mathcal{M} \vDash \Sigma$ – gdw. für jedes $\alpha \in \Sigma$ gilt: $\mathcal{M} \vDash \alpha$.

(8) Sei $\Sigma \subseteq Tm_t$, $\alpha \in Tm_t$. α (folgt aus Σ – $\Sigma \vDash \alpha$ – gdw. für jedes Modell $\mathcal{M}$ für Σ gilt: $\mathcal{M} \vDash \alpha$.

(9) Sei $\alpha \in Tm_t$. α ist (gültig – $\vDash \alpha$ – gdw. $\varnothing \vDash \alpha$.

Diese letzte Definition gibt uns den Gültigkeitsbegriff, den zu axiomatisieren wir jetzt in Angriff nehmen werden.

4 Ein Axiomsystem für *IL*

Unsere intuitiven Vorüberlegnungen in Abschnitt 1 haben ergeben, dass *IL* im Prinzip so etwas wie eine schwache[9] zweisortige Typenlogik ist. Es ist nun im allgemeinen so, dass (endliche) Mehrsortigkeit nichts an der Vollständigkeit ändert. Weiterhin hat Henkin bereits 1950 in [CTT] die Vollständigkeit der (extensionalen) Typenlogik bewiesen. Wir könnten hier also einfach den Versuch unternehmen, mit dem gleichen Axiomensystem zu arbeiten und für dieses nach den in Abschnitt 2 geschilderten Verfahren die Vollständigkeit nachweisen; natürlich müssten wir dieses noch intensionalisieren – also praktisch zweisortig machen – was allerdings keine Schwierigkeiten bereitet. Wir müssten

[8]Genauer gesagt, dass sich jedes Standardmodell als Interpretation darstellen lässt, d.h. einem Standardmodell $\mathcal{M} = (W, A, V)$ entspricht eindeutig eine Interpretation $\bar{\mathcal{M}} = (M, V)$, wobei M das Kategoriensystem mit Basis (W, A) ist.

[9]schwach, weil unter anderem jedem Ausdruck nur einziger verborgener Parameter – zweisortig gesprochen: eine einzige s-Variable – vorkommen darf.

nämlich bloß noch für jedes dort auftauchende Axiom ein entsprechendes intensionales hinzuschreiben, welches man immer leicht finden kann. Wir werden hier allerdings ein etwas einfacheres Axiomensystem zugrunde legen, das auf P. Andrews ([RA]) zurückgeht und von Gallin intensionalisiert worden ist (Gallin [IHM], S.19). Das Andrews'sche System sieht (in unserer Notation) folgendermaßen aus:

(1) Typenlogische Axiome

$\underline{A1:}$ $f^*(\top) \wedge f^*(\bot) \equiv \forall x^*[f^*(x^*)]$, wobei f^* und x^* feste Variablen der Kategorien (t,t) bzw. t sind.

$\underline{A2_\tau:}$ $[x^* \equiv y^*] \rightarrow [f^*(x^*) \equiv f^*(y^*)]$, wobei x^*, y^* und f^* jeweils feste (voneinander verschiedene) Variablen der Kategorie τ, τ bzw. (σ,τ) sind.

$\underline{A3^\sigma_\tau:}$ $\forall x^*[f^*(x^*) \equiv g^*(x^*)] \equiv [f^* \equiv g^*]$, wobei f^*, g^* und x^* jeweils feste (voneinander verschiedene) Variablen der Kategorie (τ,t), (τ,t) bzw. τ sind.

$\underline{AS4^\sigma_\tau:}$ $[\lambda x^* \alpha](\beta) \equiv \alpha[{}^{x^*}/_{\beta}]$, wobei α ein Ausdruck einer Kategorie τ ist, x^* und β derselben Kategorie σ angehören, $\alpha[{}^{x^*}/_{\beta}]$ das Ergebnis der Ersetzung aller freien Vorkommen von x^* in α durch β ist und außerdem gilt, dass β keine freie Variable y enthält, so dass x^* in einem Teil $(\lambda y \gamma)$ von α frei vorkommt.

(2) Typenlogische Schlussregel:

$R:$

$$\frac{\begin{array}{c}[\alpha_\tau \equiv \beta_\tau] \\ \gamma\end{array}}{\gamma'}$$

wobei γ' das Ergebnis der Ersetzung eines Vorkommens von α_τ in γ durch β_τ ist, sofern diesem Vorkommen nicht unmittelbar ein λ vorangeht.

Die umständliche Einschränkung in $AS4^\sigma_\tau$ soll nur die üblichen Variablenkonfusionen vermeiden, sonst hätte man nämlich z.B. folgendes als Theorem:

(3) $[\lambda x^e[\lambda y^e x^e \equiv y^e]](y^e) \equiv [\lambda y^e\, y^e \equiv y^e]$.

AUFGABE: (vii) Zu zeigen ist, dass (3) nicht gültig ist.

Leider lässt sich (1) nicht ganz so einfach übertragen, wie wir vielleicht gehofft haben: die Axiome sind – wenn wir sie als *IL*-Axiome betrachten – nicht korrekt, das heißt, nicht alle von ihnen sind gültig. Der Grund ist, dass die Einschränkung in $AS4^\sigma_\tau$ nicht ausreicht, und zwar aus einem ganz einfachen Grunde: Wir müssen nämlich, wenn wir Variablenbeschränkungen machen, auch an die Variablen denken, die man nicht sehen kann, also an den verborgenen Parameter, die s-Variable. Zweisortig gesprochen müssten wir also die folgende Bedingung noch hinzunehemen.

(4) ... und kein freies Vorkommen von x^* in α liegt in einem Teil $[\lambda i\gamma]$ von α, wobei i frei vorkommt in β.

Dabei haben wir uns wieder der im ersten Abschnitt eingeführten Konvention bedient, die einzige s-Variable mit "i" zu bezeichnen. (4) ist natürlich dasselbe wie:

(4′) x^* kommt nicht frei vor in einem Teil von $[\lambda i\gamma]$ von α oder: i kommt nicht frei vor in β.

Beide Disjunkte in (4′) lassen sich nach unseren Vorüberlegungen in Abschnitt 1 auf *IL* übertragen; Ausdrücke der Form $[\lambda i\gamma]$ ensprechen Ausdrücken der Form $\hat{\ }\gamma$ und (s. Aufgabe (vi)) zweisortige Ausdrücke ohne freies i entsprechen modal geschlossenen *IL*-Ausdrücken. Die Bedingung in $AS4^{\sigma}_{\tau}$ muss also um folgende Klausel erweitert werden:

(5) ... und kein freies Vorkommen von x^* in α ist in einem Teil $[\hat{\ }\gamma]$ von α oder β ist modal geschlossen.

(Am Schluss des Abschnitts werden wir der Übersicht halber noch einmal alle Axiome zusammenstellen!)
Wir sind aber noch nicht ganz fertig, denn wir müssen noch die anderen Axiome intensionalisieren. Das wird aber jetzt recht schnell gehen:
Bei $A1$ gibt es nichts zu tun, denn dort wird nur das Leben der Wahrheitswerte geregelt; $A2_\tau$ braucht auch nicht "übersetzt" zu werden, denn die Prämisse enthält zwei verschiedene Variablen der Kategorie τ; da *IL* aber eben nur eine schwache zweisortige Logik ist, taucht immer nur eine Variable der "Kategorie s" (als verborgener Parameter) auf, so dass sich $A2_\tau$ gar nicht formulieren lässt.
$A3^{\sigma}_{\tau}$ lässt sich sehr einfach übersetzen, wenn man sich an die Aufgaben (ii) und (iv) erinnert: aus dem Allquantor wird ein $\Box$, aus der in $A3^{\sigma}_{\tau}$ dargestellten Funktionsapplikation ein Extensor und das ganze wird als neues Axiom hinzugenommen:

(6) Erstes Intensionales Axiom

$\underline{A5^{s}_{\tau}:}$ $\Box[\check{\ }f^* \equiv \check{\ }g^*] \equiv [f^* \equiv g^*]$, wobei f^* und g^* feste Variablen der Kategorie (s,τ) sind.

AUFGABE:
(viii) Man zeige, dass als letztes Axiomenschema noch

(7) $\underline{AS6^{s}_{\tau}:}$ $[\check{\ }\hat{\ }\alpha \equiv \alpha]$ für beliebige $\alpha \in Tm_\tau$

hinzugenommen werden kann, ohne dass etwas über Variablenbeschränkungen ausgesagt wird.

An der Regel braucht man offensichtlich nichts zu ändern, da sie nichts über spezielle Typen aussagt. Das gesamte Axiomensystem sieht jetzt also so aus (– wir lassen die Kategorieindizes diesmal weg –):

(8) *Das Axiomensystem der Intensionalen Logik*

<u>$A1:$</u> $f^*(\top) \wedge f^*(\bot) \equiv \forall x^*[f^*(x^*)]$[10].

<u>$A2_\tau:$</u> $[x^* \equiv y^*] \rightarrow [f^*(x^*) \equiv f^*(y^*)]$.

<u>$A3_\tau^\sigma:$</u> $\forall x^*[f^*(x^*) \equiv g^*(x^*)] \equiv [f^* \equiv g^*]$.

<u>$AS4_\tau^\sigma:$</u> $[\lambda x^* \alpha](\beta) \equiv \alpha[x^*/\beta]$,

wobei $\alpha \in Tm_\tau$, $\beta \in Tm_\sigma$ und die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\alpha[x^*/\beta]$ ist das Resultat der Ersetzung aller freien Vorkommen von x^* in α durch β;

(b) kein freies Vorkommen von x^* in α liegt in einem Teil $\lambda y \gamma$, wobei y frei vorkommt in β;

(c) kein freies Vorkommen von x^* in α liegt in einem Teil $[\hat{}\gamma]$ oder β ist modal geschlossen.

<u>$A5_\tau^s:$</u> $\Box[\check{}f^* \equiv \check{}g^*] \equiv [f^* \equiv g^*)]$

<u>$AS6_\tau^s:$</u> $[\check{}\hat{}\alpha \equiv \alpha]$, wobei $\alpha \in Tm_\tau$

$R:$ Aus $[\alpha \equiv \beta]$ und γ lässt sich γ' ableiten, wobei γ' aus γ entsteht, indem ein Vorkommen von α in γ durch β ersetzt wird, vorausgesetzt, diesem Vorkommen geht nicht ein λ unmittelbar voran.

Abschließend definieren wir noch die üblichen syntaktischen Begriffe:

(9) Eine endliche Folge $< \alpha_1, \ldots, \alpha_n >$ von *IL*-Formeln ist ein *Beweis* gdw. für jedes α_i $(i \leq n)$ gilt: (a) α_i ist ein Axiom oder (b) es gibt $j_1, j_2 < i$, sodass α_i durch Anwendung von R auf α_{j_1} und α_{j_2} entsteht.

(10) $\alpha \in Tm_t$ ist *beweisbar* – $\vdash \alpha$ – gdw. es einen Beweis $< \alpha_1, \ldots, \alpha_n >$ gibt mit $\alpha_n = \alpha$.

(11) $\alpha \in Tm_t$ ist *ableitbar aus* $\Gamma \subseteq Tm_t$ – $\Gamma \vdash \alpha$ – gdw. es $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \Gamma$ gibt, so dass: $\vdash [\beta_1 \rightarrow [\beta_2 \rightarrow \cdots \rightarrow [\beta_k \rightarrow \alpha] \ldots]]$.

(12) $\Gamma \subseteq Tm_t$ ist *widerspruchsfrei* gdw. $\Gamma \nvdash \bot$ (d.h. $\bot$ ist nicht ableitbar aus Γ).

<u>**AUFGABEN**</u>:

(ix) Man gebe eine "vernünftige" Definition für Erfüllbarkeit, dem semantischen Pendant zur Widerspruchsfreiheit.

(x) Weisen Sie die Korrektheit des Systems (8) nach, d.h.: $\vdash \alpha$ impliziert, dass α gültig ist.

[10] die Variablen sind dieselben wie oben

5 Eigenschaften der Axiomatisierung

Das Elegante an der im letzten Abschnitt vorgestellten Axiomatisierung ist, dass sie mit nur sehr wenigen Axiomen(-schemata) und nur einer Regel auskommt. Für den Vollständigkeitsbeweis hat dies natürlich immer den Nachteil, dass man zeigen muss, dass sich dennoch eine ganze Menge aus dem System ableiten lässt, nämlich genausoviel, wie aus einem (vermeintlich) stärkeren vollständigen System auch. M.a.W.: je kürzer die Axiomatisierung, desto länger die Rechnerei. Wir werden deshalb in diesem Abschnitt zeigen, was sich so alles aus unserem System ableiten lässt; dabei steuern wir natürlich auf solchen Formeln zu, deren Ableitbarkeit wir später voraussetzen müssen. Hier und da werden wir auch noch ein paar andere, etwas allgemeinere Eigenschaften der Axiomatisierung nachweisen, z.B. Modus Ponens und das Deduktionstheorem. Wir werden – um uns später darauf beziehen zu können – alle diese Dinge, die wir hier nachweisen, der Reihe nach nummerieren. (So ist z.B. Modus Ponens T19, das Deduktionstheorem T68.) Die Nummerierung folgt dabei Gallin [IHM], 21-24.

Falls es sich bei einer nachzuweisenden Eigenschaft einer Axiomatisierung um die Ableitbarkeit einer Formel (bzw. eines Formelschemas) α handelt, so werden wir die folgende, allgemein übliche Darstellungsweise des Beweises (im Sinne von Definition (9) des letzten Abschnitts) wählen: wir schreiben die α_i's untereinander hin, nummerieren sie dabei durch und schreiben in Klammern daneben, wieso sie dort stehen: falls es sich um Axiome handelt, schreiben wir die Nummer des Axioms hin; handelt es sich bei α_i um das Resultat einer Anwendung von R auf $\alpha_{j_1} = [\beta \equiv \gamma]$ und α_{j_2}, so schreiben wir "$(R\, j_1, j_2)$" neben α_i (und i). Wer's nicht verstanden hat, wird es am Beispiel schon sehen. Kleine griechische Buchstaben werden dabei für *IL*-Terme stehen; wenn sie einen Index (z.B. (t,t)) haben, steht dieser für ihre Kategorie. Kleine lateinische Buchstaben (mit oder ohne Kategorienindex) stehen für Variablen.

<u>$T1$:</u> $\vdash \alpha \equiv \alpha$.

<u>Beweis:</u>

1.	$\vdash {}^{\vee\wedge}\alpha \equiv \alpha$	$(AS6)$
2.	$\vdash \alpha \equiv \alpha$	$(R\ 1,1)$

<u>$T2$:</u> $\vdash \top$.

<u>Beweis:</u>

s. $T1$ und die Definition von "$\top$".

<u>$T3$:</u> $\vdash \forall x \top$, für beliebige $x \in \bigcup_{\tau \in Typ} Var_\tau$.

<u>Beweis:</u>

s. $T1$ und die Definition von "$\forall$".

$\underline{T4:}$ $\vdash \Box\top$.

Beweis:

s. $T1$ und die Definition von "$\Box$".

$\underline{T5.1:}$ Falls $\vdash \alpha \equiv \beta$, so $\vdash \beta \equiv \alpha$.

Beweis:

1.	$\vdash \alpha \equiv \beta$	(Annahme)
2.	$\vdash \alpha \equiv \alpha$	$(T1)$[11]
3.	$\vdash \beta \equiv \alpha$	$(R\ 1,2)$

$\underline{T5.2:}$ Falls $\vdash \alpha \equiv \beta$ und $\vdash \beta \equiv \gamma$, so $\vdash \alpha \equiv \gamma$.

Beweis:

1.	$\vdash \alpha \equiv \beta$	(Annahme)
2.	$\vdash \beta \equiv \gamma$	(Annahme)
3.	$\vdash \alpha \equiv \gamma$	$(R\ 2,1)$

$T1$, $T5.1$ und $T5.2$ werden wir später noch gebrauchen können, da sie sicherstellen, dass "$\equiv$" eine Äquivalenzrelation (über Terme) definiert. Das einzige Axiom, das wir dabei benutzt haben, war $AS6$; wir hätten natürlich ebensogut $AS4$ nehmen können, aber das ist länger. Die bisherigen Beweise waren alle sehr kurz, jetzt kommt mal ein etwas längerer:

$\underline{T6:}$ $\vdash \top \wedge \top$.

[11] Hier haben wir den Beweis insofern abgekürzt, als wir $T1$ einfach mithinzunehmen, ohne es nochmal zu beweisen. Das werden wir in Zukunft öfter tun.

Beweis:

1. $\vdash [\lambda f^* f^*(\top) \wedge f^*(\bot)]([\lambda y^t \top])$
 $\equiv [\lambda f^* f^*(\top) \wedge f^*(\bot)]([\lambda y^t \top])$ $\quad (T1)$
2. $\vdash f^*(\top) \wedge f^*(\bot) \equiv \forall x^t [f^*(x)]$ $\quad (A1)$
3. $\vdash [\lambda f^* \forall x^t [f^*(x)]]([\lambda y^t \top])$
 $\equiv [\lambda f^* f^*(\top) \wedge f^*(\bot)]([\lambda y^t \top])$ $\quad (R\ 2,1)$
4. $\vdash [\lambda f^* \forall x^t [f^*(x)]]([\lambda y^t \top] \equiv \forall x [[\lambda y \top](x)]$ $\quad (AS4)$
5. $\vdash [\lambda f^* f^*(\top) \wedge f^*(\bot)]([\lambda y^t \top])$
 $\equiv [\lambda y^t \top](\top) \wedge [\lambda y \top](\bot)$ $\quad (AS4)$
6. $\vdash \forall x^t [[\lambda y^t \top](x)] \equiv [\lambda f^* f^*(\top) \wedge f^*(\bot)]([\lambda y \top])$ $\quad (R\ 4,3)$
7. $\vdash \forall x^t [[\lambda y^t \top](x)] \equiv [\lambda y \top](\top) \wedge [\lambda y \top](\bot)$ $\quad (R\ 5,6)$
8. $\vdash [\lambda y^t \top](x^t) \equiv \top$ $\quad (AS4)$
9. $\vdash [\lambda y^t \top](\top) \equiv \top$ $\quad (AS4)$
10. $\vdash [\lambda y^t \top](\bot) \equiv \top$ $\quad (AS4)$
11. $\vdash \forall x^t \top \equiv [\lambda y^t \top](\top) \wedge [\lambda y \top](\bot)$ $\quad (R\ 8,7)$
12. $\vdash \forall x^t \top \equiv \top \wedge [\lambda y^t \top](\bot)$ $\quad (R\ 9,11)$
13. $\vdash \forall x^t \top \equiv \top \wedge \top$ $\quad (R\ 10,12)$
14. $\vdash \forall x^t \top$ $\quad (T3)$
15. $\vdash \top \wedge \top$ $\quad (R\ 13,14)$

<u>$T7$:</u> $[\alpha \equiv \top] \equiv \alpha$, für beliebige $\alpha \in Tm_t$.

Beweis:

1. $\vdash [\lambda x^t[\lambda y^t[\lambda f^* f^*(x \equiv y)] \equiv [\lambda f^* f^*(\top)]]](\top)(\top)$ $(T6)$[12]
2. $\vdash [\lambda x^t[\lambda y^t[\lambda f^* f^*(x \equiv y)] \equiv [\lambda f^* f^*(\top)]]](\top)(\top)$
   $\equiv [\lambda y^t[\lambda f^* f^*(\top \equiv y)] \equiv [\lambda f^* f^*(\top)]](\top)$ $(AS4)$
3. $\vdash [\lambda y^t[\lambda f^* f^*(\top \equiv y)] \equiv [\lambda f^* f^*(\top)]](\top)$
   $[\equiv [\lambda f^* f^*(\top \equiv \top)] \equiv [\lambda f^* f^*(\top)]]$ $(AS4)$
4. $\vdash [\lambda y^t[\lambda f^* f^*(\top \equiv y] \equiv [\lambda f^* f^*(\top)]](\top)$ $(R\ 2,1)$
5. $\vdash [\lambda f^* f^*(\top \equiv \top)] \equiv [\lambda f^* f^*(\top)]$ $(R\ 3,4)$
6. $\vdash [\lambda f^* f^*(\top \equiv \top)]([\lambda z^t \alpha]) \equiv [\lambda f^* f^*(\top \equiv \top)]([\lambda z \alpha])$ $(T1)$[13]
7. $\vdash [\lambda f^* f^*(\top \equiv \top)]([\lambda z^t \alpha]) \equiv [\lambda f^* f^*(\top)]([\lambda z \alpha])$ $(R\ 5,6)$
8. $\vdash [\lambda f^* f^*(\top \equiv \top)]([\lambda z^t \alpha]) \equiv [\lambda z \alpha](\top \equiv \top)$ $(AS4)$
9. $\vdash [\lambda f^* f^*(\top)]([\lambda z^t \alpha]) \equiv [\lambda z \alpha](\top)$ $(AS4)$
10. $\vdash [[\lambda z^t \alpha](\top) \equiv \top] \equiv [\lambda f^* f^*(\top)]([\lambda z \alpha])$ $(R\ 8,7)$
11. $\vdash [[\lambda z^t \alpha](\top) \equiv \top] \equiv [\lambda z \alpha](\top)$ $(R\ 9,10)$
12. $\vdash [\lambda z^t \alpha](\top) \equiv \alpha$ $(AS4)$
13. $\vdash [\alpha \equiv \top] \equiv [\lambda z^t \alpha](\top)$ $(R\ 12,11)$
14. $\vdash [\alpha \equiv \top] \equiv \alpha$ $(R\ 12,13)$

<u>$T8$:</u> Falls $\vdash \alpha$, so auch $\vdash \forall x \alpha$ (– d.h. $\vdash [\lambda x \alpha] \equiv [\lambda x \top]$).

Beweis:

1. $\vdash \alpha$ (Annahme)
2. $\vdash [\alpha \equiv \top] \equiv \alpha$ $(T7)$
3. $\vdash \alpha \equiv [\alpha \equiv \top]$ $(T5.1)$
4. $\vdash \alpha \equiv \top$ $(R\ 3,1)$
5. $\vdash [\lambda x \alpha] \equiv [\lambda x \alpha]$ $(T1)$
6. $\vdash [\lambda x \alpha] \equiv [\lambda x \top]$ $(R\ 4,5)$

<u>$T9$:</u> Falls $\vdash \forall x \alpha$, so auch $\vdash \alpha[^x/_\beta]$, wobei β die Bedingungen (a) bis (c) in $AS4$ erfüllt.

[12] "$\wedge$" = "$\lambda x^t \lambda y^t [\lambda f^{(t,t)}[f(x) \equiv f(y)] \equiv \lambda f f(\top)]$".

[13] Dabei ist z die erste Variable der Kategorie t, die nicht frei vorkommt in α.

Beweis:

1. $\vdash [\lambda x \alpha] \equiv [\lambda x \top]$ (Annahme)
2. $\vdash [\lambda x \alpha](\beta) \equiv \alpha[{}^{x}/_{\beta}]$ $(AS4)$
3. $\vdash \alpha[{}^{x}/_{\beta}] \equiv [\lambda x \alpha](\beta)$ $(T5.1)$
4. $\vdash \alpha[{}^{x}/_{\beta}] \equiv [\lambda x \top](\beta)$ $(R1, 3)$
5. $\vdash [\lambda x \top](\beta) \equiv \top$ $(AS4)$
6. $\vdash \alpha[{}^{x}/_{\beta}] \equiv \top$ $(R5, 4)$
7. $\vdash \top \equiv \alpha[{}^{x}/_{\beta}]$ $(T5.1)$
8. $\vdash \top$ $(T2)$
9. $\vdash \alpha[{}^{x}/_{\beta}]$ $(R\ 7, 8)$

$\underline{T10}$: Falls $\vdash \alpha$, so auch $\vdash \alpha[{}^{x}/_{\beta}]$, wobei β wie in $AS4$ ist.

Beweis:

1. $\vdash \alpha$ (Annahme)
2. $\vdash \forall x \alpha$ $(T8)$
3. $\vdash \alpha[{}^{x}/_{\beta}]$ $(T9)$

Ab jetzt werden wir die Beweise etwas abkürzen, indem wir gelegentlich mehrere Schritte auf einmal machen; dies wird aber immer im Rahmen des Überschauberen geschehen.

$\underline{T11}$: Falls $\vdash \alpha$ und $\vdash \beta$, so auch $\vdash [\alpha \wedge \beta]$.

Beweis:

1. $\vdash \alpha$ (Annahme)
2. $\vdash \beta$ (Annahme)
3. $\vdash [\lambda f^{(t,t)} f(\alpha)](\beta) \equiv [\lambda f f(\alpha)](\beta)$ $(T1)$
4. $\vdash \alpha \equiv \top$ (mit $T7$, $T5.1$ und R auf 1. angewandt)
5. $\vdash \beta \equiv \top$ (mit $T7$, $T5.1$ und R auf 2. angewandt)
6. $\vdash [\lambda f^{(t,t)} f(\alpha)](\beta) \equiv [\lambda f f(\top)](\top)$ (mit R und 4., 5. und 3.)
7. $\vdash [f^{(t,t)}(\top \equiv \top)] \equiv f(\top)$ $(T7)$
8. $\vdash [\lambda f^{(t,t)}(f(\alpha) \equiv \beta)] \equiv [\lambda f f(\top)]$ $(R\ 7, 6)$
9. $\vdash [\alpha \wedge \beta]$ (mit R und $AS4$ aus 8.)[14]

[14] Man vergleiche hierzu die Definition von "$\wedge$"!

$\underline{T12}$: $\vdash [\lambda x \alpha_x] \equiv [\lambda y \alpha_y]$, wobei α_x und α_y sich dadurch unterscheiden, dass überall, wo in α_x x frei vorkommt, in α_y y frei vorkommt und umgekehrt.

Beweis:

1. $\vdash \forall x^*[[\lambda x^* f^*(x^*) \equiv g^*(x^*)](x^*) \equiv [\lambda z^* f^*(z^*) \equiv g^*(z^*)](x^*)]$
   $\equiv [[\lambda x^* f^*(x^*) \equiv g^*(x^*)] \equiv [\lambda z^* f^*(z^*) \equiv g^*(z^*)]]$ (aus $A3$ mit $T10$)
2. $\vdash [\lambda x^* f^*(x^*) \equiv g^*(x^*)](x^*) \equiv [\lambda z^* f^*(z^*) \equiv g^*(z^*)](x^*)$ (aus $AS4$ mit $T5$)[15]
3. $\vdash \forall x^*[[\lambda x^* f^*(x^*) \equiv g^*(x^*)](x^*) \equiv [\lambda z^* f^*(z^*) \equiv g^*(z^*)](x^*)]$ (mit $T8$ aus 2.)
4. $\vdash [\lambda x^* f^*(x^*) \equiv g^*(x^*)] \equiv [\lambda z^* f^*(z^*) \equiv g^*(z^*)]$ (R 1,3)
5. $\vdash [\lambda x^* \top] \equiv [\lambda z^* \top]$ (analog zu 1. bis 4.)
6. $\vdash \forall x^*[f^*(x^*) \equiv g^*(x^*)] \equiv \forall z^*[f^*(z^*) \equiv g^*(z^*)]$ (mit 4. und 5. aus $T1$)[16]
7. $\vdash \forall z^*[f^*(z^*) \equiv g^*(z^*)] \equiv [f^* \equiv g^*]$ (mit R aus $A3$ und 6.)
8. $\vdash \forall z^*[[\lambda x \alpha](z^*) \equiv [\lambda y \alpha[x/y]](z^*)] \equiv [[\lambda x \alpha] \equiv [\lambda y \alpha[x/y]]]$ (mit $T10$ aus 7.)
9. $\vdash [\lambda x \alpha](z^*) \equiv [\lambda y \alpha[x/y]](z^*)$ (aus $AS4$ mit $T5$)[17]
10. $\vdash \forall z^*[[\lambda x \alpha](z^*) \equiv [\lambda y \alpha[x/y]](z^*)]$ (aus $T8$ aus 9.)
11. $\vdash [\lambda x \alpha] \equiv [\lambda y \alpha[x/y]]$ (R 8,9)

AUFGABE: (xi) Zu zeigen sind die nächsten beiden Eigenschaften des Axiomensystems:

$\underline{T13}$: $\vdash [\forall x \alpha_x] \equiv [\forall y \alpha_y]$, wobei α_x und α_y wie in T12 sind.

$\underline{T14}$: $\vdash \forall x[\alpha(x) \equiv \beta(x)] \equiv [\alpha \equiv \beta]$, wobei x eine beliebige Variable (einer geeigneten Kategorie) ist, die weder in α noch in β frei vorkommt.

Die nächsten paar Eigenschaften, die wir nachweisen werden, beziehen sich auf die aussagenlogische Vollständigkeit der Axiomatisierung. Wir werden jetzt unsere Darstellungsweise noch etwas mehr straffen, indem wir nicht jedes einzelne Theorem oder Axiom erwähnen, das beim Übergang von einer Zeile zur nächsten eingeht, sondern nur noch die wichtigsten.

$\underline{T15}$: $\vdash \alpha[x^t/\top]$ und $\vdash \alpha[x^t/\bot]$ impliziert $\vdash \alpha$, wobei $\alpha[x^t/\beta]$ die Ersetzung aller freien Vorkommen von x^t in α durch β ist.

[15]Dabei ist z^* eine von s^*, y^*, x und y verschiedene Variable, die in α nicht vorkommt.
[16]zur Erinnerung: $\forall x^*[f^*(x^*) \equiv g^*(x^*)]$ heißt: $[\lambda x^* f^*(x^*) \equiv g^*(x^*)] \equiv [\lambda x^* \top]$
[17]NB: $\alpha[x/z^*] = \alpha[x/y][y/z^*]$!

Beweis:

1. $\vdash \alpha[{}^{x^t}/_{\top}]$ (Annahme)
2. $\vdash \alpha[{}^{x^t}/_{\bot}]$ (Annahme)
3. $\vdash [\lambda x^t \alpha](\top) \wedge [\lambda x \alpha](\bot) \equiv \forall x[[\lambda x \alpha](x)]$ (aus $A1$ mit $T10$)
4. $\vdash \alpha[{}^{x^t}/_{\top}] \wedge \alpha[{}^{x}/_{\bot}] \equiv \forall x \alpha$ (wegen $AS4$)
5. $\vdash \forall x^t \alpha$ (wegen $T11$)
6. $\vdash \alpha$ ($T9$)

$\underline{T16}$: $\vdash \top \wedge \bot \equiv \bot$

Beweis:

1. $\vdash [\lambda x^t x](\top) \wedge [\lambda x\ x](\bot) \equiv \forall x [\lambda x\ x](x)$ (mit $T10$ aus $A1$)
2. $\vdash \top \wedge \bot \equiv \bot$[18] (wegen $AS4$)

$\underline{T17}$: $\vdash \top \wedge x^t \equiv x$.

Beweis:

1. $\vdash [[\top \wedge \top] \equiv \top] \equiv [\top \wedge \top]$ ($T7$)
2. $\vdash [\top \wedge \top] \equiv \top$ (mit $T6$)
3. $\vdash [\top \wedge \bot] \equiv \bot$ ($T16$)
4. $\vdash [\top \wedge x^t] \equiv x$ (wegen $T15$)

$\underline{T18}$: $\vdash \top \rightarrow x^t \equiv x$[19]

Beweis:

1. $\vdash \top \wedge x^t \equiv x$ ($T17$)
2. $\vdash [[\top \wedge x^t] \equiv \top] \equiv [\top \wedge x]$ ($T7$)
3. $\vdash [\top \rightarrow x^t] \equiv [[\top \wedge x] \equiv \top]$ (mit der Def. von "$\rightarrow$" und $AS4$)
4. $\vdash [\top \rightarrow x^t] \equiv x$ (mit R aus 1–3)

Aus $T18$ folgt sofort eine wesentliche Eigenschaft des Axiomensystems, nämlich die Abgeschlossenheit gegenüber <u>Modus Ponens</u>:

[18] Man beachte hierbei, dass laut Definition gilt: $\bot := [\lambda x^t x \equiv \lambda x \top]$, was wiederum dasselbe ist wie $\forall x^t x$.

[19] Dabei wird die materiale Implikation definiert durch: " $\rightarrow$ " = "$\lambda x^t \lambda y^t [[x \wedge y] \equiv x]$"

$\underline{T19}$: Aus $\vdash \alpha$ und $\vdash \alpha \to \beta$ folgt: $\vdash \beta$.
Beweis:

1. $\vdash\alpha$ (Annahme)
2. $\vdash\alpha \to \beta$ (Annahme)
3. $\vdash\alpha \equiv \top$ (mit $T7$)
4. $\vdash[\top \to \beta] \equiv \beta$ (mit $T18$ und $T10$)
5. $\vdash[\alpha \to \beta] \equiv \beta$ $(R, 3, 4)$
6. $\vdash\beta$ (mit R und 2)

Wenn man sich unsere Axiomatisierung genauer anguckt, wird man sich vielleicht wundern, dass die Extensionalitätsforderung $A2$ lediglich für Funktoren des Typs (σ, t) (also Mengen) und nicht für beliebige Funktoren beliebiger Kategorien (σ, τ) aufgestellt wurde. Dass $A2$ dennoch ausreicht, zeigt $T20$:

$\underline{T20}$: $\vdash [x^\sigma \equiv y^\sigma] \to [g^{(\sigma,\tau)}(x) \equiv g(y)]$.
Beweis:

1. $\vdash[x^* \equiv y^*] \to [f^*(x^*) \equiv f^*(y^*)]$ $(A2)$
2. $\vdash[x^\sigma \equiv y^\sigma] \to [[\lambda z^\sigma g^{(\sigma,\tau)}(x) \equiv g(z)](x)$
   $\equiv [\lambda z^\sigma g^{(\sigma,\tau)}(x) \equiv g(z)](y^\sigma)]$ (drei mal $T10$)
3. $\vdash[x^\sigma \equiv y^\sigma] \to [[g^{(\sigma,\tau)}(x) \equiv g(x)] \equiv [g(x) \equiv g(y)]]$ (mit $AS4$)
4. $\vdash[g^{(\sigma,\tau)}(x^\sigma) \equiv g(x)] \equiv \top$ (mit $T7$)
5. $\vdash[x^\sigma \equiv y^\sigma] \to [\top \equiv [g^{(\sigma,\tau)}(x) \equiv g(y)]]$ $(R\ 4, 3)$
6. $\vdash[\top \equiv [g^{(\sigma,\tau)}(x^\sigma) \equiv g(y^\sigma)]] \equiv [g(x) \equiv g(y)]$ (mit $T7$)
7. $\vdash[x^\sigma \equiv y^\sigma] \to [g^{(\sigma,\tau)}(x) \equiv g(y)]$ $(R\ 6, 5)$

$\underline{T21}$: $[f^{(\sigma,\tau)} \equiv g^{(\sigma,\tau)}] \to [f(x^\sigma) \equiv g(x)]$.
Beweis:

1. $\vdash[[\lambda x^\sigma f^{(\sigma,\tau)}(x) \equiv g^{(\sigma,\tau)}(x)] \equiv [\lambda x \top]]$
   $\to[[\lambda h^{(\sigma,t)} h(x)]([\lambda x f(x) \equiv g(x)])$
   $\equiv[\lambda h h(x)]([\lambda x \top])]$ (mit $T10$ aus $A2$)
2. $\vdash\forall x^\sigma[f^{(\sigma,\tau)}(x) \equiv g^{(\sigma,\tau)}(x)] \to [[f(x) \equiv g(x)] \equiv \top]$ (mit $AS4$ und Def. "$\forall$")
3. $\vdash\forall x^\sigma[f^{(\sigma,\tau)}(x) \equiv g^{(\sigma,\tau)}(x)] \equiv [f \equiv g]$ (aus $A3$)
4. $\vdash[[f^{(\sigma,\tau)}(x^\sigma) \equiv g^{(\sigma,\tau)}(x)] \equiv \top] \equiv [f(x) \equiv g(x)]$ $(T7)$
5. $\vdash[f^{(\sigma,\tau)} \equiv g^{(\sigma,\tau)}] \to [f(x^\sigma) \equiv g(x)]$ (mit R)

$\underline{T22:}$ $\bot \to x^t$.

Beweis:

1. $\vdash [f^{(t,t)} \equiv g^{(t,t)}] \to [h^{((t,t),t)}(f) \equiv h(g)]$ ($T20$)
2. $\vdash [[\lambda x^t x] \equiv [\lambda x \top]]$
   $\to [[\lambda f^{(t,t)} f(x^t)]([\lambda x x]) \equiv [\lambda f f(x)]([\lambda x \top])]$ (mit $T10$)
3. $\vdash \bot \to [x^t \equiv \top]$ (über $AS4$ und die Def. von "$\bot$")
4. $\vdash \bot \to x^t$ (mit $T7$)

Für die nächsten beiden Behauptungen brauchen wir noch ein paar Definitionen:

(1) Die Klasse der *aussagenlogischen Formeln* ist die kleinste Klasse $K \subseteq Tm_t$, für die gilt:
  a. $\top, \bot \in K$;
  b. $Var_t \subseteq K$;
  c. $\alpha, \beta \in K \Rightarrow [\neg\alpha], [\alpha \wedge \beta], [\alpha \vee \beta], [\alpha \to \beta], [\alpha \equiv \beta] \in K$.[20]

(2) Eine *Tautologie* ist eine *IL*-gültige aussagenlogische Formel.

(3) $\alpha \in Tm_t$ heißt *tautologisch* gdw. α aus einer Tautologie β durch simultanes uniformes Ersetzen einiger freien Variablen durch *IL*-Ausdrücke hervorgeht.

Wir zeigen nun die aussagenlogische Vollständigkeit unseres Axiomensystems:

$\underline{T23:}$ $\vdash \alpha$, für jede Tautologie α.

Beweis: Der Beweis ist, wie man schon vermuten kann, von einer anderen Struktur als die bisherigen. Wir argumentieren induktiv über die Anzahl n der freien Variablen in α:

Induktionsanfang: $n = 0$.

Hierzu weisen wir die folgende Behauptung nach:

[20] Dabei sind die Junktoren wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \text{“}\neg\text{”} &= \text{“}\lambda x^t[\bot \equiv x]\text{”} \\ \text{“}\wedge\text{”} &= \text{“}\lambda x^t \lambda y^t [\lambda f^{(t,t)}[f(x) \equiv y] \equiv [\lambda f f(\top)]]\text{”} \\ \text{“}\to\text{”} &= \text{“}\lambda x^t \lambda y^t [[x \wedge y] \equiv x]\text{”} \\ \text{“}\vee\text{”} &= \text{“}\lambda x^t \lambda y^t [\neg x \to y]\text{”} \end{aligned}$$

(4) Falls α eine parameterfreie aussagenlogische Formel (PAF) ohne freie Variablen ist, so gilt:

$$\begin{aligned} \text{entweder } (\alpha_+): &\quad \vdash \alpha \\ \text{oder } (\alpha_-): &\quad \vdash \neg\alpha. \end{aligned}$$

(4) zeigt, dass das Axiomensystem die Tatsache erfasst, dass PAFs stets Tautologien oder Widersprüche sind (Koinzidenzlemma). Aus (4) folgt die $T23$ (für den Fall $n = 0$), denn eine Tautologie α kann wegen der Korrektheit des Axiomensystems nicht (α_-) erfüllen.

Der Nachweis von (4) wird induktiv über den Aufbau PAFs geführt. Der Induktionsanfang ist einfach, weil es ja nur 2 atomare PAFs gibt: $(\top_+)$ ist eine Instanz von $T1$; und $(\bot_-)$ ergibt sich wie folgt:

1. $\vdash \bot \equiv \bot$	$(A1)$
2. $\vdash \neg\bot \equiv [\bot \equiv \bot]$	($AS4$ wg. der Def. von "$\neg$")
3. $\vdash [\bot \equiv \bot] \equiv \neg\bot$	(mit $T5.1$)
4. $\vdash \neg\bot$	$(R\ 3, 1)$

Formeln mit Disjunktionen ("$\vee$") und materialen Implikationen ("$\rightarrow$") können unter Verwendung von $AS4$ stets so umformuliert werden, dass sie nur noch Negationen, Konjunktionen, und materiale Äquivalenzen (= Identität zwischen Wahrheitswerten) enthalten und daher im Beweis nicht eigens berücksichtigt werden müssen. Für den Induktionsschritt müssen also nur die folgenden drei Typen von PAFs betrachtet, werden:

(a) $\neg\beta$

(b) $\beta \wedge \gamma$

(c) $\beta \equiv \gamma$

Da die Teilformeln β und γ selbst PAFs sind, erfüllen sie jeweils die Induktionsvoraussetzung. Angesichts der Korrektheit des Axiomensystems muss also nur sichergestellt werden, dass (a)-(c) für alle gültigen Möglichkeiten der Verteilung der Wahrheitswerte auf β und γ ableitbar sind:

(a^+) $\neg\neg\top$

(a^-) $\neg\bot$

(b^{++}) $\top \wedge \top$

(b^{+-}) $\neg[\top \wedge \bot]$

(b^{-+}) $\neg[\bot \wedge \top]$

(b^{--}) $\neg[\bot \wedge \bot]$

(c^{++}) $\top \equiv \top$

(c^{+-}) $\neg[\top \equiv \bot]$

(c^{-+}) $\neg[\bot \equiv \top]$

(c^{--}) $\bot \equiv \bot$

Denn wenn z.B. $\alpha = [\beta \wedge \gamma]$, gilt nach Induktionsvoraussetzung: entweder: $(+_\beta) \vdash \beta$ oder $(-_\beta) \vdash \neg\beta$ und außerdem: entweder $(+_\gamma) \vdash \gamma$ oder $(-_\gamma) \vdash \neg\gamma$. Für den Fall $(+_\beta +_\gamma)$ kann man dann (wegen $T7$ und $T5.1$) nacheinander die beiden $\top$ in (b^{++}) durch β und γ ersetzen; in den anderen drei Fällen und bei den anderen Junktoren geht man ähnlich vor. Der Nachweis der Formeln (a$^+$)–(c^{--}) ist rasch erbracht:

- (a$^+$) ergibt sich wie folgt:

1.	$\vdash \neg\neg\top \equiv [\bot \equiv \neg\top]$	($AS4$ mit der Def. von "$\neg$")
2.	$\vdash \neg\top \equiv [\bot \equiv \top]$	($AS4$ mit der Def. von "$\neg$")
3.	$\vdash \neg\neg\top \equiv [\bot \equiv \neg[\bot \equiv \top]]$	(R 2, 1)
4.	$\vdash \neg[\bot \equiv \top] \equiv [\bot \equiv [\bot \equiv \top]]$	($AS4$ mit der Def. von "$\neg$")
5.	$\vdash \neg\neg\top \equiv [\bot \equiv [\bot \equiv [\bot \equiv \top]]]$	(R 4, 3)
6.	$\vdash [\bot \equiv \top] \equiv \bot$	($T7$)
7.	$\vdash \neg\neg\top \equiv [\bot \equiv [\bot \equiv \top]]$	(R 6, 5)
8.	$\vdash \neg\neg\top \equiv [\bot \equiv \top]$	(R 6, 7)
9.	$\vdash \neg\neg\top \equiv \top$	(R 6, 8)
10.	$\vdash \top \equiv \neg\neg\top$	(mit $T5.1$ aus 9)
11.	$\vdash \top$	($T7$)
12.	$\vdash \neg\neg\top$	(R 10, 11)

- (a$^-$) wurde schon im Induktionsanfang nachgewiesen.
- (b^{++}) ist $T6$.
- (b^{+-}) folgt aus $T16$, $T5.1$, $AS4$ und der Def. von "$\neg$".
- (b^{-+}) und (b^{--}) ergeben sich mit $T10$ aus dem folgenden Beweis von "$\neg[\bot \wedge x^t]$":

1.	$\vdash [\bot \wedge x^t] \equiv \bot$	($T22$, nach Def. von "$\rightarrow$")
2.	$\vdash \bot \equiv [\bot \wedge x^t]$	(mit $T5.1$ aus 1)
3.	$\vdash [\bot \equiv [\bot \wedge x^t]] \equiv \neg[\bot \wedge x]$	($AS4$ mit der Def. von "$\neg$" sowie $T5.1$)
4.	$\vdash \neg[\bot \wedge x^t]$	(R 3, 2)

- (c^{++}) ist eine Instanz von $T1$.
- (c^{-+}) [*sic!*] kriegt man so:

1. $\vdash \neg[\bot \equiv \top] \equiv [\bot \equiv [\bot \equiv \top]]$ ($AS4$ mit der Def. von "$\neg$")
2. $\vdash [\bot \equiv [\bot \equiv \top]] \equiv [\bot \equiv \bot]$ ($T7$)
3. $\vdash [\bot \equiv \bot] \equiv \neg[\bot \equiv \top]$ (aus 1 und 2 mit $T5$)
4. $\vdash \bot \equiv \bot$ ($T1$)
5. $\vdash \neg[\bot \equiv \top]$ ($R\ 4,3$)

- (c^{+-}) folgt mit $T5.1$ aus (c^{-+}).
- (c^{--}) ist wieder eine Instanz von $T1$.

Dies schließt die Induktion über den Aufbau von α (bei $n = 0$) ab. Wir kommen nun zum Schluss des Beweises, dem Induktionsschritt von n nach $n + 1$.
<u>Induktionsschritt</u>: $n > 0$. Angenommen, α ist eine Tautologie mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n (\in Var_t)$. Dann gilt insbesondere:

$$\vDash \alpha[{}^{x_n}/_{\top}]$$

und $$\vDash \alpha[{}^{x_n}/_{\bot}]\ ,$$

wobei $\alpha[{}^{x_n}/_{\beta}]$ die Ersetzung aller freien Vorkommen x_n in α durch β ist. Da $\alpha[{}^{x_n}/_{\top}]$ und $\alpha[{}^{x_n}/_{\bot}]$ $n-1$ freie Variablen haben, gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$$\vdash \alpha[{}^{x_n}/_{\top}]$$

und $$\vdash \alpha[{}^{x_n}/_{\bot}]\ ,$$

Was aber nach $T15$ impliziert:
$\vdash \alpha$.
$T23$ ist somit endlich bewiesen.

<u>**Aufgabe:**</u> (xii) Man zeige:
<u>$T24$:</u> $\vdash \alpha$, falls α tautologisch ist.

Als nächstes weisen wir einige quantorenlogische Eigenschaften der Axiomatisierung nach, da wir diese bei der Henkinisierung ständig benutzen müssen.

<u>$T25$:</u> $\vdash [\forall x^{\tau}\alpha] \to \alpha[{}^{x}/_{\beta}]$, wobei β die Bedingungen (a) bis (c) in $AS4$ erfüllt.
<u>Beweis:</u>

1. $\vdash [[\lambda x^{\tau}\alpha] \equiv [\lambda x \top]] \to [[\lambda x \alpha](\beta) \equiv [\lambda x \top](\beta)]$ (mit $T21$ und $T10$)
2. $\vdash \forall x^{\tau}\alpha \to [\alpha[{}^{x}/_{\beta}] \equiv \top]$ (mit $AS4$ und Def. "$\forall$")
3. $\vdash \forall x^{\tau}\alpha \to \alpha[{}^{x}/_{\beta}]$ (mit $T7$).

$\underline{T26:}$ $\vdash \alpha[{}^{x^\tau}/_\beta] \rightarrow \exists x\alpha$, wobei β wie in $T25$ ist.[21]

Beweis:

1. $\vdash \forall x^\tau \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha[{}^{x}/_\beta]$ $\quad (T25)$
2. $\vdash [\forall x^\tau \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha[{}^{x}/_\beta]] \equiv [\alpha[{}^{x}/_\beta] \rightarrow \neg\forall x\neg\alpha]$ $\quad$ (mit $T24$)
3. $\vdash \alpha[{}^{x^\tau}/_\beta] \rightarrow \neg\forall x\neg\alpha$ $\quad (R\ 2,1)$
4. $\vdash \alpha[{}^{x^\tau}/_\beta] \rightarrow \exists x\alpha$ $\quad$ (mit $AS4$ und Def. "$\exists$")

$\underline{T27:}$ $\vdash \exists x^t x$.

Beweis:

1. $\vdash \top$ $\quad (T2)$
2. $\vdash \top \rightarrow \exists x^t x$ $\quad (T26)$
3. $\vdash \exists x^t x$ $\quad$ (wegen $T19$)

$\underline{T28:}$ $\vdash \exists x^t \neg x$.

Beweis:

1. $\vdash \bot \equiv \bot$ $\quad (T1)$
2. $\vdash \neg\bot$ $\quad$ (mit $AS4$)
3. $\vdash \neg\bot \rightarrow \exists x^t \neg x$ $\quad (T26)$
4. $\vdash \exists x^t \neg x$ $\quad$ (wegen $T19$)

$\underline{T29:}$ $\vdash \exists x[\alpha \equiv x]$, falls x nicht frei vorkommt in α.

Beweis:

1. $\vdash \alpha \equiv \alpha$ $\quad (T1)$
2. $\vdash [\alpha \equiv \alpha] \rightarrow \exists x[\alpha \equiv x]$ $\quad (T26)$
3. $\vdash \exists x[\alpha \equiv x]$ $\quad$ (wegen $T19$)

$\underline{T30:}$ $\vdash \forall x[\alpha \rightarrow \beta] \rightarrow [\alpha \rightarrow \forall x\beta]$, falls x nicht frei vorkommt in α.

[21] Dabei ist der Existenzquantor definiert durch: "$\exists x\alpha$" = "$\neg\forall x\neg\alpha$".

Beweis:

1. $\vdash \forall x[\alpha \to \beta] \to [\alpha \to \forall x\beta]$
   $\equiv [\alpha \wedge \exists x \neg\beta] \to \exists x[\alpha \wedge \neg\beta]$ (mit $T24$ und Def. "$\exists$")
2. $\vdash [\alpha \equiv \top] \to [[\lambda y^t \exists x[y \wedge \neg\beta]](\alpha) \equiv [\lambda y \exists x[y \wedge \neg\beta]](\top)]$ (aus $T20$ mit $T10$)
3. $\vdash [\alpha \equiv \top] \to [\exists x[\alpha \wedge \neg\beta] \equiv \exists x[\top \wedge \neg\beta]]$ (mit $AS4$)[22]
4. $\vdash \alpha \to [\exists x[\alpha \wedge \neg\beta] \equiv \exists x \neg\beta]$ (mit $T24$)
5. $\vdash [\alpha \to [\exists x[\alpha \wedge \neg\beta] \equiv \exists x \neg\beta]] \to [[\alpha \wedge \exists x \neg\beta] \to \exists x[\alpha \wedge \neg\beta]]$ ($T24$)
6. $\vdash [\alpha \wedge \exists x \neg\beta] \to \exists x[\alpha \wedge \neg\beta]$ (wegen $T19$)
7. $\vdash \forall x[\alpha \to \beta] \to [\alpha \to \forall x\beta]$ (R 1,6)

Es folgen jetzt ein paar identitätslogische Theoreme, von denen wir einige praktisch schon benutzt haben, z.B. beim vorhergehenden Beweis in den Schritten 2. und 3. Der Vollständigkeit halber schreiben wir diese Prinzipien noch einmal in ihrer allgemeinen Form auf:

$T31$: $\vdash [\beta \equiv \gamma] \to [\alpha[{}^x/_\beta] \equiv \alpha[{}^x/_\gamma]]$, wobei β und γ die Bedingungen erfüllen, die β in $AS4$ erfüllt.
Beweis:

1. $\vdash [\beta \equiv \gamma] \to [[\lambda x\alpha](\beta) \equiv [\lambda x\alpha](\gamma)]$ (mit $T20$ und $T10$)
2. $\vdash [\beta \equiv \gamma] \to [\alpha[{}^x/_\beta] \equiv \alpha[{}^x/_\gamma]]$ (mit $AS4$)

$T32$: $\vdash [\beta \equiv \gamma] \to [\alpha(\beta) \equiv \alpha(\gamma)]$
Beweis:
mit $T20$ und $T10$.

$T33$: $\vdash [\alpha \equiv \beta] \to [\alpha(\gamma^\sigma) \equiv \beta(\gamma)]$
Beweis:
mit $T21$ und $T10$.

$T34$: $\vdash [\alpha \equiv \beta] \to [\check{}\alpha \equiv \check{}\beta]$
Beweis:
s. $T31$.

$T34$ ist übrigens das erste Theorem, das auf die Intensionalität von IL eingeht, wenn auch in recht trivialer Weise. Es ist natürlich das Intensionale Gegenstück zu T33. Wir werden nachher noch mehr Eigenschaften der Axiomatisierung nachweisen, die auf Intensionen Bezug nehmen. Zuvor jedoch noch zwei identitätslogische Trivialitäten:

[22] Hier geht die Bedingung ein, dass x in α nicht frei vorkommt.

$\underline{T35:}$ $\vdash [\alpha \equiv \beta] \rightarrow [\beta \equiv \alpha]$.

Beweis:

1. $\vdash [\alpha \equiv \beta] \rightarrow [[\beta \equiv \alpha] \equiv [\beta \equiv \beta]]$ ($T31$)
2. $\vdash [\alpha \equiv \beta] \rightarrow [[\beta \equiv \alpha] \equiv \top]$ (mit $T1$, $T2$ und R)
3. $\vdash [\alpha \equiv \beta] \rightarrow [\beta \equiv \alpha]$ (mit $T7$)

$\underline{T36}$ $\vdash [\alpha \equiv \beta] \rightarrow [[\beta \equiv \gamma] \rightarrow [\alpha \equiv \gamma]]$.

Beweis:

1. $\vdash [\alpha \equiv \beta] \rightarrow [[\alpha \equiv \gamma] \equiv [\beta \equiv \gamma]]$ ($T31$)
2. $\vdash [[\alpha \equiv \beta] \rightarrow [[\alpha \equiv \gamma] \equiv [\beta \equiv \gamma]]]$
   $\rightarrow [[\alpha \equiv \beta] \rightarrow [[\beta \equiv \gamma] \rightarrow [\alpha \equiv \gamma]]]$ ($T24$)
3. $\vdash [\alpha \equiv \beta] \rightarrow [[\beta \equiv \gamma] \rightarrow [\alpha \equiv \gamma]]$ (wegen $T19$)

Jetzt kommen also einige intensional-logische Eigenschaften der Axiomatisierung; die meisten von ihnen betreffen die Modaloperatoren.

$\underline{T37}$ $\vdash [\beta \mathrel{≣} \gamma] \rightarrow [\alpha[{}^{x}/_{\beta}] \equiv \alpha[{}^{x}/_{\gamma}]]$, falls es kein freies Vorkommen von x in α gibt, das in einem Teil $\lambda z \gamma$ liegt, wobei z frei vorkommt in β oder γ.[23]

Beweis:

1. $\vdash [\hat{\beta} \equiv \hat{\gamma}] \rightarrow [[\lambda y^{(s,\sigma)} \alpha[{}^{x}/_{y}]](\hat{\beta})$
   $\equiv [\lambda y \alpha[{}^{x}/_{y}]](\hat{\gamma})]$[24] ($T32$)
2. $\vdash [\beta \mathrel{≣} \gamma] \rightarrow [\alpha[{}^{x}/_{\check{}\hat{}\beta}] \equiv \alpha[{}^{x}/_{\check{}\hat{}\gamma}]]$ (mit $AS4$, und Def. "$\equiv$")
3. $\vdash [\beta \mathrel{≣} \gamma] \rightarrow [\alpha[{}^{x}/_{\beta}] \equiv \alpha[{}^{x}/_{\gamma}]]$ (mit $AS6$ und R)

$\underline{T38}$ $\vdash [\alpha \mathrel{≣} \beta] \rightarrow \Box[\alpha \equiv \beta]$, fr beliebige $\alpha, \beta \in Tm_\tau$.

Beweis:

1. $\vdash \Box [\check{}f^{(s,\tau)} \equiv \check{}g^{(s,\tau)}] \equiv [f \equiv g]$ ($AS5$)
2. $\vdash \Box [\check{}\hat{}\alpha \equiv \check{}\hat{}\beta] \equiv [\alpha \mathrel{≣} \beta]$ (mit $T10$ und Def. "$≣$")
3. $\vdash \Box [\alpha \equiv \beta] \equiv [\alpha \mathrel{≣} \beta]$ (mit AS6)
4. $\vdash [\alpha \mathrel{≣} \beta] \rightarrow \Box [\alpha \equiv \beta]$ (mit $T24$ und $T19$)

[23] Es ist übrigens eine ganz nützliche Übung, sich die Gültigkeit solcher Formeln zu veranschaulichen.

[24] wobei y nicht frei vorkommt in α

$\underline{T39}$ $\vdash \alpha \to \Box\alpha$, falls $\alpha \in Tm_t$ modal geschlossen ist.
Beweis:

1. $\vdash[\alpha \equiv \top] \to [[\lambda x^t\ \hat{}x \equiv \hat{}\top](\alpha) \equiv [\lambda x\ \hat{}x \equiv \hat{}\top](\top)]$ ($T32$)
2. $\vdash[\alpha \equiv \top] \to [[\ \hat{}\alpha \equiv \hat{}\top] \equiv [\hat{}\top \equiv \hat{}\top]]$ (mit $AS4$)
3. $\vdash\alpha \to [\Box\alpha \equiv [\ \hat{}\top \equiv \hat{}\top]]$ (mit $T7$ und Def. "$\Box$")
4. $\vdash \hat{}\top \equiv \hat{}\top$ ($T1$)
5. $\vdash\alpha \to \Box\alpha$ (mit $T19$ und $T21$)

$\underline{T40}$ $\vdash \Box\alpha \to \alpha$, für beliebige $\alpha \in Tm_t$.
Beweis:

1. $\vdash[\hat{}\alpha \equiv \hat{}\top] \to [\check{}\hat{}\alpha \equiv \check{}\hat{}\top]$ ($T34$)
2. $\vdash \Box\,\alpha \to [\alpha \equiv \top]$ (mit $AS6$ und Def. "$\Box$")
3. $\vdash \Box\,\alpha \to \alpha$ (mit $T7$)

Aufgaben:
(xiii) Man zeige:

$\underline{T41:}$ $\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$

(xiv) Was waren die "extensionalen Gegenstücke" zu $T40$ und $T41$?

$\underline{T42}$ $\vdash \neg\,\Box\,\alpha \to \Box\neg\,\Box\,\alpha$.
Beweis: s. $T39$ und die Definition für "modal geschlossen".

$\underline{T43}$ $\vdash \Box[\alpha \to \beta] \to [\Box\alpha \to \Box\beta]$.
Beweis:

1. $\vdash[\alpha \equiv \top] \to [\Box[\alpha \to \beta] \equiv \Box[\top \to \beta]]$ ($T37$)
2. $\vdash[\top \to \beta] \equiv \beta$ ($T24$)
3. $\vdash \Box\,\alpha \to [\Box[\alpha \to \beta] \equiv \Box\beta]$ (R 2,1)
4. $\vdash \Box\,[\alpha \to \beta] \to [\Box\alpha \to \Box\beta]$ (mit $T24$ und $T19$)

$\underline{T44}$ Falls $\vdash \alpha$, so $\vdash \Box\alpha$.
Beweis:

1. $\vdash\alpha$ (Annahme)
2. $\vdash\top \equiv \alpha$ (mit $T7$)
3. $\vdash \Box\,\top$ ($T4$)
4. $\vdash \Box\,\alpha$ (R 2,3)

An dieser Stelle sei bemerkt, dass wir nachgewiesen haben, dass unsere Axiomatisierung eine S5-Logik liefert, was ja wohl auch wünschenswert ist; denn Leibnizmodalitäten sind ja nur ein Spezialfall von S5-Modalitäten. Die Axiomatisierung enthält S5, weil alle S5-Axiome aus ihr ableitbar sind und die S5-Schlussregeln ebenfalls gelten: was den nicht-modalen Teil angeht, zeigen dies $T24$ (Axiome) und $T19$ (Schlussregel "Modus Ponens"); die modalen S5-Axiome sind $T40$, $T43$ sowie

(5) $\Diamond\alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha$.

(5) ist aber ein Spezialfall von $T39$, da $\Diamond\alpha$ immer modal geschlossen ist. (Wieso eigentlich?) $T44$ gibt uns schließlich die Nezessitationsregel, womit wir gezeigt haben, was wir wollten.
Es folgen nun einige typische S5-Theoreme:

$\underline{T45}$ $\vdash \neg \Box \alpha \equiv \Diamond\neg\alpha$.
Beweis:

1. $\vdash\neg \Box \alpha \equiv \neg\neg \Diamond \neg\alpha$ $\quad (T1)$[25]
2. $\vdash\neg\neg \Diamond \neg\alpha \equiv \Diamond\neg\alpha$ $\quad$ (mit $T24$)
3. $\vdash\neg \Box \alpha \equiv \Diamond\neg\alpha$ $\quad (R\ 2,1)$

$\underline{T46}$ $\neg \Diamond \alpha \equiv \Box\neg\alpha$.
Beweis:

1. $\vdash\neg \Diamond \alpha \equiv \neg\neg \Box \neg\alpha$ $\quad (T1)$[25]
2. $\vdash\neg \Diamond \alpha \equiv \Box\neg\alpha$ $\quad$ (mit $T24$)

$\underline{T47}$ $\vdash \Box \Diamond \alpha \equiv \Diamond\alpha$.
Beweis:

1. $\vdash \Box \Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ $\quad (T40)$
2. $\vdash \Diamond \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha$ $\quad (T39)$
3. $\vdash \Box \Diamond\alpha \equiv \Diamond\alpha$ $\quad$ (mit $T24$)

$\underline{T48}$ $\vdash \Box \Box \alpha \equiv \Box\alpha$.
Beweis:
analog zu $T47$

[25]Man beachte hier die Definition von "$\Diamond$"!

$\underline{T49}$ $\vdash \Diamond \Box \alpha \equiv \Box\alpha$.

Beweis:

1. $\vdash\neg \Box \alpha \rightarrow \Box\neg \Box \alpha$ $(T39)$
2. $\vdash \Box \neg \Box \alpha \rightarrow \neg \Box \alpha$ $(T40)$
3. $\vdash \Box \neg \Box \alpha \equiv \neg \Box \alpha$ (mit $T24$)
4. $\vdash \Box \neg \Box \alpha \equiv \neg \Diamond \Box\alpha$ (mit $T46$)
5. $\vdash\neg \Box \alpha \equiv \neg \Diamond \Box\alpha$ $(R\ 3,4)$
6. $\vdash \Diamond \Box\alpha \equiv \Box\alpha$ (mit $T24$)

$\underline{T50}$ $\vdash \Diamond \Diamond \alpha \equiv \Diamond\alpha$.

Beweis:

analog zu $T49$

$\underline{T51}$ $\vdash \Box[\alpha \wedge \beta] \equiv \Box\alpha \wedge \Box\beta$.

Beweis:

1. $\vdash[\alpha \wedge \beta] \rightarrow \alpha$ $(T24)$
2. $\vdash \Box\,[[\alpha \wedge \beta] \rightarrow \alpha]$ (mit $T4$)
3. $\vdash \Box\,[[\alpha \wedge \beta] \rightarrow \alpha] \rightarrow [\Box[\alpha \wedge \beta] \rightarrow \Box\alpha]$ $(T43)$
4. $\vdash \Box\,[\alpha \wedge \beta] \rightarrow \Box\alpha$ (mit $T19$)
5. $\vdash \Box\,[\alpha \wedge \beta] \rightarrow \Box\beta$ (analog)
6. $\vdash \Box\,[\alpha \wedge \beta] \rightarrow [\Box\alpha \wedge \Box\beta]$ (mit $T24$ und $T19$)

Aus der Definition der Junktoren und Modaloperatoren ergibt sich aus $T51$ unmittelbar:

$\underline{T52}$ $\vdash [\alpha \vee \beta] \equiv \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$.

$\underline{T53}$ $\vdash [\Box\alpha \vee \Box\beta] \rightarrow \Box[\alpha \vee \beta]$.

Beweis:

1. $\vdash \Box\, \alpha \rightarrow [\Box[\alpha \vee \beta] \equiv \Box[\top \vee \beta]]$ (mit $T37$ und Def. “$\Box$”)
2. $\vdash \Box\,[\top \vee \beta]$ (mit $T24$ und $T44$)
3. $\vdash \Box\, \beta \rightarrow [\Box[\alpha \vee \beta] \equiv \Box[\alpha \vee \top]]$ (mit $T37$ und Def. “$\Box$”)
4. $\vdash \Box\,[\alpha \vee \top]$ (mit $T24$ und $T7$)
5. $\vdash[\Box\alpha \vee \Box\beta] \rightarrow \Box[\alpha \vee \beta]$ (mit $T24$ und $T19$)

$\underline{T54}$ $\vdash \Diamond[\alpha \wedge \beta] \rightarrow [\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta]$.

Beweis:

mit der Definition von “$\Diamond$” und $T53$.

$\underline{T55}$ $\vdash \Box[\alpha \to \beta] \to [\Diamond\alpha \to \Diamond\beta]$.
<u>Beweis:</u>

1. $\vdash \Box\,[\neg\beta \to \neg\alpha] \to [\Box\neg\beta \to \Box\neg\alpha]$ ($T43$)
2. $\vdash \Box\,[\alpha \to \beta] \to [\neg\Diamond\,\beta \to \neg\Diamond\,\alpha]$ (mit $T46$)
3. $\vdash \Box\,[\alpha \to \beta] \to [\Diamond\alpha \to \Diamond\beta]$ (mit $T24$)

Wir kommen nun zu einem zentralen Theorem der Axiomatisierung, nämlich der sogenannten *Barcanschen Formel*:

$\underline{T56}$ $\vdash \Box\forall x\alpha \equiv \forall x \Box\,\alpha$.
<u>Beweis:</u>

1. $\vdash \forall x\alpha \to \alpha$ ($T25$)
2. $\vdash \Box\,[\forall x\alpha \to \alpha]$ (mit $T44$)
3. $\vdash \Box\,[\forall x\alpha \to \alpha] \to [\Box\forall x\alpha \to \Box\alpha]$ ($T43$)
4. $\vdash \forall x[\Box\forall x\alpha \to \Box\alpha]$ (mit $T19$ und $T8$)
5. $\vdash \forall x[\Box\forall x\alpha \to \Box\alpha] \to [\Box\forall x\alpha \to \forall x\,\Box\,\alpha]$ ($T30$)
6. $\vdash \Box\,\forall x\alpha \to \forall x\,\Box\,\alpha$ (mit $T19$)
7. $\vdash \forall x\,\Box\,\alpha \to \Box\alpha$ ($T25$)
8. $\vdash \Box\,\alpha \to \alpha$ ($T40$)
9. $\vdash \forall x\,\Box\,\alpha \to \alpha$ (mit $T19$)
10. $\vdash \forall x[\forall x\,\Box\,\alpha \to \alpha]$ (mit $T8$)
11. $\vdash \forall x[\forall x\,\Box\,\alpha \to \alpha] \to [\forall x\,\Box\,\alpha \to \forall x\alpha]$ ($T30$)
12. $\vdash \forall x\,\Box\,\alpha \to \forall x\alpha$ (mit $T19$)
13. $\vdash \Box\,[\forall x\,\Box\,\alpha \to \forall x\alpha]$ (mit $T44$)
14. $\vdash \Box\,[\forall x\,\Box\,\alpha \to \forall x\alpha] \to [\Box\forall x\,\Box\,\alpha \to \Box\forall x\alpha]$ ($T43$)
15. $\vdash \Box\,\forall x\,\Box\,\alpha \to \Box\forall x\alpha$ (mit $T19$)
16. $\vdash \Box\,\forall x\,\Box\,\alpha \to \forall x\,\Box\,\alpha$ ($T40$)
17. $\vdash \forall x\,\Box\,\alpha \to \Box\forall x\,\Box\,\alpha$ ($T39$)
18. $\vdash \Box\,\forall x\,\Box\,\alpha \equiv \forall x\,\Box\,\alpha$ (mit $T24$)
19. $\vdash \forall x\,\Box\,\alpha \to \Box\forall x\alpha$ (R $18, 17$)
20. $\vdash [\Box\forall x\alpha \to \forall x\,\Box\,\alpha] \wedge [\forall x\,\Box\,\alpha \to \Box\forall x\alpha]$ (aus 6 und 19 mit $T11$)
21. $\vdash \Box\,\forall x\alpha \equiv \forall x\,\Box\,\alpha$ (mit $T24$)

Aus $T56$ ergibt sich praktisch unmittelbar (mit $T24$ und $T45$) die folgende duale Version der Barcanschen Formel, deren Beweis wir hier weglassen:

$\underline{T57}$ $\vdash \Diamond\exists x\alpha \equiv \exists x \Diamond \alpha$.

Beim nächsten Theorem haben wir uns (ähnlich wie bei $T56$) damit abzuplagen, dass wir das (korrekte) extensionale Analogon von $T43$ nicht bewiesen haben, sondern nur das "schwächere" $T30$.[26] Der Beweis muss deswegen einen kleinen Umweg machen:

$\underline{T58}$ $\vdash \exists x \Box \alpha \to \Box\exists x\alpha$.

Beweis:

1. $\vdash\forall x\neg\alpha \to \neg\alpha$ $\quad$ ($T25$)
2. $\vdash\neg\alpha \to \Diamond\neg\alpha$ $\quad$ ($T41$)
3. $\vdash\neg\alpha \to \neg\Box\alpha$ $\quad$ (mit $T45$)
4. $\vdash\forall x\neg\alpha \to \neg\Box\alpha$ $\quad$ (mit $T24$ und $T19$)
5. $\vdash\forall x[\forall x\neg\alpha \to \neg\Box\alpha]$ $\quad$ (mit $T8$)
6. $\vdash\forall x[\forall x\neg\alpha \to \neg\Box\alpha] \to [\forall x\neg\alpha \to \forall x\neg\Box\alpha]$ $\quad$ ($T30$)
7. $\vdash\forall x\neg\alpha \to \forall x\neg\Box\alpha$ $\quad$ (mit $T19$)
8. $\vdash\neg\neg\forall x\neg\alpha \to \neg\exists x\Box\alpha$ $\quad$ (mit $T24$ und Def. "$\exists$")
9. $\vdash\exists x\Box\alpha \to \exists x\alpha$ $\quad$ (mit $T24$ und Def. "$\exists$")
10. $\vdash\Box[\exists x\Box\alpha \to \exists x\alpha]$ $\quad$ (mit $T44$)
11. $\vdash\Box[\exists x\Box\alpha \to \exists x\alpha] \to [\Box\exists x\Box\alpha \to \Box\exists x\alpha]$ $\quad$ ($T43$)
12. $\vdash\Box\exists x\Box\alpha \to \Box\exists x\alpha$ $\quad$ (mit $T19$)
13. $\vdash\Box\exists x\Box\alpha \equiv \exists x\Box\alpha$ $\quad$ (mit $T39$, $T40$ und $T24$)
14. $\vdash\exists x\Box\alpha \to \Box\exists x\alpha$ $\quad$ (R $13, 12$)

Wie bei der Barcanschen Formel ergibt sich auch aus $T58$ unmittelbar die folgende Variante, die wir nicht erst zu beweisen brauchen:

$\underline{T59}$ $\vdash \Diamond\forall x\alpha \to \forall x \Diamond \alpha$.

Die nächsten drei Theoreme sind mehr oder weniger triviale Folgerungen aus den Axiomen bzw. aus dem, was wir bereits gezeigt haben.

$\underline{T60}$ $\vdash \Box[\check{}f^{(s,\tau)} \equiv \check{}g^{(s,\tau)}] \equiv [f \equiv g]$

Beweis:

folgt unmittelbar aus $A5$ und $T10$.

[26]Der Grund dafür ist einfach, dass wir uns strikt an die "Metatheorem"-Liste von Gallin (IIHM, S21-24) halten!

<u>$T61$</u> $\vdash \Box[\alpha \equiv \beta] \rightarrow [\alpha \mathrel{\underline{\equiv}} \beta]$.

<u>Beweis:</u>

1. $\vdash \Box\, [\, {}^{\vee\wedge}\alpha \equiv {}^{\vee\wedge}\beta] \equiv [\, {}^{\wedge}\alpha \equiv {}^{\wedge}\beta]$ (mit $T10$ aus $T60$)
2. $\vdash \Box\, [\alpha \equiv \beta] \equiv [\alpha \mathrel{\underline{\equiv}} \beta]$ (mit $AS6$)
3. $\vdash \Box\, [\alpha \equiv \beta] \rightarrow [\alpha \mathrel{\underline{\equiv}} \beta]$ (mit $T24$ und $T19$)

<u>$T62$</u> $\vdash [\, {}^{\wedge}\!\equiv f^{(s,\tau)}] \rightarrow \Box[\alpha \equiv {}^{\vee}\!f]$, für $f \in Var_{(s,\tau)}$.

<u>Beweis:</u>

1. $\vdash [\, {}^{\wedge}\alpha \equiv f^{(s,\tau)}] \rightarrow [\equiv {}^{\vee}\!f]$ (mit $AS6$ und $T34$)
2. $\vdash \Box\, [[\, {}^{\wedge}\!\equiv f^{(s,\tau)}] \rightarrow [\equiv {}^{\vee}\!f]]$ (wegen $T44$)
3. $\vdash \Box\, [\, {}^{\wedge}\!\equiv f^{(s,\tau)}] \equiv [\, {}^{\wedge}\!\equiv f]$ (mit $T39$, $T40$ und $T24$)
4. $\vdash \Box\, [[\, {}^{\wedge}\!\equiv f^{(s,\tau)}] \rightarrow [\equiv {}^{\vee}\!f]]$
   $\rightarrow [\Box[\, {}^{\wedge}\!\equiv f^{(s,\tau)}] \rightarrow \Box[\equiv {}^{\vee}\!f]]$ ($T43$)
5. $\vdash \Box\, [\, {}^{\wedge}\!\equiv f^{(s,\tau)}] \rightarrow \Box[\equiv {}^{\vee}\!f]$ (mit $T19$)
6. $\vdash [\, {}^{\wedge}\!\equiv f^{(s,\tau)}] \rightarrow \Box[\equiv {}^{\vee}\!f]$ ($R\ 3,5$)

<u>**Aufgabe:**</u>

(xv) Für das Folgende seien Γ und Δ beliebige *IL*-Formelmengen (also Teilmengen von Tm_t). Beweisen Sie die nächsten fünf, einfachen Eigenschaften unserer Axiomatisierung:

<u>$T63$</u> Falls $\alpha \in \Gamma$, so $\Gamma \vdash \alpha$.

<u>$T64$</u> Falls $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \subseteq \Delta$, so $\Delta \vdash \alpha$.

<u>$T65$</u> Falls α, so $\Gamma \vdash \alpha$.

<u>$T66$</u> Falls $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, so $\Gamma \vdash \beta$.

<u>$T67$</u> Falls $\Gamma \vdash \alpha$ und $x \in Var_\tau$ in keinem $\beta \in \Gamma$ frei vorkommt, so $\Gamma \vdash \forall x\alpha$.

Es folgt das Deduktionstheorem; der Beweis ist standardmäßig.[27]

[27]Hätten wir den Ableitungsbegriff analog zum Gültigkeitsbegriff definiert, wäre das Deduktionstheorem in dieser starken Form nicht gültig, sondern nur für geschlossene und modal geschlossene Formeln. Wir brauchen es aber in der hier dargestellten Form.

$\underline{T68}$ Sei $\Gamma \subseteq Tm_t$. Dann gilt: $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gdw. $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Beweis:

Sei zunächst β aus $\Gamma \cup \{\alpha\}$ ableitbar. Dann gilt: $\vdash [\gamma_1 \to [\gamma_2 \to \dots \to [\gamma_k \to \beta]...]]$ für gewisse $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma \cup \{\alpha\}$. Ist α unter den γ_i, so können wir (wegen $T24$) schließen: $\vdash [\delta_1 \to \dots \to \delta_m \to [\alpha \to \beta] \dots]$, wobei $\delta_1 \dots \delta_m$, die von α verschiedenen γ_i sind. Ist α nicht unter den γ_i's, kann man die Prämisse um α verstärken (ebenfalls wegen $T24$). In beiden Fällen erhalten wir einen Beweis für $\alpha \to \beta$ aus Prämissen, die nur aus Γ stammen; d.h. $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Umgekehrt impliziert $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ wiederum, dass es $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$ gibt mit $\vdash [\gamma_1 \to [\gamma_2 \to \dots \to [\gamma_k \to [\alpha \to \beta]...]]]$, was definitionsgemäß bedeutet, dass $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Der Beweis des letzten Theorems sei dem Leser überlassen:

$\underline{T69}$ $\Gamma \vdash \alpha$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ inkonsistent ist.

Damit hat die Rechnerei ein Ende. Wir wenden uns jetzt der bereits im zweiten Abschnitt skizzierten Henkinisierung zu.

6 Henkinisierung in *IL*: Die Konstruktion im Detail

Fassen wir noch einmal stichpunktartig zusammen, was unsere Vorüberlegungen aus Abschnitt 2 ergeben haben:

(1) Um die "Zeugenabgeschlossenheit" auch für den Möglichkeitsoperator zu garantieren, müssen wir eine widerspruchsfreie Formelmenge Σ in eine Matrix $(\Sigma^i_j)_{i,j\in\omega}$ einbetten. Dabei wird jedes $\bigcup_{j\in\omega} \Sigma^i_j$ eine maximal widerspruchsfreie Menge sein.

(2) Um zu garantieren, dass die $\bigcup_{j\in\omega} \Sigma^i_j$ auch untereinander verträglich sind, muss der Begriff der Widersprüchlichkeit auf Familien von Formelmengen verallgemeinert werden.

Um das Beweisverfahren zu vereinfachen, werden wir uns noch eine dritte Anforderung an die Henkinisierung stellen, die jetzt erläutert werden soll: normalerweise erweitert man ja die Sprache um (abzählbar unendlich viele) Konstanten, die dann als Zeugen fungieren. Dadurch wird garantiert, dass uns während der Henkinisierung nicht die Zeugen ausgehen. Im Falle von *IL* wird sich dieses Vorgehen als nicht sehr zweckmäßig erweisen, da nämlich die Konstanten einer Kategorie τ praktisch so interpretiert werden, als gehörten sie der Kategorie (s, τ) an; dies haben ja die Überlegungen des 1. Abschnittes gezeigt. Es wäre von daher also günstiger (wenn auch nicht unbedingt notwendig), anstatt Konstanten einfach Variablen als Zeugen zu nehmen; das werden wir dann auch tun.[28] Außerdem werden wir auch keine neuen Variablen hinzunehemen, sondern vor der Henkinisierung

[28]Genau dies wird uns allerdings bei der Konstruktion des Termmodells etwas in Verlegenheit bringen.

einer Menge Σ sicherstellen, dass es genügend Variablen gibt, die in Σ nicht vorkommen. Die folgende Aufgabe zeigt, dass dies immer möglich ist:

Aufgabe: (xvii) Sei $\Sigma \subseteq Tm_t$. Für jedes $\alpha \in \Sigma$ sei α^* das Ergebnis der (simultanen) Ersetzung jedes freien Vorkommens einer Variablen x_n^τ durch x_{2n}^τ. Sei $\Sigma^* = \{\alpha^* : \alpha \in \Sigma\}$. Zu zeigen ist:

Σ ist widerspruchsfrei gdw. Σ^* widerspruchsfrei ist.

Im folgenden werden wir von einer festen Menge $\Sigma \subseteq Tm_t$ augehen, für die $\Sigma = \Sigma^*$; Aufgabe (xvii) hat gezeigt, dass dies nichts ändert.
Machen wir uns nun daran, den Begriff der Widerspruchsfreiheit zu verallgemeinern, um so Vorüberlegung (2) gerecht zu werden: da wir die Matrix $(\Sigma_j^i)_{i,j\in\omega}$ durch Induktion über den unteren Index definieren wollen, werden wir bei jedem Schritt eine Folge $(\Sigma_j^i)_{i\in\omega}$ von Formelmengen haben. Diese Folge soll nun so sein, dass jedes einzelne Σ_j^i "in sich" konsistent ist und außerdem in den anderen $\Sigma_j^{i'}$ nicht etwas ausgesagt wird, das Σ_j^i widerspricht. Es soll alles, was in Σ_j^i ausgesagt wird, möglich sein und zugleich auch alles, was z.B. in $\Sigma_j^{i'}$ ausgesagt wird. Insbesondere also:

(3) $\quad \Diamond \bigwedge \Sigma_j^i \wedge \Diamond \bigwedge \Sigma_j^{i'}$

wobei einmal angenommen sei, dass Σ_j^i und $\Sigma_j^{i'}$ endlich sind.[29] Dann wären nämlich die in Abschnitt 2 angedeuteten Schwierigkeiten umgangen. Da wir natürlich nicht immer voraussetzen können, dass die Σ_j^i endlich sind, können wir die Konsistenz von so etwas wie (3) immer nur für beliebige endliche Teilmengen von Σ_j^i bzw. $\Sigma_j^{i'}$ fordern. Dies führt uns zu den folgenden Definitionen:

(4) Sei $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ eine Familie von Formelmengen. $(\Delta^i)_{i\in\omega}$ ist eine endliche Teilfamilie von $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ gdw. gilt: falls $i \in \omega$, so ist Δ^i endlich und $\Delta^i \subseteq \Sigma^i$

(5) Eine Familie $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ von Formelmengen heißt konsistent (widerspruchsfrei) gdw. gilt: für jede endliche Teilfamilie $(\Delta^i)_{i\in\omega}$ von $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ ist

$$\{\Diamond \bigwedge \Delta^i : i \in \omega\}$$

widerspruchsfrei (im Sinne von Def. (12) von Abschnitt 4.)

Aufgaben:
(xviii) Sei $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ eine Familie von Formelmengen, $n \in \omega$, $\Sigma^j = \varnothing$ für $j \neq n$. Man zeige:

$$(\Sigma^i)_{i\in\omega} \text{ ist widerspruchsfrei gdw. } \Sigma^n \text{ widerspruchsfrei ist.}$$

(xix) Sei $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ eine Familie von Formelmengen mit $\Sigma^{i_1} = \Sigma^{i_2}$ für beliebige $i_1, i_2 \in \omega$. Man zeige:

$$(\Sigma^i)_{i\in\omega} \text{ ist widerspruchsfrei gdw. } \Sigma^0 \text{ widerspruchsfrei ist.}$$

[29] $\bigwedge \Sigma$ ist dann die Konjunktion über allen Elementen von Σ.

(xx) Sei α eine nicht beweisbare und widerspruchsfreie Formel.[30] Sei $\Sigma^0 = \{\alpha\}$ und $\Sigma^1 = \{\Box\neg\alpha\}$, falls $i \in \omega$ und $i \neq 0$. Man zeige:

$$(\Sigma^i)_{i\in\omega} \text{ ist nicht konsistent.}$$

Aufgabe (xx) zeigt, dass unsere Definition die im 2. Abschnitt besprochenen Hindernisse aus dem Weg geräumt hat. Bevor wir die Henkinisierung in Angriff nehmen, sei erwähnt, dass wir nicht nur eine Aufzählung von Tm_t brauchen, sondern eine von $(Tm_t \times \omega)$. Wenn wir nämlich an einen Punkt $j+1$ des Prozesses kommen, müssen wir nicht nur gucken, ob sich ein Ausdruck α_j in irgendein Σ^i_j einreihen lässt, sondern wir müssen ein bestimmtes im Auge haben; denn es kann ja sein, dass z. B. die Einreihung von α in Σ^i_j die ganze Sache inkonsistent macht, ohne dass das der Fall wäre, wenn wir α in Σ^i_j eingereiht hätten. Die folgende Definition wird bei der Formulierung dieser Forderung behilflich sein:

(6) Sei $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ eine Familie von *IL*-Formeln, $\alpha \in Tm_t$, $n \in \omega$:

$$\overline{\Sigma}^i = \begin{cases} \Sigma^i \cup \{\alpha\} & \text{, falls } i = n; \\ \Sigma^i & \text{, falls } i \neq n. \end{cases}$$

α heißt *n-verträglich mit* $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ gdw. $(\overline{\Sigma}^i)_{i\in\omega}$ widerspruchsfrei ist.

Wir betrachten also an jedem Punkt j der Henkinisierung einen Ausdruck α und eine "Welt" k und fragen uns dann, ob α k-verträglich ist mit dem, was wir bereits erhalten haben. Dabei ist zu beachten, dass k nicht gleich j sein muss, denn wir zählen *jedes einzelne* Paar $< \alpha, k > \in (Tm_t \times \omega)$ auf, um zu gewährleisten, dass für *jedes* $\alpha \in Tm_t$ und jede "Welt" $k \in \omega$ einmal die Frage gestellt wird, ob sich α "in k einreihen lässt." Würden wir das nicht tun, bekämen wir keine maximal widerspruchsfreien Mengen Σ^i! Für das folgende gehen wir also von einer festen Aufzählung $< \alpha_i, n_i >_{i\in\omega}$ aus.[31] Die Definition der Henkinisierung fällt nun nicht mehr schwer; Σ sei jetzt, wie gesagt, fest vorgegeben (und $\Sigma = \Sigma^*$).

(7) $(\Sigma^i_j)_{i,j\in\omega}$ ist die wie folgt durch Induktion über $j \in \omega$ definierte Matrix von *IL*-Formelmengen:

i. Falls $j = 0$, so ist:

$$\Sigma^i_j := \begin{cases} \Sigma & \text{, für } i = 0; \\ \varnothing & \text{, für } i \neq 0. \end{cases}$$

ii. Sei $j \geq 0$. Zur Definition von $(\Sigma^i_{j+1})_{i\in\omega}$ machen wir die folgende Fallunterscheidung:

[30] D.h. $\{\alpha\}$ ist widerspruchsfrei und $\nvdash \alpha$.

[31] Das $(Tm_t \times \omega)$ aufgezählt werden kann, sollte klar sein; hier reicht übrigens schon die Tatsache aus, dass es überhaupt *abzählbar* ist.

1. Fall: α_j ist *nicht* n_j-verträglich mit $(\Sigma^i_j)_{i\in\omega}$. Dann ist

$$(\Sigma^i_{j+1})_{i\in\omega} := (\Sigma^i_j)_{i\in\omega}.$$

2. Fall: α_j ist n_j-verträglich mit $(\Sigma^i_j)_{i\in\omega}$. Wir unterscheiden drei Unterfälle:

Unterfall A: $\alpha = [\exists x^\tau \beta]$.
Dann setzen wir:

$$\Sigma^i_{j+1} := \begin{cases} \Sigma^i_j \cup \{\alpha, \beta[{}^{x^\tau}/{}_{y^\tau}]\} & \text{, falls } i = n_j \text{, wobei } y^\tau \text{ die erste}^{32} \\ & \text{Variable der Kategorie } \tau \text{ ist, die} \\ & \text{nicht frei vorkommt in } \Sigma^i_j \text{ oder } \alpha; \\ \Sigma^i_j & \text{, falls } i \neq n_j. \end{cases}$$

Unterfall B: $\alpha = \Diamond\beta$.
Dann setzen wir:

$$\Sigma^i_{j+1} := \begin{cases} \Sigma^i_j \cup \{\beta\} & \text{, falls } i \text{ die kleinste Zahl ist, für die gilt:} \\ & \Sigma^i_j = \varnothing; \\ \Sigma^i_j \cup \{\alpha\} & \text{, falls } i = n_j; \\ \Sigma^i_j & \text{, für alle anderen } i \in \omega. \end{cases}$$

Unterfall C: A und B treffen nicht zu.
Dann setzen wir:

$$\Sigma^i_{j+1} := \begin{cases} \Sigma^i_j \cup \{\alpha\} & \text{, falls } i = n_j; \\ \Sigma^i_j & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe: (xxi) Weisen Sie (durch Induktion über $j \in \omega$) die Korrektheit der Definition (7) nach!

(8) Für $i \in \omega$ sei $\Sigma^i := \bigcup_{j\in\omega} \Sigma^i_j$.

Jetzt gilt es nachzuweisen, dass diese Konstruktion leistet, was wir uns von ihr erhoffen!

7 Eigenschaften der Henkinisierung

Stellen wir uns doch einmal die wesentlichen Forderungen, die wir an unsere Henkinisierung stellen müssen, um überhaupt hoffen zu können, ein Termmodell aufzubauen, stichpunktartig zusammen. Zunächst wollen wir natürlich, dass für jede "Welt" $i \in \omega$ eine maximal widerspruchsfreie Menge aufgebaut wird; d.h. wir haben zu zeigen:

(1) Falls $i \in \omega$, so ist Σ^i maximal widerspruchsfrei.[33]

[32] gemäß der Standardaufzählung der Variablen nach ihrem Index.

[33] d.h. Σ^i ist widerspruchsfrei und für jedes $\alpha \in Tm_t$ gilt: $\alpha \in \Sigma^i$ oder $\neg\alpha \in \Sigma^i$

Weiterhin haben wir uns überlegt, dass verschiedene Σ^i und Σ^j stets miteinander "verträglich" sein müssen:

(2) $\Sigma^i_{i\in\omega}$ ist widerspruchsfrei.

Schließlich müssen wir zeigen, dass die ganze Konstruktion "zeugenabgeschlossen" ist: wenn also ein Existenzsatz irgendwo behauptet wird, muss an irgendeiner Stelle auch eine Instanz dieser Existenzbehauptung auftreten:

(3) Falls $[\exists x^\tau \alpha] \in \Sigma^i$, so $\alpha[{}^{x^\tau}/_{y^\tau}] \in \Sigma^i$ für mindestens ein $y^\tau \in Var_\tau$.

Analog zu (3) müssen wir schließlich auch die Zeugenabgeschlossenheit gegenüber dem Möglichkeitsoperator fordern. Gemäß unseren Vorüberlegungen in Abschnitt 2 und der im letzten Abschnitt vorgeführten Konstruktion liegt es nahe, dies folgendermaßen zu formulieren:

(4) Falls $[\Diamond\alpha] \in \Sigma^i$, so $\alpha \in \Sigma^j$ für mindestens ein $j \in \omega$.

Diese vier Punkte werden wir in diesem Abschnitt alle beweisen. Sie folgen dabei im Wesentlichen aus einem einzigen, relativ technischen Lemma, das wir uns nun vorknüpfen werden:

Lemma 1: Falls $j \in \omega$, so ist $(\Sigma^i_j)_{i\in\omega}$ konsistent.

Beweis:

Wir argumentieren induktiv über j: für $j = 0$ folgt die Behauptung mit Aufgabe (xviii) unmittelbar aus der Voraussetzung, dass Σ widerspruchsfrei ist. Sei jetzt $j \geq 0$; wir betrachten $j+1$. Gemäß Definition (7) des vorangegangenen Abschnitts müssen wir hier zwei Fälle unterscheiden, von denen der erste trivial ist: ist nämlich α_j nicht n_j-verträglich mit $(\Sigma^i_j)_{i\in\omega}$, so ist $(\Sigma^i_{j+1})_{i\in\omega} = (\Sigma^i_j)_{i\in\omega}$ und die Behauptung gilt nach Induktionsvoraussetzung. Sei also α_j n_j-verträglich mit $(\Sigma^i_j)_{i\in\omega}$; wir unterscheiden wieder drei Unterfälle:

Unterfall A: $\alpha_j = \exists x^\tau \beta$.

Definitionsgemäß gilt dann:

$$\Sigma^i_{j+1} := \begin{cases} \Sigma^i_j \cup \{\alpha_j, \beta[{}^{x^\tau}/_{y^\tau}]\} & \text{, für } i = n_j; \\ \Sigma^i_j & \text{, für } i \neq n_j. \end{cases}$$

Angenommen, $(\Sigma^i_{j+1})_{i\in\omega}$ wäre widersprüchlich, dann müsste es eine endliche Teilfamilie $(\Delta^i)_{i\in\omega}$ von $(\Sigma^i_j)_{i\in\omega}$ geben, so dass gilt:

($*$) $\{\Diamond \bigwedge \Delta^i : i \neq n_j\} \cup \{\Diamond[\bigwedge \Delta^{n_j} \wedge \alpha_j \wedge \beta[{}^{x^\tau}/_{y^\tau}]]\}$ ist widersprüchlich. (Wieso eigentlich?)

Das kann aber nicht sein, was die folgende Argumentation zeigt:

($*$) gdw.: $\{\Diamond \bigwedge \Delta^i : i \neq n_j\} \vdash \neg \Diamond [\bigwedge \Delta^{n_j} \wedge \alpha_j \wedge \beta[{}^{x^\tau}/_{y^\tau}]]$, wegen $T69$;

daraus folgt: $\overline{\Delta} := \{\Diamond \bigwedge \Delta^i : i \neq n_j\} \vdash \Box\neg[\bigwedge \Delta^{n_j} \wedge \alpha_j \wedge \beta[^{x^\tau}/_{y^\tau}]]$, wegen $T46$;
daraus folgt: $\overline{\Delta} \vdash \forall y^\tau \,\Box\, \neg[\bigwedge \Delta^{n_j} \wedge \alpha_j \wedge \beta[^{x^\tau}/_{y^\tau}]]$, gemäß $T67$;
daraus folgt: $\overline{\Delta} \vdash \Box\neg\exists y^\tau[\bigwedge \Delta^{n_j} \wedge \alpha_j \wedge \beta[^{x^\tau}/_{y^\tau}]]$, mit $T56$;
mit $T24$ und $T30$ folgt daraus:

$$\overline{\Delta} \vdash \Box\neg[\bigwedge \Delta^{n_j} \wedge \alpha_j \wedge \exists y^\tau \beta[^{x^\tau}/_{y^\tau}]],$$

was wegen $T13$ und der Definition von "$\exists$" äquivalent ist zu:

$$\overline{\Delta} \vdash \Box\neg[\bigwedge \Delta^{n_j} \wedge \alpha_j \wedge \exists x^\tau \beta].$$

Aus aussagenlogischen Gründen (d.h. $T24$) gilt dann insbesondere:

$$\overline{\Delta} \vdash \Box\neg[\bigwedge \Delta^{n_j} \wedge \alpha_j].$$

Wegen $T69$ wäre dann a_j nicht n_j-verträglich, was aber unserer Generalvoraussetzung (2. Fall) widerspricht. Die Annahme, dass $(\Sigma^i_{j+1})_{i\in\omega}$ widersprüchlich ist, lässt sich also nicht halten.

Unterfall B: $\alpha_j = \Diamond\beta$.
Hier geht die Argumentation etwas schneller; nach Definition (7) des 6. Abschnitts gilt zunächst:

$$\Sigma^i_{j+1} = \begin{cases} \{\beta\} & \text{, für ein gewisses } i = i^*; \\ \Sigma^i_j \cup \{\alpha_j\} & \text{, für } i = n_j; \\ \Sigma^i_j & \text{, sonst} \end{cases}$$

Wie im obigen Fall gibt es dann eine endliche Teilfamilie $(\Delta^i)_{i\in\omega}$ von $(\Sigma^i_j)_{i\in\omega}$ mit:

$$\{\Diamond \bigwedge \Delta^i : i \neq n_j, i \neq i^*\} \cup \{\Diamond[\bigwedge \Delta^{n_j} \wedge \alpha_j] \wedge \underbrace{\Diamond\beta}_{=\alpha_j}\}$$

ist widersprüchlich.
Andererseits gilt:

$$\vdash \Diamond[\Delta^{n_j} \wedge \alpha_j] \rightarrow \Diamond\alpha_j \qquad \text{(mit } T54\text{)}$$
$$\vdash \Diamond\alpha_j \rightarrow \alpha_j \qquad (T50)^{34}.$$

Wegen $T19$ und $T24$ gilt dann auch:

$$\vdash \Diamond[\Delta^{n_j} \wedge \alpha_j] \rightarrow \alpha_j.$$

Somit wäre schon

$$\{\Diamond \bigwedge \Delta^i : i \neq n_j, i \neq i^*\} \cup \{\Diamond[\bigwedge \Sigma^{n_j} \wedge \alpha_j]\}$$

widersprüchlich, was aber widerum bedeuten würde, dass α_j nicht n_j-verträglich ist. Das kann aber nicht sein; also ist $(\Sigma^i_{j+1})_{i\in\omega}$ konsistent.

[34] Man beachte, dass $\alpha_j = \Diamond\beta$!

Unterfall C: A und B treffen nicht zu.
Dieser Restfall ist völlig trivial, weil die Bedingung, dass α_j n_j-verträglich ist, in diesem Falle besagt, dass $(\Sigma^i_{j+1})_{i\in\omega}$ konsistent ist.

Dies schließt den Beweis von Lemma 1 ab.

Aufgabe: (xxii) Zeigen Sie die nächsten vier Lemmas:

Lemma 2: $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ ist konsistent.

Lemma 3: Falls $i \in \omega$, so ist $\bigcup\limits_{j\in\omega} \Sigma^i_j$ widerspruchsfrei.

Lemma 4: Falls $\alpha \in Tm_t$ j-verträglich ist mit $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$, so ist $\alpha \in \Sigma^j$

Lemma 5: Falls $i \in \omega$ und $\Sigma^i \vdash \alpha$, so $\alpha \in \Sigma^i$.

Lemma 2 entspricht natürlich der Forderung (2) am Anfang dieses Abschnitts; Lemma 3 löst bereits die eine Hälfte von (1) ein. Gemeinsam mit Lemma 4 und 5 bekommen wir aber auch relativ einfach die Maximalität:

Lemma 6: Falls $j \in \omega$, so ist Σ^j maximal widerspruchsfrei.
Beweis:
Die Widerspruchsfreiheit haben wir ja schon wegen Lemma 2. Es bleibt also zu zeigen, dass für jedes $\alpha \in Tm_\tau$ entweder $\alpha \in \Sigma^j$ oder $\neg\alpha \in \Sigma^j$. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Wegen Lemma 4 folgt dann, dass weder α noch $\neg\alpha$ j-verträglich ist mit $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$. M.a.W.: es gibt endliche Teilfamilien $(\Delta^i_1)_{i\in\omega}$ und $(\Delta^i_2)_{i\in\omega}$ von $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$, so dass:

$$\begin{gathered}\{\Diamond \bigwedge \Delta^i_1 : i \neq j\} \cup \{\Diamond[\bigwedge \Delta^j_1 \wedge \alpha]\}\\ \text{und } \{\Diamond \bigwedge \Delta^i_2 : i \neq j\} \cup \{\Diamond[\bigwedge \Delta^j_2 \wedge \neg\alpha]\}\end{gathered}$$

widersprüchlich sind.
Sei jetzt $\Delta^i := (\Delta^i_1 \cup \Delta^i_2)$ für $i \in \omega$. Dann müsste wegen $T64$ gelten:

$$\begin{gathered}\{\Diamond \bigwedge \Delta^i : i \neq j\} \vdash \Box\neg[\bigwedge \Delta^j \wedge \alpha]\\ \text{und } \{\Diamond \bigwedge \Delta^i : i \neq j\} \vdash \Box\neg[\bigwedge \Delta^j \wedge \neg\alpha].\end{gathered}$$

Mit $T51$ folgt daraus unmittelbar:

$$\{\Diamond \bigwedge \Delta^i : i \neq j\} \vdash \Box\neg[\bigwedge \Delta^i \wedge \alpha] \wedge \neg[\bigwedge \Delta^i \wedge \neg\alpha],$$

was wegen T24 hinausluft auf:

$$\{\Diamond \bigwedge \Delta^i : i \neq j\} \vdash \Box\neg \bigwedge \Delta^j.$$

Da aber $(\Delta^i)_{i\in\omega}$ eine endliche Teilfamilie von $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ ist, hieße dies (wegen $T69$) dass $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ selbst widersprüchlich wäre, was wiederum Lemma 2 widerspricht. Unsere Annahme, dass weder α noch $\neg\alpha$ in Σ^j liegen, ließ sich also nicht halten. Das Lemma ist somit bewiesen.

Jetzt müssen wir nur noch nachweisen, dass unsere Konstruktion auch (3) und (4) erfüllt; dann haben wir alles, was wir wollten:

Lemma 7: Für jedes $i \in \omega$ und jedes $\alpha \in Tm_\tau$ gilt:

$$[\exists x^\tau \alpha] \in \Sigma^i \text{ gdw. } \alpha[x^\tau/y^\tau] \in \Sigma^i \text{ für ein } y^\tau, \text{ das frei für } x^\tau \text{ in } \alpha \text{ ist.}^{35}$$

Beweis:
Die eine Richtung ist klar: falls nämlich $\alpha[x^\tau/y^\tau] \in \Sigma^i$, so gilt wegen $T26$ auch, dass $\Sigma^i \vdash \exists x^\tau \alpha$, was nach Lemma 5 impliziert, dass $[\exists x^\tau\alpha] \in \Sigma^i$. Falls umgekehrt $[\exists x^\tau\alpha] \in \Sigma^i$, so gilt nach Lemma 2, dass $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$ konsistent ist; also ist insbesondere $\exists x^\tau\alpha$ i-verträglich mit $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$. Sei $< [\exists x^\tau\alpha], i > = < \alpha_j, n_j >$; dann ist α_j m.a.W. n_j-verträglich mit $(\Sigma^i)_{i\in\omega}$. Also gilt nach Definition (7) des Abschnitts 6, dass $\beta[x^\tau/y^\tau] \in \Sigma^i_{j+1} \subseteq \Sigma^i$, für ein geeignetes y^τ.

Lemma 8: $[\Diamond\alpha] \in \Sigma^i$ gdw. es ein $j \in \omega$ gibt mit: $\alpha \in \Sigma^j$.

Beweis:
Falls $[\Diamond\alpha] \in \Sigma^i$, können wir so ähnlich argumentieren wie beim vorangegangenen Beweis: α *muss* irgendwo als Zeuge reingerutscht sein, wenn $[\Diamond\alpha] \in \Sigma^i$. Sei α also in Σ^j; wir müssen zeigen, dass $[\Diamond\alpha] \in \Sigma^i$. Angenommen, $[\Diamond\alpha] \notin \Sigma^i$. Zunächst ist dann (wegen $T41$ und der bereits nachgewiesenen Eigenschaften) $i \neq j$. Wegen Lemma 6 (Maximalität) haben wir dann außerdem: $[\neg \Diamond \alpha] \in \Sigma^i$, also auch (wegen $T46$) $[\Box\neg\alpha] \in \Sigma^i$. $\{\Diamond[\neg\Diamond\alpha \wedge \Box\neg\alpha]\} \subseteq \Sigma^i$ ist aber (wegen $T49$ unter anderem) inkonsistent, woraus unmittelbar folgen würde, dass $(\Sigma^j)_{j\in\omega}$ inkonsistent wäre, was aber Lemma 2 widerspricht.

Jetzt haben wir also alles über die Henkinisierung nachgewiesen, was wir zur Konstruktion des Termmodells benötigen. Bevor wir aber dazu übergehen, noch schnell eine einfache, aber nützliche Aufgabe:

Aufgabe: (xxiii) Weisen Sie die folgenden beiden Alternativen zu Lemmas 7 und 8 nach:

Lemma 9: Für jedes $i \in \omega$ und jedes $\alpha \in Tm_\tau$ gilt: $[\forall x^\tau\alpha] \in \Sigma^i$ gdw. $\alpha[x^\tau/y^\tau] \in \Sigma^i$ für jedes $y^\tau \in Var_\tau$, das frei für x^τ in α ist.

Lemma 10: $[\Box\alpha] \in \Sigma^i$ gdw. für alle $j \in \omega$ gilt: $\alpha \in \Sigma^j$.

[35] Das besagt nur, dass es kein freies Vorkommen von x^τ in α gibt, das in einem Teil der Form $\lambda y^\tau \beta$ liegt; m.a.W.: y^τ darf nicht plötzlich gebunden werden, wo x^τ frei ist.

8 Die Konstruktion des Termmodells

Bei der Konstruktion des Termmodells werden wir zunächste mit einer Schwierigkeit zu kämpfen haben, die wir bisher stillschweigend ignoriert haben: der Tatsache nämlich, dass *IL* ein *typenlogische* Sprache ist. Dies ist insofern misslich, als wir nicht einfach hingehen können und *alle* Variable über Äquivalenzklassen von Termen laufen lassen, wie es ja z.B. in der Prädikatenlogik erster Stufe durchaus üblich ist. Bei *IL* geht das einfach deswegen nicht, weil ein Term der Kategorie (e,t) z.B. (an einem Referenzpunkt und unter einer Belegung) eine Funktion von der Menge der Individuen D in die Wahrheitswerte bezeichnen muss: wenn nun auch D selbst aus Äquivalenzklassen von Termen besteht, so kann dies nun aber nicht mehr für $M^{(e,t)}$ (und alle anderen "Schichten" $M^{(\sigma,\tau)}$ oder $M^{(s,\tau)}$) der Ontologie gelten, denn eine Äquivalenzklasse von Termen der Kategorie (e,t) ist eben keine Funktion von D nach $\{0,1\}$. Daraus folgt für uns zunächst, dass die dem zu konstruierenden Modell von Σ zugrundeliegende Ontologie keineswegs klar auf der Hand liegt, sondern auch erst noch konstruiert werden muss. Es spricht jedoch nichts dagegen, dass wir als "Bodensatz" unserer Ontologie, also als Menge D der Individuen, tatsächlich Äquivalenzklassen von Termen nehmen, genauer gesagt: Äquivalenzklassen von Variablen. Dazu die folgenden Definitionen:

(1) Seien $\alpha, \beta \in Tm_\tau$. α ist *äquivalent zu β modulo $i \in \omega$* – $\alpha \simeq_i \beta$ – gdw. gilt: $[\alpha \equiv \beta] \in \Sigma^i$.

Aufgabe: (xxiv) Zu zeigen ist, dass $\simeq_i$ für jedes $i \in \omega$ eine Äquivalenzrelation ist und dass für $x, y \in Var_\tau$ stets gilt: falls $x \simeq_i y$, so $x \simeq_j y$ (für beliebige $i, j \in \omega$).

(2) Sei $x \in Var_e$. Die *Äquivalenzklasse von x* – $[\![x]\!]$ – ist die Menge aller $y \in Var_e$, so dass gilt: $x \simeq_i y$ (für beliebige $i \in \omega$).

Ab jetzt sei also D die Menge aller Äquivalenzklassen $[\![x]\!]$ von Variablen $x \in Var_e$. Bevor wir nun die Ontologie $(M_\tau)_{\tau \in Typ}$ konstruieren, sei daran erinnert, dass diese den Abgeschlossenheitsbedingungen d. aus Definition (5) im 3. Abschnitt genügen muss. Wie wollen wir dies sicherstellen? Nun, am besten dadurch, dass wir bei der Konstruktion jedes einzelenen M_τ darauf achten, dass sich auch noch alle $\alpha \in Tm_\tau$ vernünftig –den Bedingungen d. gemäß – interpretieren lassen. Dies bewerkstelligt man am einfachsten dadurch, dass man die Ontologie simultan mit der intendierten Interpretation der Ausdrücke definiert. Dabei werden wir aus Einfachheitsgründen die Interpretation nicht von der Belegung, wohl aber von den Referenzpunkten abhängig machen. Um die Belegung kümmern wir uns später. Es sei noch erwähnt, dass die folgende Simultanrekursion keinen *Beweis* darstellt, dass die von uns definierten Gebilde tatsächlich Ontologie bzw. Interpretation (von *IL*) sind; das wird erst danach nachzuweisen sein.

(3) Durch simultane Rekursion über $\tau \in Typ$ werden Mengen

$$M_\tau$$

und Funktionen

$$M_\tau : Tm_\tau \times \omega \to M_\tau$$

definiert, so dass bei jedem Schritt der Rekursion gilt:

i. $M_e = D$; $M_t = \{0,1\}$;

ii. $\tau_1, \tau_2 \in Typ \Rightarrow M_{(\tau_1,\tau_2)} \subseteq {M_{\tau_2}}^{M_{\tau_1}}$ und $M_{(s,\tau_1)} \subseteq {M_{\tau_1}}^{I}$;

iii. falls $\alpha \in Tm_\tau$ modal geschlossen ist, so ist $\mu_\tau(\alpha)(i) = \mu_\tau(\alpha)(j)$ für alle $i, j \in \omega$;

iv. falls $X \in M_\tau$, so gibt es ein $x \in Var_\tau$, so dass $\mu_\tau(\alpha)(i) = X$ (für ein bzw. alle $i \in \omega$[36]);

v. falls $\alpha, \beta \in Tm_\tau$ und $i \in \omega$, so gilt: $\mu_\tau(\alpha)(i) = \mu_\tau(\beta)(i)$ gdw. $\alpha \simeq_i \beta$.

A Induktionsanfang

(a) $\tau = e$.
$M_e := D$, gemäß (i). Sei $\alpha \in Tm_e, i \in \omega$; dann ist (wegen $T29$) $\exists x[\alpha \equiv x] \in \Sigma^i$. Wie wir im letzten Abschnitt nachgewiesen haben, ist dann $[\alpha \equiv y] \in \Sigma^i$ für ein $y \in Tm_e$.[37] Wir setzen: $\mu^e(\alpha)(i) = [\![y]\!]$ für so ein y. Diese Definition ist wegen $T36$ selbstverständlich repräsentantenunabhängig. Wir weisen jetzt der Reihe nach die (für e relevanten) Bedingungen nach:

iii. Sei $\mu^e(\alpha)(i) = [\![x]\!]$, – also $[\alpha \equiv x] \in \Sigma^i$ – und α modal geschlossen. Wegen $T39$ ist dann auch $\Box[\alpha \equiv x] \in \Sigma^i$. Aus der $\forall$-$\Box$-Eigenschaft folgt dann, dass $[\alpha \equiv x] \in \Sigma^j$ für alle $j \in \omega$; d.h. $\mu^e(\alpha)(j) = [\![x]\!] = \mu^e(\alpha)(i)$.

iv. Das folgt unmittelbar aus der Definition (plus $T1$)

v. Das folgt direkt aus $T36$ und der Definition.

(b) $\tau = t$.
$M_t := \{0,1\}$, gemäß (i). Für $\alpha \in Tm_t$ und $i \in \omega$ sei $\mu^t(\alpha)(i) = 1$ gdw. $\alpha \in \Sigma^i$ und $\mu^t(\alpha)(i) = 0$ sonst. Nachzuweisen bleiben wieder iii. – v.:

iii. Wenn α modal geschlossen ist und $\mu_\tau(\alpha)(i) = 1$, also $\alpha \in \Sigma^i$, dann ist wegen $T39$ auch $\Box\alpha \in \Sigma^i$; also (wegen der $\forall$-$\Box$-Eigenschaft): $\alpha \in \Sigma^j$ für alle $j \in \omega$, d.h. $\mu^t(\alpha)(j) = 1$. Falls $\mu^t(\alpha)(i) = 0$, ist (wegen der Maximalität von Σ^i) $[\neg\alpha] \in \Sigma^i$, das ebenfalls modal geschlossen ist. Also auch $[\neg\alpha] \in \Sigma^j$ und (wegen der Widerspruchsfreiheit von Σ^j): $\alpha \notin \Sigma^j$, d.h. $\mu^t(\alpha)(j) = 0$.

iv. Wegen $T27$ ist $[\exists x_\tau x_\tau] \in \Sigma^i$ für $i \in \omega$. Also ist (wegen der $\exists$-$\Diamond$-Eigenschaft) $y_t \in \Sigma^i$, d.h. $\mu^t(y_t)(i) = 1$ für mindestens ein y_t. Für die 0 argumentieren wir analog unter Hinweis auf $T28$.

[36] alle, weil Bedingung (iii) gilt und $x \in Var$ modal geschlossen ist.

[37] Diese Art von Argumentation wird öfter vorkommen: wir werden deshalb auch statt von "Lemma 7 und 8" (bzw. "Lemma 9 und 10") von der $\exists$-$\Diamond$-*Eigenschaft* (bzw. der $\forall$-$\Box$-*Eigenschaft*) sprechen.

v. Das gilt wegen der maximalen Widerspruchsfreiheit von Σ^i (und $T24$).

B Induktionsschritt:

(c) $\tau = (\tau_1, \tau_2); \tau_1, \tau_2 \in Typ$.
Bevor wir M_τ definieren, legen wir für jedes $\alpha \in Tm_\tau$ zunächst

$$\mu_\tau(\alpha) : I \mapsto {M_{\tau_2}}^{M_{\tau_1}}$$

fest. Sei also $\alpha \in M_\tau$ und $i \in \omega$. Für jedes $X \in M_{\tau_1}$ gibt es nach Bedingung (iv) für τ_1 ein $x \in Var_{\tau_1}$ mit $\mu_{\tau_2}(x)(i) = X$. Für so ein x sei:

$$(*)\ \mu_\tau(\alpha)(i)(X) := \mu_{\tau_2}(\alpha(x))(i),$$

was ja bereits als definiert vorausgesetzt werden kann. Bevor wir (iii) – (v) zeigen, müssen wir die Representantenunabhängigkeit von $(*)$ nachweisen und M_τ definieren. Sei also $\mu_{\tau_1}(y)(i) = X$; wir müssen zeigen, dass $\mu_{\tau_2}(\alpha(y))(i) = \mu_{\tau_2}(\alpha(x))(i)$. Wegen (v) für τ_1 gilt aber zunächst: $x \simeq_i y$, d.h. $[x \equiv y] \in \Sigma^i$. Wegen $T32$ ist dann auch $[\alpha(x) \equiv \alpha(y)] \in \Sigma^i$, d.h. $\alpha(x) \simeq_i \alpha(y)$. Wegen (v) für τ_2 gilt dann aber gerade: $\mu_{\tau_2}(\alpha(x))(i) = \mu_{\tau_2}(\alpha(y))(i)$, was zu zeigen war. $(*)$ legt somit für jedes $X \in M_{\tau_1}$ den Wert von $M^\tau(\alpha)(i)(X)$ fest – und somit eine Funktion $M^\tau(\alpha)(i) \in {M_{\tau_2}}^{M_{\tau_1}}$. Erwartungsgemäß definieren wir nun M_τ wie folgt:

$$M_\tau := \{F \in {M_{\tau_2}}^{M_{\tau_1}} : \text{es gibt ein } \alpha \in Tm_\tau, \text{ so dass } \mu_\tau(\alpha)(i) = F, \text{ für ein } i \in \omega\}.$$

Bedingung (ii) ist somit erfüllt. Die anderen lassen sich auch mehr oder weniger leicht nachweisen:

iii. Das ist trivial; denn falls $\alpha \in Tm_\tau$ modal geschlossen ist, so ist es auch $\alpha(x)$, wobei $\mu^t(x)(i) = X$. Also gilt: $\mu^t(\alpha)(i)(X) = \mu^{t_2}(\alpha(x))(i)$, was nach Bedingung (iii) für τ_2 dasselbe ist wie $\mu^{t_2}(\alpha(x))(j)$, d.h. $\mu^t(\alpha)(j)(X)$.

iv. Sei also $F \in M_\tau$, d.h. es gibt $i \in \omega$ und $\alpha \in Tm_\tau$, so dass $\mu_\tau(\alpha)(i) = F$. Wegen $T29$ ist auch $[\exists x[\alpha \equiv x]] \in \Sigma^i$; also gibt es – gemäß der $\exists$-$\Diamond$-Eigenschaft – ein $f \in Var_\tau$ mit: $[\alpha \equiv f] \in \Sigma^i$. Wegen $T33$ ist dann auch $[\alpha(x) \equiv f(x)] \in \Sigma^i$ für *jedes* $x \in Var_{\tau_1}$. Gemäß (v) für τ_2 gilt dann für jedes $x \in Var_{\tau_1}$: $\mu_{\tau_2}(\alpha(x))(i) = \mu_{\tau_2}(f(x))(i)$. Sei aber $X \in M_{\tau_1}$; dann gibt es – wegen (iv) für τ_1 – ein $y \in Var_{\tau_1}$, für das gilt: $\mu_{\tau_1}(y)(i) = X$. Also ist:

$$\begin{aligned} &\mu_\tau(\alpha)(i)(X) \\ =&\mu_{\tau_2}(\alpha(y))(i) \\ =&\mu_{\tau_2}(f(y))(i) \\ =&\mu_\tau(f)(i)(X) \end{aligned}$$

Da also $\mu_\tau(\alpha)(i)(X) = \mu_\tau(f)(i)(X)$ für beliebige $X \in M_{\tau_1}$, ist auch (Extensionalität von Funktionen !) $\mu_\tau(\alpha)(i) = \mu_\tau(f)(i)$, was zu zeigen war.

v. Seien $\alpha, \beta \in M_\tau$, $i \in \omega$. Dann gilt: $\mu_\tau(\alpha)(i) = \mu_\tau(\beta)(i)$ gdw. für alle $X \in M_{\tau_1}$: $\mu_\tau(\alpha)(i)(X) = \mu_\tau(\beta)(i)(X)$, was nach Bedingung (iv) für τ_1 äquivalent ist mit: für alle $x \in Var_{\tau_1}$ ist $\mu_{\tau_2}(\alpha(x))(i) = \mu_{\tau_2}(\beta(x))(i)$. Wegen Bedingung (v) für τ_2 ist das dasselbe wie:

$(*)$ für alle $x \in Var_{\tau_1} : [\alpha(x) \equiv \beta(x)] \in \Sigma^i$.

Es bleibt zu zeigen, dass $(*)$ impliziert, dass $\alpha \simeq_i \beta$ und umgekehrt. Falls aber $(*)$ gilt, so ist wegen der $\forall$-$\Box$-Eigenschaft auch: $\forall y[\alpha(y) \equiv \beta(y)] \in \Sigma^i$ für ein geeignetes $y \in Var_{\tau_1}$. Dann ist wegen $T14$ aber auch $[\alpha \equiv \beta] \in \Sigma^i$, d.h. $\alpha \simeq_i \beta$. Falls umgekehrt $\alpha \simeq_i \beta$, so ist wegen $T33$: $[\alpha(\gamma) \equiv \beta(\gamma)] \in \Sigma^i$, für beliebeige $\gamma \in Tm_{\tau_1}$; insbesondere gilt dann also $(*)$.

(d) $\tau = (s, \tau_1), \tau_1 \in Typ$.
Wir definieren zunächst wieder $\mu_\tau(\alpha) : I \mapsto {M_{\tau_1}}^{M_I}$, für $\alpha \in Tm_\tau$. Sei also $i \in \omega$, $\alpha \in Tm_\tau$ und $f \in Var_\tau$ mit $\alpha \simeq_i f$. Wir setzen:

$$\mu_\tau(\alpha)(i) := \mu_{\tau_1}(\check{}f).$$

Um die Represäntantenunabhängigkeit dieser Definition nachzuweisen, betrachten wir ein beliebiges $g \in Var_\tau$ mit $\alpha \simeq_i g$. Wegen Aufgabe (xxiv) ist dann für beliebige $j \in \omega : f \simeq_j g$, d.h. $[f \equiv g] \in \Sigma^j$. Wegen $T34$ gilt dann auch: $[\check{}f \equiv \check{}g] \in \Sigma^j$, d.h. $f \simeq_j g$ für alle $j \in \omega$. Mit Eigenschaft (v) für τ_1 können wir nun folgern, dass $\mu_{\tau_1}(\check{}f)(j) = \mu_{\tau_1}(\check{}g)(j)$ für alle $j \in \omega$; d.h. $\mu_{\tau_1}(\check{}f) = \mu_{\tau_1}(\check{}g)$, was zu zeigen war.
Analog zu (c) definieren wir:

$$M_\tau := \{F \in M_{\tau_1}^I : \text{es gibt ein } \alpha \in Tm_\tau, \text{ so dass } \mu_\tau(\alpha)(i) = F, \text{ für ein } i \in \omega\}.$$

Wir können nun die Eigenschaften (iii) - (v) nachweisen. (Forderung (ii) wird durch obige Definition trivialerweise erfüllt.)

iii. Wenn $\alpha \in Tm_\tau$ modal geschlossen ist, ist $\mu_\tau(\alpha)(i) = \mu_{\tau_1}(\breve{f})$ für ein $f \in Var_\tau$ mit $[\alpha \equiv f] \in \Sigma^i$. Wegen $T39$ und der modalen Geschlossenheit dieser Gleichung ist dann aber auch $\Box[\alpha \equiv f] \in \Sigma^i$, das heißt ($\forall$-$\Box$-Eigenschaft) $[\alpha \equiv f] \in \Sigma^j$ für alle $j \in \omega$. Somit ist auch $\mu_\tau(\alpha)(j) = \mu_{\tau_1}(\breve{f})$.

iv. Diese Bedingung ist trivialerweise erfüllt, weil für $F \in M_\tau$ immer ein $\alpha \in Tm_\tau$ existiert mit $\mu_\tau(\alpha)(i) = F$, für ein $i \in \omega$. Also: $F = \mu_{\tau_1}(\breve{f}) = \mu_\tau(f)(i)$, weil $[f \equiv f] \in \Sigma^i$.

v. Falls $\alpha, \beta \in Tm_\tau$ und $i \in \omega$, so folgt aus $\alpha \simeq_i \beta$ zunächst, dass $\exists f[\alpha \equiv f] \in \Sigma^i$ und $[\alpha \equiv \beta] \in \Sigma^i$ (wegen $T29$). Mit der $\exists$-$\Diamond$-Eigenschaft gibt es dann ein $g \in Var_\tau$, für das gilt: $\alpha \simeq_i g$; wegen $T35$ und $T36$ ist dann auch $\beta \simeq_i g$, woraus folgt: $[\alpha \equiv \beta] \in \Sigma^i$, wiederum wegen $T35$ und $T36$. Somit ist $\alpha \simeq_i \beta$ gdw. es ein $g \in Var_\tau$ gibt mit $\alpha \simeq_i g$ und $\beta \simeq_i g$. Letzteres heißt aber definitionsgemäß, dass $\mu_\tau(\alpha)(i) = \mu_{\tau_1}(\breve{g}) = \mu_\tau(\beta)(i)$, was zu zeigen war.

Das war die zugegebenermaßen etwas komplizierte simultane Definition von $(M_\tau)_{\tau \in Typ}$ und $(\mu_\tau)_{\tau \in Typ}$!

Aufgabe: (xxv) Seien $\alpha \in Tm_{(\tau_1,\tau_2)}, \beta \in Tm_{\tau_1}$ und $i \in \omega$. Man zeige: $\mu_{\tau_2}(\alpha(\beta))(i) = \mu_{(\tau_1,\tau_2)}(\alpha)(i)[\mu_{\tau_1}(\beta)(i)]$.

Erwartungsgemäß definieren wir nun unser intendiertes Modell für Σ wie folgt:

(4) Das Termmodell $\mathcal{M}$ (für Σ) ist das Paar $\mathcal{M} = (M, V)$ für das gilt:

a. $M = (M_\tau)_{\tau \in Typ}$

b. V ist diejenige Funktion f von $\bigcup_{\tau \in Typ} Con_\tau$ nach $\bigcup_{\tau \in Typ} M_\tau$, für die gilt:

$$f(c) = \mu_\tau(c), \text{ falls } c \in Con_\tau.$$

Zu zeigen bleibt, dass $\mathcal{M}$ tatsächlich eine Interpretation ist und dass $\mathcal{M}$ (an einem Punkt $i \in \omega$ und einer Belegung ν für M) Σ erfüllt. Dies geschieht im nächsten Abschnitt!

9 Vollständigkeit, Kompaktheit und Löwenheim-Skolem in *IL*

Wir steuern nun unweigerlich auf die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels zu. Sie werden alle in einfacher und üblicher Weise aus der Tatsache folgen, dass unser Termmodell $\mathcal{M}$ tatsächlich eine Interpretation ist. Bevor wir das aber zeigen können, haben wir uns erst einmal zu überlegen, was mit den Belegungen zu geschehen hat, die wir bisher außer Acht gelassen haben. Jetzt brauchen wir sie aber, da wir die Existenz eine Funktion Ext nachweisen müssen, die für alle Belegungen definiert ist; μ_τ deutete jedoch die Variablen *fest*. Die folgende Überlegung wird uns jedoch weiterhelfen: eine Belegung ist ja eine Funktion, die einem $x \in Var_\tau$ ein $X \in M_\tau$ zuordnen muss. Wenn wir alle (bezüglich M_τ) möglichen Belegungen betrachten wollen, dann sicher auch solche, für die $\nu(x) \neq \mu_\tau(x)(i)$[38]. Da aber $\nu(x) \in M_\tau$, gibt es ja (nach der Bedingung (iv) der Definition von μ_τ) zumindest ein $y \in Var_\tau$, für das $\mu_\tau(y)(i) = \nu(x)$. Wenn wir nun einen Ausdruck α, in dem nur x frei vorkommt, unter der Belegung ν betrachten wollen, können wir ebensogut $\alpha[{}^x/_y]$ unter μ_τ betrachten, vorausgesetzt allerdings, dass y frei für x ist in α; denn sonst könnte es Variablenkonfusion geben. Wir werden genau diese Strategie einschlagen, also Belegungen als Umbenennungen betrachten. Zuvor müssen wir allerdings sicherstellen, dass das immer geht; m.a.W. müssen wir zeigen, dass man in einem Beispiel wie dem obigen immer ein geeignetes $y \in Var_\tau$ finden kann, das frei ist für x in α. Dass dies so ist, besagt das folgende Lemma:

Lemma 11: Sei $x \in Var_\tau$. Dann gibt es unendlich viele $y \in Var_\tau$ mit: $x \simeq_i y$ (für ein bzw. alle $i \in \omega$).

Beweis:

Sei $x \in Var_\tau$. Wir zeigen, dass es für jeweils n verschiedene $x_1, \dots, x_n \in Var_\tau$ mit $x_1 \simeq_i x, \dots, x_n \simeq_i x$ ein weiteres $y \in Var_\tau$ gibt mit $y \simeq_i x$. Seien also $x_1, \dots, x_n, x$ wie beschrieben. Sei $z \in Var_\tau$ eine beliebige Variable, die verschieden ist von $x_1, \dots, x_n, x$. Dann gilt:

1. $\vdash z \equiv z$ $\quad (T1)$
2. $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n[z \equiv z]$ $\quad$ (mit $T8$)
3. $\vdash [\forall x_1 \dots \forall x_n[z \equiv z]] \equiv T$ $\quad$ (mit $T7$)
4. $\vdash \exists z[x \equiv z]$ $\quad (T29)$
5. $\vdash \exists z[x \equiv z \wedge T]$ $\quad$ (mit $T8$)
6. $\vdash \exists z[x \equiv z \wedge \forall x_1 \dots \forall x_n[z \equiv z]]$ $\quad$ (mit R)

Wegen der Widerspruchsfreiheit von Σ^i ist insbesondere $\exists z[x \equiv z \wedge \forall x_1 \dots \forall x_n[z \equiv z]] \in \Sigma^i$. Aus der $\exists$-$\Diamond$-Eigenschaft ergibt sich dann:

$$[x \equiv y \wedge \forall x_1 \dots \forall x_n[y \equiv y]] \in \Sigma^i$$

für ein y, das frei ist für z in $[x \equiv z \wedge \forall x_1 \dots \forall x_n[z \equiv z]]$. Insbesondere ist y dann verschieden von $x_1, \dots, x_n$, was zu zeigen war.

Mit Lemma 11 können wir jetzt den Begriff der Belegung durch den der Umbenennung ersetzen:

[38] Der Parameter i ist nach Bedingung (iii) der Definition von μ_τ unerheblich, weil Variablen modal geschlossen sind.

(1) Sei $\alpha \in Tm_\tau$ so, dass in α höchstens die Variablen $< x_1, \dots, x_n >$ frei vorkommen.[39] Sei ν eine Belegung (für M). Die Variablenfolge $< y_1, \dots, y_n >$ ist eine *ν-Umbenennung (für α)* gdw. für alle $i \leq n$ gilt:

$$\begin{aligned} &(a)\ \nu(x_i) = \mu_\tau(y_i)(i); \\ \text{und}\ &(b)\ y_i \text{ ist frei für } x_i \text{ in } \alpha. \end{aligned}$$

Aus Lemma 11 folgt direkt, dass es für jedes $\alpha \in Tm_\tau$ und jede Belegung ν eine ν-Umbenennung für α gibt. Wir können nun die Funktion *Ext* definieren, von der wir zeigen werden, dass sie die Bedingungen (d) der Definition von "Interpretation" erfüllt. Zuvor noch eine Hilfsdefinition:

(2) Sei $\alpha \in Tm_\tau$, ν eine Belegung; in α kommen höchstens die Variablen $< x_1, \dots, x_n >$ frei vor. $\overline{\alpha} \in Tm_\tau$ ist eine *ν-Modifikation von α* gdw. es eine ν-Umbenennung $< y_1, \dots, y_n >$ für α gibt und $\overline{\alpha}$ durch simultane Ersetzung der freien Vorkommen aller x_i in α durch y_i entsteht.

Aufgabe: (xxvi) Sei $\alpha \in Tm_\tau$, ν eine Belegung, $\overline{\alpha_1}$ und $\overline{\alpha_2}$ seien ν-Modifikationen von α. Zu zeigen ist, dass für jedes $i \in \omega$ gilt:

$$\mu_\tau(\overline{\alpha_1})(i) = \mu_\tau(\overline{\alpha_2})(i).$$

Aufgabe (xxvi) rechtfertigt nun die folgende Definition:

(3) Für jedes $i \in \omega$, jede Belegung ν und jedes $\alpha \in Tm_\tau$ sei:

$$Ext_{\nu,i}(\alpha) = \mu_\tau(\overline{\alpha})(i),$$

wobei $\overline{\alpha}$ eine (wegen Aufgabe (xxvi) beliebige) ν-Modifikation von α ist.

Lemma 12: *Ext* erfüllt die Bedingungen (d) (i) - (vii) der Definition 5 im Abschnitt 3.

Beweis:

Es bleibt uns wohl nichts anderes übrig, als alle Bedingungen der Reihe nach durchzugehen:

i. zu zeigen: falls $\mathbf{c} \in Con_\tau$, so ist $Ext_{\nu,i}(\mathbf{c}) = V(\mathbf{c})(i)$.
Das ist trivial, weil $\mathbf{c}$ eine ν-Modifikation seiner selbst ist und $V(\mathbf{c})(i) = \mu_\tau(\mathbf{c})(i)$ per definitionem.

ii. zu zeigen: falls $x \in Var_\tau$, so ist $Ext_{\nu,i}(x) = \nu(x)$. Das folgt ebenfalls direkt aus der Definition der ν-Modifikation.

[39] Wir denken uns $x_1, \dots, x_n$ in irgendeiner (wiederholungsfreien) Standardreihenfolge gegeben.

iii. zu zeigen: falls $\alpha = \beta(\gamma)$, wobei $\alpha \in Tm_{(\sigma,\tau)}$ und $\gamma \in Tm_\sigma$, so ist $Ext_{\nu,i}(\alpha) = Ext_{\nu,i}(\beta)(Ext_{\nu,i}(\gamma))$.
Seien also $\beta \in Tm_{(\sigma,\tau)}, \gamma \in Tm_\tau$. Dann ist: $Ext_{\nu,i}(\alpha) = \mu_\tau(\overline{\alpha})(i)$ für ein geeignetes $\overline{\alpha}$. Man beachte, dass $\overline{\alpha} = \overline{\beta}(\overline{\gamma})$. Also ist $Ext_{\nu,i}(\alpha) = \mu_\tau(\overline{\beta}(\overline{\gamma}))(i)$, was nach Aufgabe (xxv) dasselbe ist wie $\mu^{(\sigma,\tau)}(\overline{\beta})(i)(\mu^\sigma(\overline{\gamma})(i))$, also $Ext_{\nu,i}(\overline{\beta})(Ext_{\nu,i}(\overline{\gamma}))$

iv. zu zeigen: falls $\alpha = \lambda x\beta$, $x \in Var_\sigma$ und $\beta \in Tm_\tau$, so ist $Ext_{\nu,i}(\alpha)$ diejenige Funktion f von M_σ nach M_τ, so dass für beliebige $X \in M_\sigma$ gilt:

$$f(X) = Ext_{(\nu,X/x),i}(\beta).$$

Sei also $X \in M_\sigma$; wir zeigen, dass $Ext_{\nu,i}(\alpha)(X) = Ext_{(\nu,X/x),i}(\beta)$. Zunächst ist nach unserer Definition $Ext_{\nu,i}(\alpha)(X) = \mu^{(\sigma,\tau)}(\overline{\alpha})(i)(X)$, wobei $\overline{\alpha}$ eine ν-Modifikation von α ist. Aus dem letzten Abschnitt wissen wir aber, dass es eine Variable $y \in Var_\tau$ gibt mit $\mu^\sigma(\overline{\beta})(i) = X$; aus Lemma 11 folgt außerdem, dass es insbesondere so ein y gibt, das in $\overline{\alpha}$ nicht frei vorkommt. Wir haben also:

$$Ext_{\nu,i}(\alpha)(X) = \mu^{(\sigma,\tau)}(\overline{\alpha})(i)(\mu^\sigma(y)(i)),$$

für so ein $y \in Var_\sigma$. Wegen Aufgabe (xxv) ist dann

$$Ext_{\nu,i}(\alpha)(X) = \mu_\tau(\overline{\alpha}(y))(i).$$

$\overline{\alpha}$ hat natürlich die Form $\lambda x\overline{\beta}$; Wegen $AS4$ ist aber $[[\lambda x\beta](y) \equiv \overline{\beta}[{}^x/_y]] \in \Sigma^i$, und somit auch: $\mu_\tau(\overline{\alpha}(y))(i) = \mu_\tau(\overline{\beta}[{}^x/_y])(i)$. Da $\overline{\alpha}$ aber eine ν-Modifikation von α ist, gibt es eine ν-Umbenennung $< y_1, \dots, y_n >$ für α (– wobei $< x_1, \dots, x_n >$ die freien Variablen von α sein sollen). Da y nicht frei vorkommt in α, geht $\beta[{}^x/_y]$ aus β durch simultane Ersetzung der freien Variablen $< x_1, \dots, x_n, x >$ in β durch $< y_1, \dots, y_n, y >$ hervor. $< y_1, \dots, y_n, y >$ ist also eine $(\nu, \mu_\tau(y)(i)/x)$-Umbenennung für β, d.h. eine $(\nu, X/x)$-Umbenennung. Definitionsgemäß ist dann:

$$\mu_\tau(\beta[{}^x/_y])(i) = Ext_{(\nu,X/x),i}(\beta),$$

was zu zeigen war.

v. zu zeigen: falls $\alpha = [\beta \equiv \gamma]$, so ist $Ext_{\nu,i}(\alpha) = 1$ gdw. $Ext_{\nu,i}(\beta) = Ext_{\nu,i}(\gamma)$.
Das ist wieder sehr einfach: $Ext_{\nu,i}(\alpha) = 1$ gdw. $\mu^t(\overline{\alpha})(i) = 1$, was nach der Definition von μ^t gleichbedeutend ist mit: $\overline{\alpha} \in \Sigma^i$; $\overline{\alpha}$ hat aber die Form $[\overline{\beta} \equiv \overline{\gamma}]$. M.a.W.: $Ext_{\nu,i}(\alpha) = 1$ gdw. $\overline{\beta} \simeq_i \overline{\gamma}$, was nach Bedingung (v) der Definition von $(\mu_\tau)_{\tau \in Typ}$ gleichbedeutend ist mit: $\mu_\tau(\overline{\beta})(i) = \mu_\tau(\overline{\gamma})(i)$. Dies heißt ebensoviel wie: $Ext_{\nu,i}(\beta)(i) = Ext_{\nu,i}(\gamma)(i)$, da ja $\overline{\beta}$ und $\overline{\gamma}$ jeweils ν-Modifikationen von β und γ sind.

vi. zu zeigen: falls $\alpha = \check{}\beta$, so ist $Ext_{\nu,i}(\alpha) = Ext_{\nu,i}(\beta)(i)$.
$Ext_{\nu,i}(\alpha) = \mu_\tau(\check{}\,\overline{\beta})(i)$, da $\overline{\alpha} = \check{}\,\overline{\beta}$. Sei $f \in Tm_{(s,\tau)}$ mit $\overline{\beta} \simeq_i f$. Dann ist wegen $T34\check{}\,\overline{\beta} \simeq_i \check{}f$; also auch $\mu_\tau(\check{}\,\overline{\beta})(i) = \mu_\tau(\check{}\,\overline{f})(i)$ Nach Definition von $\mu^{(s,\tau)}$ ist aber:

$$\mu^{(s,\tau)}(\overline{\beta})(i) = \mu_\tau(\check{}f).$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned}&Ext_{\nu,i}(\alpha)\\ =&\mu_\tau(\check{}\,\overline{\beta})(i)\\ =&\mu_\tau(\check{}f)(i)\\ =&\mu^{(s,\tau)}(\check{}\,\overline{\beta})(i)(i)\end{aligned}$$

Letzeres ist definitionsgemäß gleich $Ext_{\nu,i}(\beta)(i)$.

vii. zu zeigen: falls $\alpha = \hat{}\beta$ und $\beta \in Tm_\sigma$, so ist $Ext_{\nu,i}(\alpha)$ diejenige Funktion $f \in M_\sigma$, so dass für beliebige $j \in \omega$ gilt:

$$f(j) = Ext_{\nu,j}(\beta).$$

Sei also $j \in \omega$; dann ist wieder $Ext_{\nu,i}(\alpha)(j) = \mu^{(s,\sigma)}(\overline{\alpha})(i)(j)$, was nach der Definition von $\mu^{(s,\sigma)}$ dasselbe ist wie $\mu^\sigma(\check{}f)(j)$, für ein $f \in Var_{(s,\sigma)}$ mit $\overline{\alpha} \simeq_i f$. Wenn aber $[\hat{}\,\overline{\beta} \equiv f] \in \Sigma^i$, dann muss auch (wegen $T62$) $\Box[\overline{\beta} \equiv \check{}f] \in \Sigma^i$ sein woraus mit der $\forall$-$\Box$-Eigenschaft folgt, dass $\overline{\beta} \simeq_j \check{}f$. Aus der Definition von μ^σ folgt dann unmittelbar, dass $\mu^\sigma(\overline{\beta})(j) = \mu^\sigma(\check{}f)(j)$. Also ist:

$$\begin{aligned}&Ext_{\nu,i}(\alpha)(j)\\ =&\mu^\sigma(\check{}f)(j)\\ =&\mu_\tau(\overline{\beta}(j)\\ =&Ext_{\nu,j}(\beta).\end{aligned}$$

Dies war das entscheidende Lemma; die Hauptergebnisse folgen jetzt in der üblichen Art und Weise:

Satz: Falls $\Sigma \subseteq Tm_t$ widerspruchsfrei ist, so ist Σ erfüllbar; d.h es gibt dann eine Interpretation $\mathcal{M} = (M, V)$ mit Basis (D, I) und $i \in I$ sowie eine Belegung ν, sodass gilt:

$$Ext_{\nu,i}(\alpha) = 1$$

für alle $\alpha \in \Sigma$.

Beweis:

Gemäß Aufgabe (xvii) können wir voraussetzen, dass sich aus Σ ein System $\Sigma^i_{j_{i,j}}$ der im Abschnitt 6 definierten Art konstruieren lässt. Sei $\mathcal{M}$ das in Abschnitt 8 definierte Termmodell $\mathcal{M} =< M, V >$ mit Basis (D, I), wobei $D = \{[\![x]\!] : x \in Var_e\}$ und $I = \omega$. ν_0 sei die wie folgt definierte Belegung:

$$\nu_0(x) = \mu_\tau(x)(i)$$

für $x \in Var_\tau$ und $i \in \omega$. Sei $\alpha \in \Sigma$; dann gilt trivialerweise: α ist eine ν_0-Modifikation von α. Also ist:

$$Ext_{\nu_0,0}(\alpha) = \mu^t(\alpha)(0).$$

Nach Definition von μ^t ist aber $\mu^t(\alpha)(0) = 1$, weil $\alpha \in \Sigma \subseteq \Sigma^0$.

Der Vollständigkeitssatz folgt nun auf die erwartete Art und Weise:

Vollständigkeitssatz für *IL*:
$\alpha \in Tm_\tau$ is gültig gdw. α ableitbar ist. ($\vDash \alpha \;\Leftrightarrow \vdash \alpha$)

Beweis:

Angenommen, α ist nicht ableitbar. Aus aussagenlogischen Gründen ($T24$) ist dann: $\nvdash [\neg\alpha \equiv \bot]$, d.h. $\{\neg\alpha\}$ ist widerspruchsfrei. Nach dem vorhergehenden Satz gibt es dann eine Interpretation $\mathcal{M}$, in der für gewisse ν und i gilt $Ext_{\nu,i}(\neg\alpha) = 1$. Somit ist $Ext_{\nu,i}(\alpha) = 0$, was bedeutet, dass α nicht gültig sein kann. Die andere Richtung war Aufgabe (x)!

Aufgabe: (xxvii) Man zeige, dass für $\Sigma \subseteq Tm_t$ und $\alpha \in Tm_t$ gilt:

$$\Sigma \vDash \alpha \text{ gdw. } \Sigma \vdash \alpha$$

Die letzten beiden Sätze brauchen wir wirklich nicht mehr zu beweisen, da sie unmittelbar aus dem Vorhergehenden hervorgehen.

Kompaktheitssatz für IL: $\Sigma \subseteq Tm_t$ ist erfüllbar gdw. jedes endliche $\Pi \subseteq \Sigma$ erfüllbar ist.

Löwenheim-Skolem-Satz (abwärts) für IL: Falls $\Sigma \subseteq Tm_t$ erfüllbar ist, so hat Σ ein Modell $\mathcal{M}$ mit der Basis (D, I), für das gilt:

1. D ist eine abzählbare Menge;
2. $I = \omega$.

Im Zusammenhang mit dem Löwenheim-Skolem-Satz sollte nicht unerwähnt bleiben, dass das dort aufgeführte D durchaus endlich sein kann, ja gelegentlich sogar endlich sein muss.[40] I kann hingegen immer (abzählbar) unendlich gewählt werden, wie die Konstruktion in Abschnitt 6 gezeigt hat. Bei einer "echten" zweisortigen Sprache, wie wir sie im ersten Abschnitt skizziert haben, muss I jedoch gelegentlich endlich sein. Deshalb (und aus ähnlichen Gründen) haben wir *IL* gelegentlich als *schwache* zweisortige Logik bezeichnet.

10 Literatur:

P. Andrews [RA]: "A reduction of the axioms for the theory of propositional types" in: *Fundamenta Mathematicae* 52 (1963), 345-350.

D. Gallin [IHM]: *Intensional and Higher-Order Modal Logic.* Amsterdam (1975).

L. Henkin [CTT]: "Completeness in the theory of types" in: *Journal of Symbolic Logic* 15 (1950), 81-91.

R. Montague [UG]: "Universal Grammar" in: *Formal Philosophy.* Ed. R. Thomason. New Haven, London (1974), 222-246.

P. Trichý [AIA]: "An Approach to Intensional Analysis" in : *Noûs* V (1971), 273-297.

[40] Man betrachte z.B. die (erfüllbare) Menge $\Sigma = \{\exists x_e \forall y_e [x_e \equiv y_e]\}$!