1. Typen

Die Menge der (*einsortigen*) *Typen* $\boldsymbol{T}$ enthält als Elemente die (nicht ganz beliebigen, aber festen) Objekte $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{e}$ sowie alle Paare (a,b) von Elementen a und b, aber sonst nichts:

- $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}$;
- $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{T}$;
- wenn $a \in \boldsymbol{T}$ und $b \in \boldsymbol{T}$, dann ist $(a,b) \in \boldsymbol{T}$.

Anm.: Die Notation geht auf Montagues *Universal Grammar* (1970) zurück. '$\boldsymbol{t}$' ist eine Abkürzung für 'truth value', '$\boldsymbol{e}$' steht für 'entitity'.

Notation: '(a,b)' wird auch einfach als '(ab)' notiert; äußere Klammern werden i.d.R. weggelassen; $(\boldsymbol{et})((\boldsymbol{et})\boldsymbol{t})$ ist also dasselbe wie $((\boldsymbol{e},\boldsymbol{t}),((\boldsymbol{e},\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}))$. In der semantischen Literatur findet man auch spitze statt runden Klammern für Typen, also $\langle\langle \boldsymbol{e},\boldsymbol{t}\rangle,\langle\langle \boldsymbol{e},\boldsymbol{t}\rangle,\boldsymbol{t}\rangle\rangle$.

Sei D eine beliebige, nicht-leere Menge. Für jeden Typ $a \in \boldsymbol{T}$ bestimmt sich die Menge D_a der Objekte des Typs a (relativ zur Basis D) durch die folgende Rekursion:

- $D_{\boldsymbol{t}} = \{0,1\}$;
- $D_{\boldsymbol{e}} = D$;
- wenn $a \in \boldsymbol{T}$ und $b \in \boldsymbol{T}$, dann ist D_{ab} die Menge der Funktionen von D_a nach D_b, d.h. mit Definitionsbereich D_a und Werten in D_b. Notation: $D_{ab} = D_b{}^{D_a}$.

2. Typenlogische Formeln

Für jeden Typ $a \in \boldsymbol{T}$ gibt es einen (abzählbar) unendlich großen Vorrat Var_a an *Variablen* des Typs a; die Menge aller Variablen ist: $Var = \bigcup_{a \in \boldsymbol{T}} Var_a$.

Variablen werden notiert durch irgendwelche Buchstaben mit Exponenten, die dann für den jeweiligen Typ stehen: '$x^{\boldsymbol{e}}$', '$y^{\boldsymbol{e}}$', '$P^{\boldsymbol{et}}$', etc. Wir gehen davon aus, dass der Typ einer Variablen eindeutig ist (d.h. die Bereiche Var_a und Var_b überlappen sich nicht, wenn $a \neq b$) und ebenso der Typ einer Konstanten. Und natürlich ist keine Variable zugleich eine Konstante.

Eine *typenlogische Sprache* ist eine Familie $L = (Con_{L,a})_{a \in \boldsymbol{T}}$ von Mengen, so dass Con_a keine Variablen, Hilfssymbole etc. enthält; der Fall $Con_{L,a} = \emptyset$ (für einige, alle, fast alle oder unendlich viele $a \in \boldsymbol{T}$) ist ausdrücklich zugelassen. Wir setzen: $Con_L = \bigcup_{a \in \boldsymbol{T}} Con_{L,a}$.

Komplexe Formeln einer typenlogischen Sprache werden schrittweise aus einfachen Formeln gebildet. Nicht nur die Variablen und Konstanten, sondern jede Formel der Typenlogik hat einen (eindeutigen) Typ, der den Typ des Objekts angibt, für den sie steht. Die Menge der typenlogischen Formeln eines Typs $a \in \boldsymbol{T}$ wird als '$Fml_{L,a}$' bezeichnet. Es gilt dabei für jeden Typ $a \in \boldsymbol{T}$:

- $Var_a \subseteq Fml_{L,a}$;
- $Con_{L,a} \subseteq Fml_{L,a}$;
- wenn $\alpha \in Fml_{L,ab}$ und $\beta \in Fml_{L,a}$, dann ist $\alpha(\beta) \in Fml_{L,b}$; *APPlikation*
- wenn $x \in Var_{L,a}$ und $\alpha \in Fml_{L,b}$, dann ist $(\lambda x.\ \alpha) \in Fml_{L,ab}$. *ABStraktion*
- wenn $\alpha \in Fml_{L,a}$ und $\beta \in Fml_{L,a}$, dann ist $(\alpha \equiv \beta) \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$. *IDentität*

Die Regeln sind so zu verstehen, dass sie für beliebige (auch schon aus diesen Regeln konstruierte) Formeln α und β und beliebige Typen a, gelten.

Die *Formeln* einer typenlogischen Sprache L bilden die Menge $Fml_L = \bigcup_{a \in \boldsymbol{T}} Fml_{L,a}$.
Für jedes $\alpha \in Fml_L$ bestimmt sich die Menge in α (frei) vorkommenden Variablen $Fr(\alpha)$ und Konstanten $Cn(\alpha)$ durch folgende Induktion (über den Formelaufbau):

Formel	$Fr(\alpha) =$	$Cn(\alpha)$
$x \in Var$	$\{x\}$	Ø
$c \in Con_L$	Ø	$\{c\}$
$\alpha(\beta)$	$Fr(\alpha) \cup Fr(\beta)$	$Cn(\alpha) \cup Cn(\beta)$
$(\lambda x.\ \alpha)$	$Fr(\alpha) \setminus \{x\}$	$Cn(\alpha)$
$(\alpha \equiv \beta)$	$Fr(\alpha) \cup Fr(\beta)$	$Cn(\alpha) \cup Cn(\beta)$

Die *Parameter* einer Formel $\alpha \in Fml_L$ sind definiert als: $Par(\alpha) = Fr(\alpha) \cup Cn(\alpha)$.
Eine Formel $\alpha \in Fml_L$ ist *geschlossen*, falls $Fr(\alpha) = \emptyset$; sonst ist α offen.
$Fr(\alpha)$, $Cn(\alpha)$ und $Par(\alpha)$ können leer sein; wenn $Cn(\alpha) = \emptyset$, gilt für jede Sprache L: $\alpha \in Fml_L$.

Definition
Sei L eine Sprache, $\alpha \in Fml_L$, $x \in Var_a$ und $\beta \in Fml_{L,a}$ (für irgendein $a \in \boldsymbol{T}$).
(a) Das Ergebnis der *Ersetzung aller freien Vorkommen* von x in α durch β wird wie folgt bestimmt:

Formel	$\alpha[{}^{x}\!/\!_{\beta}]$
x	β
$y \in Var$ [wobei $y \neq x$]	y
$c \in Con_L$	c
$\gamma(\delta)$	$\gamma[{}^{x}\!/\!_{\beta}](\delta[{}^{x}\!/\!_{\beta}])$
$(\lambda x.\ \gamma)$	$(\lambda x.\ \gamma)$
$(\lambda y.\ \gamma)$ [wobei $y \neq x$]	$(\lambda y. \gamma[{}^{x}\!/\!_{\beta}])$
$(\gamma \equiv \delta)$	$(\gamma[{}^{x}\!/\!_{\beta}] \equiv \delta[{}^{x}\!/\!_{\beta}])$

(b) x ist *frei für [Einsetzungen von]* β *in* α gdw. für kein $z \in Fr(\beta)$ gilt: ein freies Vorkommen von x in α steht im Skopus von 'λz'.
(b) setzt eine Vorkommens-Definition voraus, lässt sich aber durch eine Induktion über den Formelaufbau ersetzen. (HAUSAUFGABE!)

3. Denotate

Ein *Modell* einer typenlogischen Sprache L (= $(Con_{L,a})_{a \in \boldsymbol{T}}$) ist ein Paar $M = (D,F)$, wobei D eine nicht-leere Menge ist und F: $Con_L \rightarrow \bigcup_{a \in \boldsymbol{T}} D_a$, so dass für alle $a \in \boldsymbol{T}$ und $c \in Con_a$ gilt:

$$F(c) \in D_a.$$

Sei $M = (D,F)$ ein Modell einer typenlogischen Sprache L (= $(Con_{L,a})_{a \in \boldsymbol{T}}$). Eine *M-Belegung* ist eine Funktion g: $Var \rightarrow \bigcup_{a \in \boldsymbol{T}} D_a$, so dass für alle $a \in \boldsymbol{T}$ und $x \in Var_a$ gilt:

$$g(c) \in D_a.$$

Jeder typenlogischen Formel $\alpha \in Fml_a$ wird relativ zu einem Modell M und einer M-Belegung g ein Denotat $[\![\alpha]\!]^{M,g}$ zugewiesen, und zwar so:

- $[\![x]\!]^{M,g} = g(x)$, falls $x \in Var_a$ (für irgendein $a \in \boldsymbol{T}$);
- $[\![c]\!]^{M,g} = F(c)$, falls $c \in Con_a$ (für irgendein $a \in \boldsymbol{T}$);
- $[\![\alpha(\beta)]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta]\!]^{M,g})$; APP
- $[\![\lambda x.\, \alpha]\!]^{M,g} = \{(u, [\![\alpha]\!]^{M,g[x/u]}) \mid u \in D_a\}$, falls $x \in Var_a$ (für irgendein $a \in \boldsymbol{T}$); ABS
- $[\![\alpha \equiv \beta]\!]^{M,g} = |\!- [\![\alpha]\!]^{M,g} = [\![\beta]\!]^{M,g} -\!|$. ID

In der Klausel ABS ist dabei (wie in der Prädikatenlogik) die *modifizierte* Belegung $g[^x/_u]$ definiert durch:

$$g[x/u](y) = \begin{cases} g(y), \text{ falls } y \neq x \\ u \text{ sonst} \end{cases}$$

Die in ID verwendete ("Nupsi"-) Notation '$|\!- \ldots -\!|$' gibt den Wahrheitswert der Aussage '…' an:

$$|\!- \ldots -\!| = \begin{cases} 1, \text{ falls } \ldots \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Definition

Sei L eine Sprache, $a \in \boldsymbol{T}$.

(i) $\alpha \in Fml_{L,a}$ und $\beta \in Fml_{L,a}$ *logisch äquivalent*, falls für alle Modelle M von L und alle M-Belegungen g gilt:

$$[\![\alpha]\!]^{M,g} = [\![\beta]\!]^{M,g}.$$

<u>Notation</u>: $\alpha \doteqdot \beta$.

$\doteqdot$ ist eine Äquivalenzrelation über $Fml_{L,a}$.

(ii) $\varphi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$ ist *gültig* gdw. für jedes L-Modell M und jede M-Belegungen g gilt: $[\![\varphi]\!]^{M,g} = 1$.

<u>Notation</u>: $\models \varphi$

Es gilt: $\alpha \doteqdot \beta$ gdw. $\models (\alpha \equiv \beta)$.

(iii) $\varphi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$ *folgt aus* $\Sigma \subseteq Fml_{L,\boldsymbol{t}}$ gdw. für jedes L-Modell M gilt:

wenn $[\![\psi]\!]^{M,g} = 1$ für alle $\psi \in \Sigma$ und M-Belegungen g,

dann ist auch $[\![\varphi]\!]^{M,g} = 1$ für alle M-Belegungen g.

<u>Notation</u>: $\Sigma \models \varphi$

Es gilt: $\models \varphi$ gdw. $\emptyset \models \varphi$.

(iv) $\varphi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$ *folgt aus* $\chi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$ gdw. $\{\chi\} \models \varphi$.

<u>Notation</u>: $\chi \models \varphi$

Es gilt (für φ und χ vom Typ $\boldsymbol{t}$): $\varphi \doteqdot \chi$ gdw. $\varphi \models \chi$ und $\chi \models \varphi$.

<u>4. Grundlegende Eigenschaften von Denotaten</u>

Koinzidenzlemma

Es seien $M_1 = (D, F_1)$ und $M_2 = (D, F_2)$ Modelle einer typenlogischen Sprache L (= $(Con_{L,a})_{a \in \boldsymbol{T}}$), g_1 und g_2 seien M_1-Belegungen (bzw. M_2-Belegungen, was dasselbe ist). Dann gilt für alle $a \in \boldsymbol{T}$ und $\alpha \in Fml_L$:

$$\text{Wenn: } [\![\beta]\!]^{M_1,g_1} = [\![\beta]\!]^{M_2,g_2} \text{ für alle } \beta \in Par(\alpha), \text{ dann: } [\![\alpha]\!]^{M_1,g_1} = [\![\alpha]\!]^{M_2,g_2}.$$

<u>⇒</u>: Für geschlossenen Formeln α gilt stets: $[\![\alpha]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M,h}$, d.h. das Denotat einer geschlossenen Formel hängt nie von der Belegung ab. Für parameterfreie Formeln α gilt stets: $[\![\alpha]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M',h}$, wenn $M = (D,F)$ und $M' = (D, F')$; d.h. das Denotat einer parameterfreien Formel hängt nur vom Individuenbereich ab.

[Globales] Kompositionalitätslemma
Sei L eine Sprache, $\alpha\in Fml$, $x\in Var_a$ und $\beta,\gamma\in Fml_{L,a}$ (für irgendein $a\in\boldsymbol{T}$). Dann gilt:

wenn $\beta \doteqdot \gamma$, dann ist $\alpha[^x/_\beta] \doteqdot \alpha[^x/_\gamma]$.

[Lokales] Substitutionslemma
Sei $M = (D, F)$ ein Modell einer Sprache L, g eine M-Belegung, $\alpha\in Fml$, $x\in Var_a$ und $\beta\in Fml_{L,a}$ (für irgendein $a\in\boldsymbol{T}$). Dann gilt:

wenn x frei ist für β in α, dann ist: $[\![\alpha[^x/_\beta]]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g[^x/_{[\![\beta]\!]^{M,g}}]}$.

Gesetze der Lambda-Konversion
Sei L eine Sprache, $\alpha\in Fml_L$, $x,y,z\in Var_a$ und $\beta\in Fml_{L,a}$ (für irgendein $a\in\boldsymbol{T}$).

(α) $(\lambda x.\ \alpha[^z/_x]) \doteqdot (\lambda y.\ \alpha[^z/_y])$, falls x und y frei für z in α sind.

(β) $(\lambda x.\ \alpha)(\beta) \doteqdot \alpha[^x/_\beta]$, falls x frei ist für β in α.

(η) $(\lambda x.\ \alpha(x)) \doteqdot \alpha$, falls $x\notin Fr(\alpha)$.

5. Schönfinkelei und Logische Konstanten
Jeder Menge $X\subseteq D$ entspricht ihre *charakteristische Funktion* (*über D*):

$\uparrow_D X = (X\times\{1\}) \cup ((D\backslash X)\times\{0\})$.

Wenn $a\in\boldsymbol{T}$, ist D_{at} die Menge der charakteristischen Funktionen über D_a; $D_{at} \sim \wp(D_a)$, insbesondere wegen der ("natürlichen") Bijektion:

$f_\downarrow = \{u\in D_a \mid f(u) = 1\}$.

NB: $[\![\lambda x.\ \varphi]\!]^{M,g}_\downarrow = \{u\in D_a \mid [\![\varphi]\!]^{M,g[^x/_u]} = 1\}$

Wenn a, $b\in\boldsymbol{T}$, ist $D_{a(bt)} \sim \wp(D_a\times D_b) \sim \wp(D_b\times D_a)$, insbesondere wegen der ("Schönfinkelschen") Bijektionen:

$\downarrow r = \{(x,y) \in D_a\times D_b \mid r(x)(y) = 1\}$;
$r\downarrow = \{(y,x) \in D_b\times D_a \mid r(x)(y) = 1\}$.

$r\downarrow$ wird in der Semantik bei transitiven Verben eingesetzt, $\downarrow r$ kommt bei Determinatoren zum Tragen; der Unterschiede in der Kodierung ergibt sich aus der syntaktischen Klammerung.

Die folgenden parameterfreien Formeln – die sog. *Logischen Konstanten* (die keine Konstanten der Typenlogik sind) – entsprechen den grundlegenden Ausdrucksmitteln der Aussagen- und Prädikatenlogik; da sie keine Konstanten enthalten, stehen sie in jeder typenlogischen Sprache L als Elemente von Fml_L zur Verfügung:

Formel	*Typ*	*Name*	*Abkürzung*
$((\lambda p.\ p) \equiv (\lambda p.\ p))$	$\boldsymbol{t}$	Verum	$\top$
$((\lambda p.\ p) \equiv (\lambda p.\ \top))$	$\boldsymbol{t}$	Falsum	$\bot$
$(\lambda p.\ (p \equiv \bot\ ))$	$(\boldsymbol{tt})$	Negation	$\neg$
$(\lambda P.\ (P \equiv (\lambda x.\ (x \equiv x)))$	$((\boldsymbol{a}\boldsymbol{t})\boldsymbol{t})$	Allquantor	$\forall$
$(\lambda p.\ (\lambda q.\ ((\lambda R.\ R(p)(q)) \equiv (\lambda R.\ R(\top)(\top)))))$	$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{tt})$	Konjunktion	$\wedge$

Erläuterungen
- In den obigen Formeln sind p und q Variablen des Typs $\boldsymbol{t}$, und R ist eine Variable des Typs $\boldsymbol{t(tt)}$. P und x sind dagegen Variablen der Typen $(\boldsymbol{at})$ und a – für jeweils beliebige $a\in\boldsymbol{T}$. Die

genaue Identität der Variablen spielt keine Rolle, da die Denotate der Formeln unabhängig von ihrer Wahl sind (Koinzidenzlemma).

- Es gilt: $\models \top$.
- Im Sinne der Schönfinkelei setzt das Falsum die Mengen {1} und {0,1} gleich und denotiert daher stets die 0.
- Die (modell- und belegungsunabhängige) Denotation der Negation kehrt die Wahrheitswerte um.
- Im Lichte des obigen Zusammenhangs zwischen Mengenabstraktion und λ-Operator denotiert der Allquantor in jedem Modell $M = (D,F)$ die (charakteristische Funktion der) Einermenge (der charakteristische Funktion) von D_a.
- Die Idee hinter der Definition der Konjunktion ist eine Version des Leibniz-Prinzips, wonach ein Paar von Wahrheitswerten mit dem Paar (1,1) zusammenfällt, wenn es Element derselben Mengen von Wahrheitswertpaaren ist. Wir werden später Gebrauch machen von einer alternativen, auf Tarski zurückgehenden Definition der Konjunktion, die weniger transparent (aber von den beteiligten Typen her einfacher) ist: $(\lambda p.(\lambda q.((\lambda f.\ (f(p) \equiv q)) \equiv (\lambda f.\ f(\top)))))$, wobei $f \in Var_{\boldsymbol{tt}}$.

Mit den Logischen Konstanten lässt sich die Prädikatenlogik erster (und übrigens auch höherer) Stufe als Teil der Typenlogik auffassen. Dazu identifiziert man prädikatenlogische *Primformeln* $R(t_1,\ldots,t_n)$ mit typenlogischen Formeln der Gestalt $\mathbf{R}(t_n)\ldots(t_1)$, wobei $t_1,\ldots,t_n$ Variablen oder Konstanten vom Typ $\boldsymbol{e}$ sind und jedes n-stellige Prädikate Konstanten des Typs $(\boldsymbol{e}^n\boldsymbol{t})$ entsprechen; dabei ist $(\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{et})$; und $(\boldsymbol{e}^{n+1}\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}^n\boldsymbol{t}))$. Den Rest erledigen die folgenden Abkürzungen, die für jede typenlogische Sprache L gelten:

Die Formel ...	*steht für ...*	*wobei ...*
$\neg\ \varphi$	$\neg\ (\varphi)$	$\varphi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$
$[\varphi \wedge \psi]$	$\wedge(\varphi)(\psi)$	$\varphi,\psi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$
$(\forall x)\ \varphi$	$\forall(\lambda x.\ \varphi)$	$\varphi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$, $x \in Var$*)
$[\varphi \vee \psi]$	$\neg[\neg\varphi \wedge \neg\psi]$	$\varphi,\psi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$
$[\varphi \rightarrow \psi]$	$[\neg\varphi \vee \psi]$	$\varphi,\psi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$
$[\varphi \leftrightarrow \psi]$**)	$[[\varphi \wedge \psi] \vee [\neg\varphi \wedge \neg\psi]]$	$\varphi,\psi \in \mathrm{Fml}_{L,\boldsymbol{t}}$
$(\exists x)\ \varphi$	$\neg\ (\forall x)\ \neg\ \varphi$	$\varphi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$, $x \in Var$*)

*) Die Notationskonvention gilt also für Variablen beliebiger Typen.

**) NB: $[\varphi \leftrightarrow \psi] \doteqdot [\varphi \equiv \psi]$

Für die obigen Übersetzungen lassen sich dann im Rahmen der "lokalen" Semantik von Abschnitt 3. die prädikatenlogischen Wahrheitsbedingungen herleiten. (HAUSAUFGABE!) Insbesondere gelten in jeder typenlogischen Sprache L die folgenden, aus der Prädikatenlogik vertrauten Äquivalenzen:

- $\neg\ \neg\ \varphi \doteqdot \varphi$ — $\varphi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$
- $[\varphi \wedge [\psi \wedge \chi]] \doteqdot [[\varphi \wedge \psi] \wedge \chi]$ — $\varphi,\psi,\chi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$
- $(\exists x)\ (\exists y)\ \varphi \doteqdot (\exists y)\ (\exists x)\ \varphi$ — $x,y \in Var$, $\varphi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$
- $(\exists x)\ [\varphi \wedge (\exists y)\ \psi\ ] \doteqdot (\exists x)\ (\exists y)\ [\varphi \wedge \psi\ ]$ — $x,y \in Var$, $\varphi,\psi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$, $y \notin Fr(\varphi)$
- $(\exists x)\ [\varphi \vee \psi\ ] \doteqdot [(\exists x)\ \varphi \vee (\exists x)\ \psi\ ]$ — $x,y \in Var$, $\varphi,\psi \in Fml_{L,\boldsymbol{t}}$

6. Definierbarkeit und Invarianz

Für das folgende sei D eine beliebige, nicht leere Menge.
Jede *Permutation* π von D [= Bijektion von D nach D] lässt sich wie folgt zu einer Familie von Permutationen $(\pi_a)_{a\in\boldsymbol{T}}$ von D_a erweitern:

$\pi_{\boldsymbol{e}}(x) = \pi(x)$, für jedes $x\in D_{\boldsymbol{e}}$;

$\pi_{\boldsymbol{t}}(u) = u$, für jedes $u\in D_{\boldsymbol{t}}$;

$\pi_{ab}(f) = \{(\pi_a(x), \pi_b(y)) \mid f(x) = y\}$, für jedes $f\in D_{\boldsymbol{ab}}$.

Danach gilt stets: $\pi_b(f(x)) = \pi_{ab}(f)(\pi_a(x))$, d.h. jedes π_{ab} ist ein *Homomorphismus*; da zudem die π_a bijektiv sind und Definitions- und Wertebereich zusammenfallen, handelt es sich um *Automorphismen*.

Achtung: nicht jede Bijektion über D_a ist ein Automorphismus!

Definition

Es seien $a\in\boldsymbol{T}$, $x\in D_a$ und $y\in D_a$.

(A) x und y sind *strukturgleich* [in a] gdw. es eine Permutation π von D gibt, so dass gilt: $\pi_a(x) = y$. Notation: $x \approx_{a,D} y$. [Die Indizes können weggelassen werden, wenn keine Verwechselungsgefahr besteht.]

(B) $\mathbf{L}_a := \{x\in D_a \mid \pi_a(x) = x\}$ ist die Menge der [Automorphismus-] *invarianten* Objekte [des Typs a]

[$\Rightarrow x \in\mathbf{L}_a$ gdw. $|x|_\approx = \{x\}$]

Die Begriffe lassen sich auf *Isomorphismen* von D in beliebige gleichmächtige Mengen verallgemeinern, was aber für den Invarianzbegriff keinen Unterschied macht.

Beobachtungen

- Die identische Abbildung $\iota = \{(x,x) \mid x\in D\}$ ist eine Permutation von D; für jedes $a\in\boldsymbol{T}$ gilt: $\iota_a = \{(x,x) \mid x\in D_a\}$.
- Wenn π eine Permutation von D ist, dann auch die inverse Abbildung $\pi^{-1} = \{(\pi(x),x) \mid x\in D\}$.
- Wenn π_1 und π_2 Permutationen von D sind, dann auch die Verknüpfung $\pi_1[\pi_2]: = \{(x, \pi_1(\pi_2(x)) \mid x\in D\}$.
- $\approx_{a,D}$ ist für jedes a eine Äquivalenzrelation.
- $\mathbf{L}_{\boldsymbol{e}} = \emptyset$ gdw. $\overline{\overline{D}} \geq 2$.
- Wenn $\overline{\overline{D}} = 1$, ist $\mathbf{L}_a = D_a$ für alle Typen $a\in\boldsymbol{T}$.

Satz 1

Sei $\alpha\in Fml_{L,a}$ eine parameterfreie Formel eines Typs a. Dann gilt für jedes Modell $M = (D,F)$ und jede M-Belegung g: $[\![\alpha]\!]^{M,g}$ ist invariant in a.

Notation: $[\![\alpha]\!]^{D}$.

[$\Rightarrow$ Die Logischen Konstanten sind invariant!]

Beweisidee

Man zeigt per Induktion über der Formelaufbau, dass für jedes $\alpha\in Fml_{L,a}$, jedes Modell $M = (D,F)$, jede M-Belegung g und jede Permutation π gilt:

$$\pi([\![\alpha]\!]^{M,g}) = [\![\alpha]\!]^{M_\pi,g_\pi}$$

Dabei ist $M_\pi = (D,F_\pi)$, wobei für alle Konstanten c gilt: $F_\pi(c) = \pi(F(c))$; analog ist $g_\pi(x) = \pi(g(x))$, wenn x eine Variable ist. Der Satz folgt dann mit dem Koinzidenzlemma.

Diese Konstruktion ist auch aus unabhängigen, sprachphilosophischen Gründen interessant: Hilary Putnam hat (prädikatenlogische) Permutationsmodelle M_π verwendet, um zu zeigen, dass sich Referenz nicht mit Wahrheitsbedingungen erfassen lässt ("inscrutability of reference").

Korollar
Es gibt keine paramterfreien Formeln des Typs $\boldsymbol{e}$.

Definitionen
- Ein Objekt $u \in D_a$ ist [auf D] *definierbar* [in $a \in \boldsymbol{T}$], falls es eine parameterfreie typenlogische Formel $\alpha \in Fml_{L,a}$ gibt, so dass $[\![\alpha]\!]^D = u$; in diesem Fall nennt man α eine *Definition* von u.

Vorsicht: Es geistern eine Reihe anderer Definierbarkeitsbegriffe durch die logische Literatur!
- Die Menge der *Booleschen* Typen ist die kleinste Menge $\boldsymbol{B}$, für die gilt:
  $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}$;
  wenn $a \in \boldsymbol{T}$ und $b \in \boldsymbol{B}$, dann ist $(ab) \in \boldsymbol{B}$.

Boolesche Typen b haben immer die Gestalt $b = (b_1\ (\ \dots\ (b_n\ \boldsymbol{t})\ \dots)$ – abgekürzt: $[b_1\ \dots\ b_n]$; dabei sind $b_1,\dots,b_n$ beliebige Typen und n heißt die *Länge* des Typs b.
- Die Menge der *globalen* Typen ist die kleinste Menge $\boldsymbol{G}$, für die gilt:
  $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{G}$;
  wenn $a \in \boldsymbol{G}$ und $b \in \boldsymbol{G}$, dann ist $(ab) \in \boldsymbol{G}$.

$\Rightarrow$ Globale Typen sind immer auch Boolesch!

Beobachtung
$\mathbf{L}_a = D_a$, wenn a ein globaler Typ ist. (WIESO?)

Satz 2
$\mathbf{L}_b \neq \emptyset$, wenn b ein Boolescher Typ ist.
Beweis
Für jeden Booleschen Typ $b = [b_1,\dots b_m]$ lassen sich zwei Definitionen $\top_b$ und $\bot_b$ in Fml_b angeben, so dass $[\![\top_b]\!]^D \neq [\![\bot_b]\!]^D$:
- $\top_b = (\lambda z_1.\ \dots\ (\lambda z_m.\ \top)\ \dots)$
- $\top_b = (\lambda z_1.\ \dots\ (\lambda z_m.\ \bot\ )\ \dots)$,

wobei $z_1, \dots, z_m$ wie im Beweis von Lemma (Z) sind und $\top$ und $\bot$ wie in Abschnitt 5.

Lemma ("Effability")
Wenn $D = \{u_1,\dots,u_n\}$ endlich ist, $M=(D,F)$ ein Modell, g eine M-Belegungen und $g^* = g[^{x_1}/_{u_1}]\dots[^{x_n}/_{u_n}]$. Dann gilt für alle Typen $a \in \boldsymbol{T}$ und alle $U \in D_a$:
- Es gibt eine Formel $\mu_U \in Fml_{a\boldsymbol{t}}$, so dass $Par(\mu_U) \subseteq \{x_1,\dots,x_n\} \subseteq Var_{\boldsymbol{e}}$ und:

(E) $\quad [\![\mu_U]\!]_{\downarrow}^{M,g^*} = \{U\}$
- Wenn $a \in \boldsymbol{B}$, dann gibt es eine Formel $\alpha_U \in Fml_a$, so dass $Par(\alpha_U) \subseteq \{x_1,\dots,x_n\} \subseteq Var_{\boldsymbol{e}}$ und:

(Z) $\quad [\![\alpha_U]\!]^{M,g^*} = U$

Beweisskizze vgl. web.uni-frankfurt.de/fb10/zimmermann/Brief_JvB.pdf
ad (E): Man argumentiert induktiv über den Aufbau des Typs a. Für den (Induktions-) Anfang reichen die Formeln $(\lambda x^{\boldsymbol{t}}.\ x)$, $\neg$ (wie oben definiert) bzw. $(\lambda x^{\boldsymbol{e}}.\ (x \equiv x_i))$, wobei $1 \leq i \leq n$ und $x \in Var_{\boldsymbol{e}} \setminus \{x_1,\dots,x_n\}$. Wenn $F \in D_{ab}$, ist $D_a = \{X_1,\dots,X_m\}$ endlich (Mengenlehre) und nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\mu_{X_1},\dots, \mu_{X_m}$, die (E) erfüllen. Ebenso gibt es nach I.V. für

jedes Element von $D_b = \{Y_1,\ldots,Y_k\}$ entsprechende Formeln $\mu_{Y_1},\ldots, \mu_{Y_k}$, also insbesondere auch für $F(X_1),\ldots,F(X_m)$. μ_F wird daher gleichgesetzt mit:

$$(\lambda f^{ab}. (\forall x^a) [[\mu_{X_1}(x) \rightarrow \mu_{F(X_1)}(f(x))] \wedge \ldots \wedge [\mu_{X_m}(x) \rightarrow \mu_{F(X_m)}(f(x))]]$$

ad (Z): Sei $a = [b_1,\ldots b_m]$ ein Boolescher Typ und $F \in D_a$. Für jedes m-Tupel

$$(X_1,\ldots,X_m) \in D_{b_1} \times \ldots \times D_{b_m}$$

lässt sich mit Hilfe von (E) zunächst eine Formel $\varphi_{(X_1,\ldots,X_m)} \in Fml_{\boldsymbol{t}}$ konstruieren:

$$[\mu_{X_1}(z_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{X_m}(z_m)]$$

wobei $z_1,\ldots, z_1$ Variablen der Typen $b_1,\ldots, b_m$ sind (und nicht in der Menge $\{x_1,\ldots,x_n\}$). Sei nun $\Phi_F = \{\varphi_{(X_1,\ldots,X_m)} \mid F(X_1)\ldots(X_m) = 1\}$. Da D_a endlich ist, ist auch Φ_F endlich und hat also die Gestalt $\Phi_F = \{\varphi_1,\ldots, \varphi_k\}$. α_F ist dann:

$$(\lambda z_1. \ldots (\lambda z_m. [\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k])\ldots).$$

Satz 3

Wenn D_a endlich ist und $U \in \mathbf{L}_a$, dann die charakteristische Funktion von $\{U\}$ definierbar.

Beweisskizze

Es seien $x_1,\ldots,x_n$ und μ_U wie im Effability Lemma. Dann lässt sich U durch die folgende (parameterfreie) Formel definieren:

$$(\lambda X^a. (\exists x_1) \ldots (\exists x_n) [\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \wedge \mu_U(X)])$$

Beobachtungen

- $\mathbf{L}_{et} = \{[\![\top_{et}]\!]^D, [\![\bot_{et}]\!]^D\}$
- Wenn $\overline{\overline{D}} \geq 2$, ist $\mathbf{L}_{ee} = \{\iota\}$. (Und sonst?)
- Wenn $\overline{\overline{D}} \geq 2$, ist $\overline{\overline{\mathbf{L}_{e(et)}}} = 4$. (Wie sehen die Elemente aus?)
- Wenn $b_1,\ldots,b_n \in \boldsymbol{B}$, dann ist $\mathbf{L}_{(b_1\ldots(b_n,e)\ldots)} = \emptyset$.

Satz 4

Sei $a \in T$, $Q \in \mathbf{L}_{(et)t}$ und $D \in \mathbf{L}_{(et)((et)\,t)}$. Dann gilt für alle $X, Y, U, V \in D_{(et)}$:

- Wenn $\overline{\overline{X_\downarrow}} = \overline{\overline{Y_\downarrow}}$ und $\overline{\overline{\wp(D) \setminus X_\downarrow}} = \overline{\overline{\wp(D) \setminus Y_\downarrow}}$, dann ist $Q(X) = Q(Y)$.
- Wenn $\overline{\overline{U_\downarrow \setminus X_\downarrow}} = \overline{\overline{V_\downarrow \setminus Y_\downarrow}}$, $\overline{\overline{U_\downarrow \cap X_\downarrow}} = \overline{\overline{V_\downarrow \cap Y_\downarrow}}$, $\overline{\overline{X_\downarrow \setminus U_\downarrow}} = \overline{\overline{Y_\downarrow \setminus V_\downarrow}}$ und $\overline{\overline{\wp(D) \setminus (U_\downarrow \cup X_\downarrow)}} = \overline{\overline{\wp(D) \setminus (V_\downarrow \cup Y_\downarrow)}}$, dann ist $D(U)(X) = D(V)(Y)$.

Beweise

… findet man in der einschlägigen Literatur zur Quantorensemantik.

Korollare

- Wenn D unendlich ist, ist die Menge der definierbaren Objekte vom Typ $((\boldsymbol{et})\boldsymbol{t})$ überabzählbar.

… denn für jede Menge M von natürlichen Zahlen gibt es einen Quantor Q_M, der die (charakteristischen Funktionen der) Teilmengen von D charakterisiert, deren Kardinalität in M ist. Nach Satz 4 sind diese Q_M invariant. Da aber für $M \neq M'$ stets $Q_M \neq Q_{M'}$, gibt es (nach dem Satz von Cantor) überabzählbar viele von ihnen.

- Wenn D unendlich ist, ist nicht jedes Objekt in $\mathbf{L}_{(et)t}$ definierbar

… denn es gibt nur abzählbar viele parameterfreie Formeln des Typs $(\boldsymbol{et})\boldsymbol{t}$.