Grundzüge der Semantik*)

T. E. Zimmermann, Ffm

*) Begleitskript zum gleichnamigen Proseminar im SS 02 und WS 02/03.

0. Hintergrund

Dieser Kurs führt in die linguistische Semantik ein – genauer: in die *logische Semantik*. Das allgemeine Thema, die zentralen Fragstellungen sowie ein paar grundlegende Betrachtungen und Begriffsbildungen sollten bereits aus der Linguistik-Einführung bekannt sein. Die für diesen Kurs wichtigsten Hintergrundannahmen werden im vorliegenden Abschnitt kurz zusammen gestellt.[1]

0.1 Semantik und Pragmatik

Gegenstand der Semantik ist die wörtliche Bedeutung sprachlicher Ausdrücke, wobei unter letzteren sowohl einzelne Wörter als auch insbesondere komplexe Phrasen, Sätze sowie Texte und Dialoge zu verstehen sind. Die wörtliche Bedeutung ist das, was ein Ausdruck sozusagen von Haus aus bedeutet – die Bedeutung, die er nur aufgrund der sprachlichen Gegebenheiten hat, nicht aufgrund seiner Verwendung in einem bestimmten Kontext. Während sich z.B. in Willy Millowitschs gesungener Äußerung von (1)[2] das Subjekt im Sinne von (1') auf die gesamte Menschheit beziehen mag, spricht der ehemalige Kölner Fraktionsvorsitzende Rüthers mit seiner Äußerung desselben Satzes nur von seinen engsten Umkreis, also etwa im Sinne von (1"):

(1) **Wir sind alle kleine Sünderlein.**
(1') **Die Menschen sind alle kleine Sünderlein.**
(1") **Die Kölner SPD-Abgeordneten sind alle kleine Sünderlein.**

Wer sich mit seiner Äußerung des Personalpronomens **wir** auf *wen* bezieht, ob also (1) im Sinne von (1'), (1") oder sonstwie verstanden wird, ergibt sich aus den Umständen der Äußerung – dem *Kontext* – und ist insofern keine Frage der Semantik, sondern der Pragmatik als Wissenschaft von der Sprachverwendung und der nicht-wörtlichen Bedeutung. Andererseits bezeichnet sich jeder, der (1) äußert, damit selbst als Sünder – ganz gleich, auf welche Gruppe er sich beziehen mag; denn der Sprecher *muss* sich mit **wir** auf eine Gruppe beziehen, der er selbst angehört – das gebietet die wörtliche Bedeutung von **wir**. Dass sich der Sprecher mit (1) auf sich selbst bezieht, ist somit ein semantisches Faktum.

Im Unterschied zu des Volksschauspielers Äußerung von (1) ist die des Politikers ironisch, wenn er damit zum Ausdruck bringen will, dass es sich beim Kölner Klüngel gerade nicht um *kleine* Sünder handelt. Auch der Aspekt der Ironie geht über die rein wörtliche Bedeutung des Satzes (1) hinaus und fällt somit in den Bereich der Pragmatik. Das Gleiche gilt für andere rhetorische Figuren und Stilmittel wie Übertreibung und Metapher. Zu den zentralen nicht-wörtlichen Phänomenen, die in der Pragmatik abgehandelt werden, gehören auch die sog. (konversationellen) *Implikaturen*; das sind über das Wortwörtliche hinaus gehende Schlüsse, die ein Sprecher dem Hörer durch Umstände oder Formulierung seiner Äußerung nahelegt. Wenn in einem abschließenden Untersuchungsbericht über eine Spendenaffäre (2) zu lesen ist, versteht man als Leser, dass sich zumindest *nicht alle* Abgeordneten fiktive Spenden haben quittieren lassen; denn sonst hätte es der Bericht wohl kaum verschwiegen. Man schließt also von der (schriftlichen) Äußerung von (2) auf die Wahrheit von (2'):

(2) **Mehrere Abgeordnete haben fingierte Spendenquittungen eingereicht.**
(2') **Nicht alle Abgeordneten haben fingierte Spendenquittungen eingereicht.**

[1] Mehr erfährt man z.B. im Semantik-Skript aus der Linguistik-Einführung: http://www.uni-frankfurt.de/fb10/zimmermann/WS0102.pdf

[2] Für die, die die Melodie nicht mehr im Ohr haben: http://www.amazon.de/exec/obidos/clipserve/B0000250Y8001001/302-9770867-9250430

Andererseits kann man aus dem reinen Wortlaut von (2) nicht schließen, dass auch nur ein einziger Abgeordneter eine weiße Weste hat. Denn (2) könnte ja beispielsweise aus einem Zeitungsartikel stammen, der die ersten Korruptionsfälle ans Tageslicht gebracht hat. In diesem Fall wird sich die Leserin hüten, von (2) auf (2') zu schließen. Und wenn sich später herausstellt, dass in der Tat *alle* Abgeordneten falsche Quittungen abgerechnet haben, wäre (2) damit auch keineswegs widerlegt. Lediglich die besonderen Umstände einer umfassenden abschließenden Untersuchung legen nahe, (2) so zu verstehen, dass nicht alle Abgeordneten betroffen sind. Wie also schon bei (1) spielt für den Schluss von (2) auf (2') – eine sog. *skalare Implikatur* – der Kontext, in dem die Äußerung gemacht wird, eine entscheidende Rolle. Die genaue Interaktion zwischen wörtlicher Bedeutung und Hintergrundwissen ist für das Zustandekommen solcher und anderer Implikaturen wichtig und macht einen Großteil der Pragmatik aus – hat aber in der Semantik nichts zu suchen.

Ob Untersuchungsbericht oder Enthüllungsjournalismus, in beiden Fällen geht es um Abrechnungen beim Finanzamt. Aber ist auch das Teil der wörtlichen Bedeutung des Satzes? Natürlich nicht. Der Satz könnte ebensogut gebraucht werden, wenn es um Quittungen für die Abrechnungsstelle des Parlaments ginge (mal angenommen, es gäbe eine solche). Seine wörtliche Bedeutung lässt sogar offen, ob jeder Abgeordnete, von dem in ihm die Rede ist, seine Spendenquittungen bei derselben Stelle eingereicht hat. Immerhin könnte es sein, dass die einen das Finanzamt, die anderen aber das Parlament hintergangen haben; und es könnte sein, dass (2) eben diese vielfältigen Betrugsvorgänge beschreibt. Wohlgemerkt: dass die genannten Abgeordneten ihre Quittungen *irgendwo oder bei irgendwem* eingereicht haben, macht bereits der Wortsinn, die wörtliche Bedeutung, von (2) klar. Aber *wo* das ist oder *bei wem*, bleibt offen und kann allenfalls aus dem Kontext erschlossen werden.

Die Beispiele legen das folgende Abgrenzungskriterium zwischen wörtlicher und nicht-wörtlicher Bedeutung nahe:

> *Invarianzkriterium*
> Was zur wörtlichen Bedeutung eines Ausdrucks gehört, muss *kontextinvariant* sein, d.h. es darf nicht von Kontext zu Kontext, in dem der Ausdruck geäußert wird, variieren.

Zur wörtlichen Bedeutung von (1) gehört kontextinvariant, dass der Sprecher sich auf eine Gruppe bezieht, der er selbst angehört. Auf welche Gruppe sich der Sprecher bezieht, variiert von Kontext zu Kontext und ist daher kein Bestandteil der wörtlichen Bedeutung. Zur wörtlichen Bedeutung von (2) gehört, dass mehr als ein Abgeordneter Quittungen eingereicht hat. Aber wo diese Abgeordneten ihre Quittungen eingereicht haben – beim Finanzamt, beim Parlament, jeder woanders, etc. – das ist wieder Sache des Kontexts. Und es ist auch Sache des Kontexts, ob die Äußerung so gemeint ist und verstanden werden darf, dass sie die Richtigkeit von (2') impliziert. Da der letztgenannte Schluss und der implizite Adressat der Quittungseinreichungen mit dem Kontext variieren, handelt es sich nicht um Teile der wörtlichen Bedeutung.

Das Invarianzkriterium erweist sich oft als nützlich, wenn es darum geht, zu entscheiden, ob ein bestimmter Bedeutungsaspekt aus der Semantik ausgeblendet werden darf; wir werden es gelegentlich dafür bemühen. Aber es handelt sich um ein vages Kriterium, dessen Anwendung nicht immer eindeutig ist. (Mehr dazu in einer Übungsaufgabe!) Außerdem funktioniert es nur in einer Richtung. *Wenn* ein Bedeutungsaspekt von Kontext zu Kontext variiert, *dann* gehört er nach diesem Kriterium nicht zur wörtlichen Bedeutung. Daraus ist aber nicht zu schließen, dass alle invarianten Aspekte automatisch zur wörtlichen Bedeutung gehören. Denn über invariante Aspekte im allgemeinen sagt das Kriterium nichts aus! Und tatsächlich gibt es Bedeutungsaspekte, die in allen Kontexten stabil sind, ohne dass sie zur wörtlichen Bedeutung gerechnet werden. So gibt eine Sprecherin mit der Verwendung eines Wortes wie **Köter** zu verstehen, dass sie von einer Spezies (oder von einzelnen Vertretern derselben) redet, die sie persönlich nicht mag. Darin unterscheidet sich das Substantiv **Köter** vom Substantiv **Hund**. Doch werden solche Bewertungen üblicherweise nicht zur wörtlichen Bedeutung gerechnet. Der Grund dafür ist theoretischer Natur. Wenn man Sprecherbewertungen von der wörtlichen Bedeutung abtrennt, kann man besser erklären, wie die beiden zusammenhängen. Wir werden in Kapitel 7 noch einmal kurz auf diesen Punkt zurück kommen.

Ein Bereich, in dem die Abgrenzung der wörtlichen von der nicht-wörtlichen Bedeutung Probleme bereitet, ist der der sprachlichen Handlungen oder *Sprechakttypen*. Zunächst einmal lässt sich bei vielen Sätzen feststellen, dass sie nur auf eingeschränkte Weise verwendbar sind:

(3) **Du hast noch keine Pizza gegessen.**
(3') **Wieso isst du keine Pizza?**
(3") **Iss Pizza!**

Mit (3) kann man eine Behauptung aufstellen oder etwas mitteilen; mit (3') kann man jemanden was fragen; und mit (3") kann man jemandem zum Pizzakonsum auffordern oder raten. Gehören diese Möglichkeiten zur wörtlichen Bedeutung der drei Sätze? Immerhin kann man auch (3) als Aufforderung und (3') als Ratschlag verstehen. Aber das spricht nicht dagegen, dass auch in diesen Fällen (3) und (3') behauptend (oder feststellend) bzw. fragend verwendet werden; Aufforderung und Ratschlag wären also *indirekte* Sprechhandlungen. Das Invarianzkriterium schließt nicht aus, dass das Verwendungspotenzial eines Satzes Teil seiner wörtlichen Bedeutung ist.

Fassen wir zusammen. Die Semantik hat es nur mit der wörtlichen Bedeutung sprachlicher Ausdrücke zu tun. Insbesondere fallen Bedeutungsaspekte, die mit dem Äußerungskontext variieren, in den Bereich der Pragmatik. Weitere Phänomene, die aus der Semantik ausgeschlossen werden, sind mit dem Gebrauch einzelner Wörter einher gehende Bewertungen sowie die für einzelne Satzarten typischen Verwendungsmöglichkeiten.

0.2 Lexikalische und logische Semantik

Die Bedeutungen einzelner Wörter werden uns im folgenden nur am Rande beschäftigen. Sie bilden den Gegentand der *lexikalischen Semantik*. Im Mittelpunkt dieses Kurses stehen dagegen die Bedeutungen komplexer Ausdrücke, also solcher, die aus mehr als einem Wort bestehen. Sie bilden den Gegentand der *logischen Semantik*. Dabei wird uns vor allem die Frage beschäftigen, wie sich die Bedeutung komplexer Ausdrücke aus ihrer Grammatik und den Bedeutungen der Wörter, aus denen sie bestehen, ergibt. Es wird sich zeigen, dass die Beantwortung dieser Frage im allgemeinen keine detaillierten Kenntnisse der lexikalischen Semantik erfordert.

Lexikalische und logische Semantik unterscheiden sich sowohl hinsichtlich der für ihren Bereich charakteristischen semantischen Phänomene als auch in Bezug auf die für ihre Untersuchung erforderlichen Methoden. Um einen Eindruck von diesem Unterschied zu vermitteln, gehen wir in diesem Abschnitt kurz auf einige Fragestellungen der lexikalischen Semantik ein.

Wortbedeutungen lassen sich leichter studieren, wenn man sie nicht isoliert betrachtet, sondern zu einander in Beziehung setzt. So ergibt ein Vergleich der Wörter **Handwerker** und **Maurer**, dass letzteres eine speziellere Bedeutung hat als ersteres, während beide allgemeiner als **Polier**, aber spezieller als **Person** sind. Die Beziehung zwischen Speziellerem und Allgemeinerem ist dabei so zu verstehen, dass die allgemeinere Bezeichnung auf alles zutrifft, auf das auch die speziellere zutrifft, aber nicht umgekehrt: wenn man jemanden zu Recht als **Polier** bezeichnen kann, dann kann man ihn auch einen **Maurer** schimpfen. Diese auf den (wörtlichen) Bedeutungen der einzelnen Wörter beruhende Beziehung bezeichnet man in der lexikalischen Semantik als *Hyponymie*: **Polier** ist ein Hyponym zu **Maurer**, das seinerseits ein Hyponym zu **Handwerker** ist, welches wiederum ein Hyponym zu **Person** ist. Hyponymie ist eine *Sinnrelation*, eine Beziehung zwischen Ausdrücken, die allein aufgrund der wörtlichen Bedeutung dieser Ausdrücke besteht. Weitere Beispiele für Sinnrelationen [und Wörter, die in ihnen zueinander stehen,] sind: *Synonymie*, die zwischen Wörtern besteht, die dieselbe wörtliche Bedeutung haben [**obwohl** : **obgleich**]; *Konverse*, die zwischen Ausdrücken besteht, die zueinander gegensinnige Beziehungen ausdrücken [**Lehrer** : **Schüler**]; *Inkompatibilität*, die zwischen Substantiven besteht, die sich niemals auf dasselbe Ding beziehen können [**Gedanke** : **Buch**].

Sinnrelationen bestehen nicht nur zwischen Wörtern. Auch komplexe Ausdrücke können Synonyme (4), Hyponyme (4'), Konversen (4'') zueinander bzw. miteinander inkompatibel (4''') sein:

(4) **lila Apfelsine** : **violette Orange**
(4') **kleiner grüner Kaktus** : **grüner Kaktus**
(4'') **zwei Jahre älter** : **zwei Jahre jünger**
(4''') **nur sonntags** : **werktags und samstags**

Die Beispiele zeigen, dass sich die Sinnrelationen zwischen komplexen Ausdrücken nicht allein aus denen zwischen den beteiligten Wörtern ergeben. In (4) überträgt sich die Synonymie zumindest nicht in dem Sinne, als alle Wörter des linken Ausdrucks mit dem des rechten synonym wären; denn **lila** und **violett** sind zwar Synonyme, ebenso **Orange** und **Apfelsine**[3], nicht aber **lila** und **Apfelsine**. Immerhin stehen die Wörter in (4) paarweise in einer Synonymie-Beziehung. Bei der Hyponymie in (4') ist das nicht so. Denn die einzige nennenswerte Sinnrelation, die hier zwischen einzelnen Wörtern in Frage kommt, ist wieder die der Synonymie – wie sie trivialerweise zwischen den beiden Vorkommen von **grüner** besteht – aber diese Synonymie überträgt sich gerade nicht auf die gesamten Ausdrücke; durch Hinzunahme des Adjektiv **klein** wird aus der Synonymie eine Hyponymie. Bei (4'') hingegen ändert die Hinzunahme der Angabe **zwei Jahre** nichts an der Konversen-Beziehung zwischen **älter** und **jünger**. In (4''') schließlich wird die Inkompatibilität offenbar wesentlich durch die logischen Wörter **nur** und **und** hervorgerufen; denn **sonntags** allein schließt weder **werktags** noch **samstags** aus.

Die Sinnrelationen zwischen komplexen Ausdrücken ergeben sich also nicht unmittelbar aus denen zwischen den beteiligten Wörtern. In der logischen Semantik hat man Methoden entwickelt, Sinnrelationen wie in (4) – (4''') als Ergebnisse einer Interaktion von Wortbedeutung und grammatischer Konstruktion zu beschreiben. Dabei ergeben sich quasi nebenbei natürliche Klassifikationen lexikalischer Sinnrelationen. Wir werden im Laufe des Kurses immer wieder darauf zurück kommen. Fürs Erste bleibt nur festzuhalten, dass die Darstellung von Sinnrelationen sich vom nicht-lexikalischen auf den lexikalischen Bereich übertragen lässt, nicht jedoch umgekehrt.

Ein weiteres im lexikalischen Bereich häufig anzutreffendes Phänomen ist die Mehrdeutigkeit oder, wie man in der Semantik sagt, die *Ambiguität*. Damit ist der Umstand gemeint, dass einzelne Wörter oder Wortformen mehr als eine Bedeutung haben können. Die Form **weiß** kann eine Verbform sein oder die prädikative Form[4] eines Adjektivs. Das Substantiv **Ball**

[3] Der Fall liegt insofern etwas kompliziert, als wahrscheinlich so gut wie niemand sowohl **lila** als auch **violett** *aktiv* verwendet. (Bei **Orange** und **Apfelsine** ist das nach meiner Erfahrung anders.) Aber normalerweise *verstehen* Sprecher des Deutschen beide Adjektive, unterstellen dabei allerdings oft einen Unterschied: wer **lila** verwendet, meint etwa, dass sich **violett** auf einen helleren Farbton bezieht. Empirische Untersuchungen legen dagegen nahe, dass beide Wörter von den Sprechern, die sie aktiv verwenden, stets auf dieselbe Farbe bezogen werden.

[4] Die *prädikative* Form ist die Form, die in Sätzen der Gestalt *x* **ist** ADJEKTIV benutzt wird – im Gegensatz zu den *attributiven* Formen, die zur Modifikation von Substantiven dienen (**weißes Tuch**). Deutsche Adjektive haben immer nur eine prädikative Form (anders als etwa im Französischen) und in der Regel mehrere attributive. (Eine Ausnahme zu dieser Regel ist das Adjektiv **lila**.)

kann sich in all seinen Formen (**Balls**, **Bällen** etc.) auf kugelförmige Spielutensilien beziehen oder auf Tanzveranstaltungen größeren Ausmaßes. In diesen Fällen ist es offensichtlich, dass es sich jeweils um zwei verschiedene Wörter handelt, die zufälligerweise gleich ausgesprochen und geschrieben werden. Um sie voneinander zu unterscheiden, kann man z.B. Indizes verwenden ($\textbf{Ball}_1$, $\textbf{weiß}_{\text{3. Ps. Sg. Ind. Präs. v. }\textbf{wissen}}$ etc.) Jedes dieser *disambiguierten* Wörter hat eine eigene, im Lexikon zu spezifizierende Bedeutung.

Bei diesen Fällen von lexikalischer Ambiguität handelt es sich um *Homonyme*, also Wörter oder Wortformen, die mehrere nicht – oder jedenfalls nicht auf erkennbare Weise – miteinander zusammenhängende Bedeutungen haben. Doch nicht alle mehrdeutigen Wörter sind Homonyme. Mindestens ebenso häufig findet man solche, bei denen die eine Bedeutung aus der anderen abgeleitet erscheint oder beide einen gemeinsamen Kern besitzen:

- Das Substantiv **Glas** kann sich auf ein Material wie auf einen Typ von Trinkgefäß beziehen, aber es gibt hier einen offensichtlichen Zusammenhang: typischerweise besteht ein als **Glas** bezeichnetes Trinkgefäß aus dem als **Glas** bezeichneten Material. Trotz dieses engen Zusammenhangs handelt es sich um zwei verschiedene Wörter (s. Übungsaufgabe).
- Das Adjektiv **kurz** kann auf Strecken wie auf Zeiträume bezogen werden, und auch hier gibt es einen mehr oder weniger offensichtlichen Zusammenhang: ein kurzer Zeitraum ist ein solcher, der sich als kurze Strecke in die räumliche Dimension übertragen lässt.
- Das Adjektiv **scharf** kann als Gegensatz (oder *Antonym*[5]) zu **mild** wie zu **stumpf** verwendet werden. Auch hier scheint es einen Zusammenhang zwischen den beiden Lesarten zu geben, wenn dieser auch nicht so leicht zu fassen ist.

Die Verwendung von Materialbezeichnungen für Gegenstände aus dem betreffenden Material gibt es häufiger: **Gips**, **Papier**, **Leder**. In der lexikalischen Semantik spricht man hier von einer *metonymischen Polysemie*[6]. Der Zusammenhang zwischen den Lesarten von **kurz** ist dagegen ein *metaphorischer*: der Raum dient als Bild für die Zeit. Diese Art von erstarrter Metapher[7] ist äußerst häufig, und das nicht nur im Deutschen. So lassen sich viele räumliche Präpositionen (**in**, **vor**, **zwischen**,…) auch in einem zeitlichen Sinn verwenden. Aber auch andere Metaphern liegen lexikalischen Ambiguitäten zugrunde: **Untergang** [eines Schiffes vs. Ruin], **Kreuzung** [von Linien und Arten], **Schmalz** [Fett vs. Kitsch]. Das dritte der obigen Beispiele basiert auf einer Übertragung vom Tast- auf den Geschmackssinn und illustriert damit die *synästhetische Polysemie*, die Metaphorik der Wahrnehmungsdimensionen, wie man sie auch bei **hell** [Farbe vs. Klang] und **rau** [Oberfläche vs. Stimme] vorfindet.

Neben diesen Arten von Polysemien gibt es noch eine ganze Reihe anderer möglicher Zusammenhänge zwischen den Lesarten einzelner Wörter. Diese Vielfältigkeit stellt die lexikalische Semantik vor ein großes Problem. Denn es gibt bislang weder eine umfassende Klassifikation aller Typen von Polysemie noch eine Theorie über ihr Auftreten. Dennoch scheint klar zu sein, dass es sich nicht um ein vollkommen wildwüchsiges Phänomen handelt, sondern dass es vielmehr – sprachübergreifende – Regelmäßigkeiten in der Auffächerung lexikalischer Bedeutungen gibt. Einige dieser Regelmäßigkeiten – vor allem im Bereich der metonymischen Polysemie – sind recht gut untersucht. Aber eine allgemeine Theorie der Polysemie steht noch aus. Es ist nicht einmal eine klare Abgrenzung zur Homonymie bekannt: handelt es sich bei der in (5) und (5') illustrierten Mehrdeutigkeit von **treffen** um Polysemie? In Ermangelung eines klaren Kriteriums ist das kaum zu entscheiden.

---

5 Antonymie ist die Sinnrelation, die zwischen zwei steigerbaren Adjektiven besteht, deren Komparative Konversen voneinander sind. Einfach gesagt beziehen sich Antonyme immer auf die entgegengesetzten Pole einer Skala: **lang** : **kurz**; **groß** : **klein**; **heiß** : **kalt**; etc.

6 Der Begriff umfasst alle Arten von Polysemien, bei denen zwischen den Lesarten ein sachlicher Zusammenhang besteht – so auch die Lesarten von **Schule** als Gebäude oder Institution.

7 Eine erstarrte Metapher ist eine solche, die Teil des allgemeinen Sprachgebrauchs geworden ist.

(5) **Der Gewährsmann trifft einen Bekannten am Schalter.**
(5') **Die Gewehrkugel trifft einen Beamten in der Schulter.**

Wir werden auf diese Probleme im Rahmen dieses Kurses nicht eingehen und, soweit wir es mit polysemen Wörtern zu tun haben, sie wie Homonyme behandeln, indem wir lediglich die verschiedenen Lesarten (z.B. durch Indizierung) auseinanderhalten, ohne einen Zusammenhang zwischen ihnen herzustellen.

0.3 Semantik und Syntax

Strukturelle Ambiguität

Ambiguität gibt es nicht nur im Lexikon. Auch komplexe Ausdrücke können ambig sein. Zum einen kann natürlich ein komplexer Ausdruck eines oder mehrere ambige Wörter enthalten:

(6) **Ein Wechsel der Bank bewirkt keinen Unterschied im Gehalt.**

Drei der vier Substantive in (6) sind mehrdeutig. Insofern besitzt der Satz mindestens $2^3 = 8$ Lesarten, von denen allerdings einige keinen guten Sinn ergeben. Neben dieser Art von Ambiguität, die sich einfach vom Lexikon auf komplexe Ausdrücke vererbt, gibt es einen weitaus interessanteren Typ von Mehrdeutigkeit – die *strukturelle Ambiguität*, die entsteht, wenn dieselben (nicht notwendigerweise ambigen) Wortformen auf unterschiedliche Weise zu derselben Wortfolge kombiniert werden können:

(7) **Der Bauer schlug einen Esel mit einer Rute.**

(7) ist ambig, obwohl die einzelnen Wörter eindeutig sind.[8] Die folgenden Paraphrasen machen das deutlich:

(7') **Mit einer Rute schlug der Bauer einen Esel.**
(7") **Einen Esel mit einer Rute schlug der Bauer.**

Die zweite Lesart liegt weniger nahe – vielleicht weil man sich unter einem Esel mit einer Rute außerhalb eines gegebenen Kontexts nicht so viel vorstellen kann. Aber (7) kann offenkundig im Sinne von (7") verstanden werden. Das allein beweist zwar noch nicht, dass es sich um eine echte Ambiguität handelt; es könnte ja auch sein, dass (7) bezüglich der Frage, wer die Rute hat, unbestimmt ist. Doch ein *Zähltest* bringt hier Klarheit. Wenn nämlich (7) im Sinne von (7') auf zwei verschiedene Gelegenheiten zutrifft, kann man auf (7) **... und zwar zweimal** schließen; das Gleiche gilt, wenn der Bauer zwei Mal einen beruteten Esel gehauen hat. Aber wenn er einmal eine Rute benutzt hat, um einen rutelosen Esel zu prügeln, und das andere Mal mit der bloßen Hand einen Esel, der eine Rute hatte, geschlagen hat, wäre der entsprechende Zusatz nicht gerechtfertigt. Man kann also die Gelegenheiten, zu denen (7) im Sinne von (7') wahr ist nicht mit denen zusammenrechnen, zu denen (7) im Sinne von (7") wahr ist.[9]

Die Mehrdeutigkeit von (7) liegt darin, dass sich die Präpositionalphrase **mit einer Rute** entweder auf das Substantiv **Esel**[10] oder aber auf die Verbalphrase **schlug einen Esel** beziehen

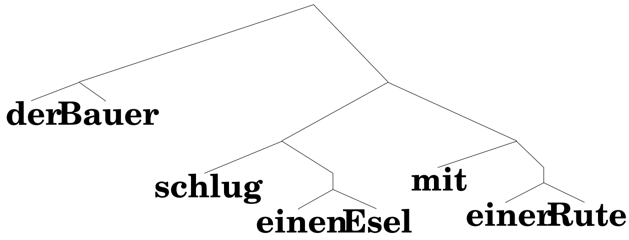
8 Genauer gesagt sind die lexikalischen Ambiguitäten in (6) insofern irrelevant, als die alternativen Lesarten aus syntaktischen Gründen ausscheiden: in der Lesart *Vogelbehausung* kommt das Substantiv **Bauer** in (7) nicht vor, weil diese einen neutralen Artikel (**das**) verlangen würde, Entsprechendes gilt für den (bezüglich Kasus und Genus) ambigen Artikel **der**.

9 Hier ist ein analoger Fall mit einer lexikalischen Ambiguität. Angenommen Fritz wohnt zunächt gegenüber einem Geldinsitut, aber es gibt in der Gegend weit und breit keine Sitzgelegenheit. Dann zieht er in eine Wohnung, der gegenüber sich eine Parkbank befindet, aber das nächste Kreditinsitut ist weit weg. In diesem Fall stimmt es nicht, dass Fritz zum zweiten Mal gegenüber einer Bank wohnt; denn man muss sich vorher entscheiden, was man mit **Bank** meint.

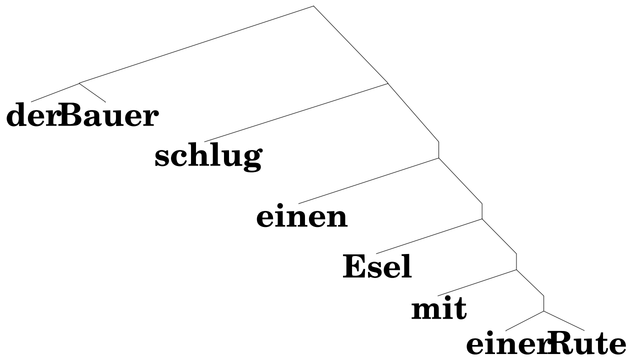
10 … oder auf die Determinatorenphrase **einen Esel**:

kann. Dementsprechend hat (7) zwei verschiedene Konstituentenstrukturen (7^{+}) und (7^{++}), denen die beiden Lesarten (7') und (7") entsprechen:

(7^{+})

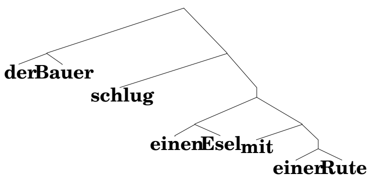


(7^{++})



Termauswertung
Diese Art von Mehrdeutigkeit gibt es auch in mathematischen Formeln, und für sie hat man die Klammerung erfunden, die in einem unmittelbaren Zusammenhang zur jeweiligen Bedeutung des Terms steht. Diesen Zusammenhang sehen wir uns jetzt etwas genauer an; denn das wird uns helfen, nicht nur das Phänomen der strukturellen Ambiguität besser zu verstehen, sondern die Interpretation komplexer Ausdrücke im allgemeinen. Wir werden uns dabei an ein arithmetisches Beispiel halten, weil dieses keine großen semantischen Kenntnisse voraussetzt. Erst ab Kapitel 2 werden wir sehen, wie sich die Überlegungen von der 'Sprache' der Arithmetik für die natürliche Sprache adaptieren lassen. Doch keine Angst vor allzu viel Mathematik: es geht nicht um das Rechnen mit *Zahlen*, sondern um die Frage, wie man die *Bezeichnungen* für Zahlen versteht.

Zunächst gilt es dabei, Zahlen und Bezeichnungen für Zahlen – kurz: *Terme* – in der Notation auseinander zu halten. Analog zu den natürlich-sprachlichen Beispielen werden wir dafür Terme, wenn wir über sie sprechen (d.h. schreiben), **fett** setzen, während wir uns auf Zahlen mit normal ('recte') gesetzten Ziffern(folgen) beziehen. So sind z.B. **9** und $\mathbf{3}^{\mathbf{2}}$ zwei verschiedene Terme, die beide für die Zahl 9 stehen. Die Zahl, für die ein Term steht, werden wir ab jetzt als *Wert* dieses Terms bezeichnen. Um uns auf ihn zu beziehen, setzen wir doppelte Klammern um den Term. Der Wert von $\mathbf{3}^{\mathbf{2}}$ ist also: [[$\mathbf{3}^{\mathbf{2}}$]] = 9 = [[**9**]], obwohl natürlich $\mathbf{9} \neq \mathbf{3}^{\mathbf{2}}$ die Terme



Gegen diese Struktur sprechen allerdings semantische Gründe, auf die wir in Kapitel 6 zurück kommen.

sind verschieden, aber sie stehen für dieselbe Zahl.

Um zu sehen, wie sich Terme auf Zahlen beziehen und welche Rolle die Klammerung dabei spielt, konzentrieren wir uns hier auf *Potenzterme*, also Terme der Gestalt a^b , wobei a und b selbst wieder Potenzterme sein können (!) oder aber einzelne *Ziffern*: **0**, **1**…,**9**; Ziffernfolgen wie **99** lassen wir außer Acht.[11] Jede der zehn Ziffern steht für eine Zahl:

(8) *Bewertung einfacher Terme*
[[**0**]] = 0; [[**1**]] = 1; [[**2**]] = 2; … ; [[**7**]] = 7; [[**8**]] = 8; [[**9**]] = 9.

Es lohnt sich, einen Augenblick über diese Gleichungen nachzudenken. Zunächst einmal mögen sie zirkulär wirken, scheinen sie doch zu besagen, dass fett gedruckte und nicht fett gedruckte Ziffern sich jeweils auf dieselbe Zahl beziehen. Doch der Eindruck trügt! Denn die Gleichungen machen nur eine Aussage darüber, worauf sich die fett gedruckten Ziffern beziehen. Über die anderen Ziffern wird gar nicht gesprochen, sie werden nur *verwendet*, um den Bezug auf die entsprechenden Zahlen herzustellen. Hätten wir über beide Typen von Ziffern sprechen wollen, hätten wir etwa statt der ersten Gleichung folgendes schreiben müssen:

(9) [[**0**]] = [[‘0’]]

In (9) fungiert ‘0’ als Name für eine Ziffer, die in den Gleichungen unter (8) verwendet wird und sich dort auf die Zahl 0 bezieht. (9) ist als Aussage darüber, worauf sich die Ziffer **0** bezieht, in der Tat zirkulär. Denn die Anführungszeichen sind wie der Fettdruck nur ein Mittel, die jeweilige Ziffer zu benennen. So besehen besagt (9) dasselbe wie:

(9') [[**0**]] = [[**0**]]
(9") [[‘0’]] = [[‘0’]]

Die Gleichungen unter (8) dagegen stellen eine Beziehung her zwischen Symbolen (den Ziffern) und Objekten, für die diese Symbole stehen (Zahlen). Verwirrend ist daran nur, dass wir über dieselben Symbole sprechen, die wir benutzen. Mit dieser *scheinbaren* Zirkularität werden wir es immer wieder zu tun haben, wenn wir wie im Rest des Skripts auf deutsch die Bedeutung deutscher Ausdrücke beschreiben.
Wenn die Gleichungen in (8) auch nicht zirkukär sind, so sind sie doch einigermaßen trivial. Dass die Ziffer **6** für die Zahl 6 steht, weiß ja jeder. Aber woher wissen wir das? Weil wir es irgendwann einmal – in der Regel im Grundschulalter oder kurz vorher – gelernt haben. Und nicht nur das: die Ziffer **6** bezieht sich sozusagen per definitionem auf die Zahl 6, sie ist die für diese Zahl übliche Bezeichnung, und wir kennnen dieses Symbol überhaupt nur als Bezeichnung dieser Zahl. In diesem Sinne ist die Gleichung ‘[[**6**]] = 6’ trivial. Andererseits drückt sie keinen zwingenden Sachverhalt aus. Man könnte sich ja vorstellen, das Symbol **6** als Bezeichnung für die Zahl 5 zu benutzen[12]; und in dieser Vorstellung liegt gewiss kein Widerspruch. Es handelt sich also bei den trivialen Gleichungen nicht um *Tautologien*, also Aussagen, deren Verneinung in einen Widerspruch führt – wie die Gleichungen unter (9') und (9").

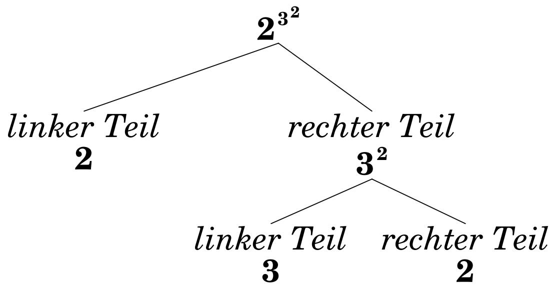
Kommen wir nun zu den komplexen Termen. In der Mathematik vermeidet man Schreibweisen wie $\mathbf{2^{32}}$, weil sie nicht eindeutig sind. Stattdessen verwendet man Klammern: $\mathbf{2^{32}}$ kann entweder als $\mathbf{(2^3)^2}$ disambiguiert werden und dann die Zahl 64 [= 8^2]bezeichnen; andernfalls ist die Klammerung $\mathbf{2^{(3^2)}}$ gemeint, und man hat es mit der Zahl 512 [= 2^9] zu tun. Ohne Klammern wüsste man nicht, welche der beiden Möglichkeiten gemeint ist. Was genau leistet

11 Wir kommen in den Übungsaufgaben noch einmal auf sie zurück.

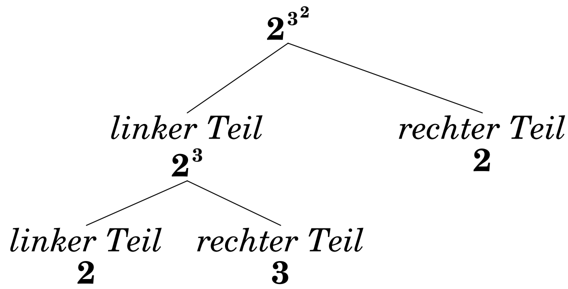
12 … so wie das älteste Dezimalsystem, die nordindische Brahmi-Notation (3. Jh. v. Chr.), für die Zahl 8 praktisch dasselbe Symbol (nämlich sowas wie) verwendet wie das westarabische Gobar-System (11. Jh.) für die 5.

die Klammerung? Ganz einfach: *die Klammerung zerlegt einen Term in seine Teile*, die ihrerseits wieder Terme sind und ihrerseits wieder zerlegt werden können (solange es sich nicht um einzelne Ziffern handelt). Klammert man $(\mathbf{2}^{\mathbf{3}})^{\mathbf{2}}$, so besteht der Term aus den Teilen $\mathbf{2^3}$ und $\mathbf{2}$ (*in dieser Reihenfolge*); bei der Klammerung $\mathbf{2}^{(\mathbf{3}^{\mathbf{2}})}$ dagegen besteht er aus $\mathbf{2}$ und $\mathbf{3^2}$:

(10)



(10')



Will man die Zahl bestimmen, für die der Gesamtterm steht, also seinen Wert, folgt man in dem Sinne der Klammerung, als man zunächst die Werte seiner Teile ermittelt. Bei (10) muss man also zuerst herausfinden, wofür die Terme $\mathbf{2}$ und $\mathbf{3^2}$ stehen, bei (10') braucht man die Werte von $\mathbf{2^3}$ und $\mathbf{2}$. Wenn man das weiß, potenziert man den Wert des linken Teilterms (die Basis) mit dem des rechten (dem Exponenten):

(11) $[[(\mathbf{2}^{\mathbf{3}})^{\mathbf{2}}]] = [[\mathbf{2^3}]]^{[[\mathbf{2}]]}$

(11') $[[\mathbf{2}^{(\mathbf{3}^{\mathbf{2}})}]] = [[\mathbf{2}]]^{[[\mathbf{3^2}]]}$

(11) und (11') sehen auf den ersten Blick kompliziert aus und auf den zweiten zirkulär. Beides täuscht. Wer (11) als undurchsichtig empfindet, kann es mit einer verbalisierten Version versuchen: *Der Wert des Terms* $(\mathbf{2}^{\mathbf{3}})^{\mathbf{2}}$ *ergibt sich, indem man den Wert des linken Terms – also den Wert von* $\mathbf{2^3}$ *(also*$[[\mathbf{2^3}]]$*) – mit dem Wert des rechten Terms – also den Wert von* $\mathbf{2}$ *(also*$[[\mathbf{2}]]$*) – potenziert, d.h.* $[[\mathbf{2^3}]]$ *hoch* $[[\mathbf{2}]]$ *nimmt*. Zur Übung wird empfohlen, jetzt gleich auch noch (11') zu verbalisieren! Danach sollte man eigentlich beide Gleichungen verstanden haben. Aber genau dann drängt sich der Eindruck auf, dass sie gänzlich inhaltslos sind. Um zu sehen, warum das nicht der Fall ist, betrachten wir das (11) und (11') zugrunde liegende allgemeine Schema:[13]

(12) *Bewertung komplexer Terme*
Wenn a und b Terme sind, gilt: $[[a^b]] = [[a]]^{[[b]]}$.

Die Tatsache, dass man hochgestellte Terme so, wie in (12) angegeben, versteht, ist in dem Sinne nicht zwingend, als es ja auch anders sein könnte. Beispielsweise könnte a^b auch für das Produkt von der durch a bezeichneten Zahl mit dem Wert von b stehen. In dem Fall hätte die Gleichung in (12) wie folgt lauten müssen:

(12') $[[a^b]] = [[a]] \cdot [[b]]$

Man beachte, dass das Symbol '·' in (12') für eine arithmetische Operation, die Multiplikation, steht. Ebenso steht in (12) das Hochstellen *rechts* vom Gleichheitszeichen für das Exponieren zweier *Zahlen*, nämlich der jeweiligen Werte der Terme a und b. Das Hochstellen *links* vom Gleichheitszeichen steht dagegen für eine Verknüpfung von *Symbolen* (den Termen). Eine arithmetische Operation hätte hier nichts zu suchen, denn sie dient dem Rechnen mit Zahlen, die man miteinander multiplizieren, potenzieren usw. kann. Terme dagegen kann man

13 *Frage*: Wieso werden in (12) auf einmal kursive Buchstaben für Terme verwendet anstatt wie bisher Fettdruck? – *Antwort*: Der Fettdruck dient dazu, *einzelne* Terme zu benennen, während es sich bei 'a' und 'b' um *Variablen* für *beliebige* Terme handelt. Hätten wir stattdessen '**a**' und '**b**' verwendet, hätten wir etwas über die Ausdrücke 'a' und 'b' ausgesagt.

nebeneinander, übereinander etc. schreiben. Die Gleichung in (12) besagt also, dass eine bestimmte Kombination von Zahlzeichen – nämlich das Nebeneinanderschreiben zweier Terme und Hochstellen des rechten – einer bestimmten arithmetischen Operation – nämlich der Potenzierung – entspricht. Und in dieser Entsprechung liegt keine Zirkularität.

Dennoch ist (12) beinahe so selbstverständlich wie die Gleichungen unter (8). Dass nämlich das Hochstellen für das Exponieren steht – und genau das besagt (12) – haben wir alle einmal in Schule gelernt, wenn auch nicht so früh wie die Deutung der Ziffernsymbole. Und auch die scheinbare Zirkularität von (12) ist dieselbe wie die in (8) wahrgenommene. Denn so wie wir uns in (8) auf die Zahlen mit den landläufigen (‘arabischen’) Ziffern bezogen haben, um die es dort gerade ging, wird in (12) der Exponent durch Hochstellen angedeutet – also durch die Notation, um die es gerade geht. Das Hochstellen rechts vom Gleichheitszeichen wird in (12) natürlich vorausgesetzt. Die Gleichung kann also nur jemand verstehen, der das bereits weiß und damit insbesondere weiß, worin das Exponieren besteht, um welche arithmetische Operation es sich handelt. (12) ist also keine *Rechen*regel, sondern nur ein Erklärung der Exponential*notation*, die die entsprechenden Rechenregeln bereits voraussetzt.[14]

Die Gleichungen unter (8) und das Schema in (12) reichen aus, um geklammerte Terme wie (10) und (10') zu bewerten. Denn die Werte der komplexen Terme werden nach (12) auf die Werte ihrer Teile zurückgeführt, die ihrerseits (wenn sie komplex sind) nach (12) bewertet werden oder (wenn es sich um Ziffern handelt) ihre Werte in (8) deklariert bekommen. Die *Termauswertung* für (10) und (10') lässt sich wieder in Baumform darstellen:

[[(10)]]

$[[\mathbf{2}^{\mathbf{3}^{\mathbf{2}}}]] = [[\mathbf{2}]]^{[[\mathbf{3}^{\mathbf{2}}]]} = 2^9 = \boxed{512}$

linker Teil $[[\mathbf{2}]] = \boxed{2}$ — *rechter Teil* $[[\mathbf{3}^{\mathbf{2}}]] = [[\mathbf{3}]]^{[[\mathbf{2}]]} = 3^2 = \boxed{9}$

linker Teil $[[\mathbf{3}]] = \boxed{3}$ — *rechter Teil* $[[\mathbf{2}]] = \boxed{2}$

[[(10')]]

$[[\mathbf{2}^{\mathbf{3}^{\mathbf{2}}}]] = [[\mathbf{2}^{\mathbf{3}}]]^{[[\mathbf{2}]]} = 8^2 = \boxed{64}$

linker Teil $[[\mathbf{2}^{\mathbf{3}}]] = [[\mathbf{2}]]^{[[\mathbf{3}]]} = 2^3 = \boxed{8}$ — *rechter Teil* $[[\mathbf{2}]] = \boxed{2}$

linker Teil $[[\mathbf{2}]] = \boxed{2}$ — *rechter Teil* $[[\mathbf{3}]] = \boxed{3}$

Die Auswertungen von (10) und (10') folgen schrittweise der Klammerung – von den kleinsten Teilen zu immer größeren. Die Werte der kleinsten Teile werden in den Gleichungen (8) vorgegeben, bei zusammengesetzten Termen kommt die allgemeine Regel (12) zur Anwendung. Auf diese Weise lassen sich offenbar beliebig komplexe Terme bewerten – solange ihre kleinsten Teile einzelne Ziffern sind und sie immer nur durch Hochstellen miteinander kombiniert werden.

Kompositionalität

Die anhand von (10) und (10') illustrierte Vorgehensweise bei der Bewertung von Termen haben wir so ausführlich dargestellt, weil sie in der logischen Semantik eine zentrale Rolle spielt. Um die Bedeutungen komplexer sprachlicher Ausdrücke zu beschreiben, werden wir im folgenden immer unterstellen, dass diese quasi geklammert sind, also in Teile und Teilesteile zerlegt. Die Klammerstruktur ist dabei in der Regel syntaktisch motiviert; es handelt sich zumeist – wie im Fall von (7^+) und (7^{++}) um eine vereinfachte Oberflächenstruktur. Gelegentlich müssen wir allerdings eine andere, rein semantische Klammerung anwenden, eine sog. *Logische Form*. Wir werden, wenn es soweit ist, darauf hinweisen. Fürs Erste nehmen wir nur zur Kenntnis, dass die Deutung komplexer sprachlicher Ausdrücke immer ihre eindeutige Zerlegung in Teile

14 Eine solche Rechenregel wäre: $n^m = \underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{m\text{-}mal}$ – oder genauer: $n^0 = 1; n^{m+1} = n \cdot (n^m)$.

voraussetzt, wo auch immer diese Einteilung herkommt.

Die Analogie zwischen der Termauswertung und der Deutung natürlichsprachlicher Ausdrücke hat ihre Grenzen. Letztere stehen in der Regel nicht für Zahlen, auf die man irgendwelche Rechenoperationen anwenden könnte. Aber im Prinzip ist die Vorgehensweise dieselbe. In der Semantik wird sie üblicherweise in Form eines methodologischen Prinzips festgehalten:[15]

> *Kompositionalitätsprinzip*
> Die Bedeutung eines komplexen Ausdrucks ergibt sich aus den Bedeutungen seiner Teile und der grammatischen Konstruktion.

Gemeint ist damit gerade, dass die Deutung eines Satzes der Konstituentenstruktur folgt – genau wie die Termauswertung in (10) und (10'). Um also die Bedeutung von (7) zu bestimmen, muss man sich zunächst auf eine der beiden Lesarten festlegen. Im Fall von (7^+) ergibt sich dann die Bedeutung des Prädikats, indem man die Bedeutung von **schlug einen Esel** mit der von **mit einer Rute** kombiniert.

Im Unterschied zur Termauswertung betrifft das Kompositititionalitätsprinzip nicht Zahlen, sondern sprachliche Bedeutungen. Wir werden im Laufe des Kurses sehen, was diese Bedeutungen sind. Aber Bedeutungen lassen sich, wie gesagt, nicht mit arithmetischen Operationen kombinieren – die Potenzierung tut es hier also nicht. Stattdessen werden wir *semantische Operationen* zur Kombination von Bedeutungen kennen lernen.

Außer von den Teilen komplexer Ausdrücke und ihren Bedeutungen ist im Kompositionalitätsprinzip noch von den jeweiligen grammatischen Konstruktionen die Rede. Diese kommen insofern ins Spiel, als sie gerade bestimmen, *wie* die Bedeutungen der Teile miteinander kombiniert werden. Bislang kann man sich noch nicht viel darunter vorstellen – wir haben ja noch keine semantischen Operationen kennengelernt. Aber das folgende Beispiel zeigt, worum es geht:

(13) **Fritz und Eike sind verheiratet.**

Dieser Satz ist ambig (s. Übungsaufgabe). Seine beiden Lesarten können folgendermaßen paraphrasiert werden:

(13') **Sowohl Fritz als auch Eike sind verheiratet.**
(13") **Fritz und Eike sind miteinander verheiratet.**

Es ist nicht ganz offensichtlich, was hier die Quelle der Ambiguität ist. Hat das Wort **und** zwei Bedeutungen? Oder hat der Satz (13) zwei syntaktische Strukturen? Gegen eine Homonymie spricht, dass man dieselbe in sehr vielen Sprachen haben müsste: englisch **and**, französisch **et**, hebräisch **ve**, … lösen alle die in (13) zu beobachtete Mehrdeutigkeit aus. Es kann sich also kaum um einen Zufall handeln. Homonymien sind aber per definitionem Zufallsprodukte; und schon das Vorliegen derselben Homonymie in zwei nicht miteinander verwandten Sprachen ist äußerst unwahrscheinlich. Hinzu kommt, dass man die Mehrdeutigkeit in (13) auch bei anderen pluralischen Determinatorenphrasen findet (wie **die beiden**) und in den Fällen nicht über die eine Mehrdeutigkeit des Wortes **und** erklärt werden kann. Das allein spricht zwar noch nicht für eine strukturelle Ambiguität[16], lässt sie aber plausibler erscheinen als auf den ersten Blick. Wenn aber (13) strukturell ambig ist, könnte dies an der Art und Weise liegen, wie

15 Die Herkunft dieses Prinzips ist unklar. Früher hat man es nach dem Begründer der logischen Semantik als *Frege-Prinzip* bezeichnet, aber: "Frege selbst hat das Prinzip niemals ausdrücklich aufgestellt. es wurde nur nach ihm benannt, weil es gut zu seinem sprachphilosophischen Grundgedanken passt" (so Irene Heim 1977 in ihrer Magisterarbeit). In seiner modernen Form, nämlich als Verallgemeinerung der Termauswertung, findet man das Kompositionalitätsprinzip (allerdings nicht unter diesem Namen) in dem Aufsatz *Universal Grammar* (1970) von Richard Montague.

16 Eine andere Möglichkeit ist nämlich die systematische Polysemie.

das Subjekt **Fritz und Eike** mit dem Prädikat **sind verheiratet** verknüpft wird: nach der einen Konstruktion versteht man (13) im Sinne von (13'), nach der anderen im Sinne von (13"). Das Kompositionalitätsprinzip sagt dann, dass in beiden Fällen der 'Input', also die Bedeutungen von Subjekt und Prädikat, derselbe ist, die beiden Konstruktionen aber diesen Input auf verschiedene Weise kombinieren.

Im Kompositionalitätsprinzip ist von den *Teilen* komplexer Ausdrücke die Rede. Damit sind – wie schon bei der Termauswertung – immer die *unmittelbaren* Teile gemeint und nicht etwa auch Teile von Teilen. Diese Einschränkung ist wichtig. Ohne sie würde das Prinzip nur besagen, dass sich die Bedeutungen komplexer Ausdrücke aus denen aller ihrer Teile und Teilesteile sowie der grammatischen Struktur ergeben. Da zu den Teilesteilen eines komplexen Ausdrucks auch alle Wörter gehören, die in ihm vorkommen, liefe das darauf hinaus, dass die Wortbedeutungen gemeinsam mit der grammatischen Struktur die Bedeutung des Gesamtausdrucks bestimmen. Das ist sicherlich richtig, aber zu wenig. Vielmehr bedeutet Kompositionalität, dass sich die Bedeutung eines jeden Ausdrucks direkt aus den Bedeutungen seiner unmittelbaren Teile (und der grammatischen Konstruktion) ergibt. Auf diese Weise lässt sich die Bedeutung des Ganzen Schritt für Schritt bestimmen, ausgehend von den Wortbedeutungen bis hin zum vollständigen Satz. Der Unterschied mag an dieser Stelle minimal erscheinen, aber es wird sich später zeigen, dass man ihn nicht vernachlässigen darf.

Es gibt bekanntlich unbegrenzt viele und unbegrenzt komplexe Ausdrücke, deren Bedeutungen den Sprechern im Prinzip bekannt sind, selbst wenn sie sie niemals zuvor gehört oder gelesen haben. Das Kompositionalitätsprinzip erklärt, wie das überhaupt möglich ist: um einen komplexen Ausdruck zu verstehen, muss man nur wissen, was die in ihm enthaltenen Wörter bedeuten und welchen semantischen Operationen die grammatischen Konstruktionen entsprechen, von denen er Gebrauch macht. Die Anzahl der Wörter und der grammatischen Konstruktionen ist zwar sehr groß, aber nicht unbegrenzt. Damit ist es zumindest prinzipiell möglich, dass man sie alle einzeln gelernt hat und im Zusammenhang kompositionell einsetzt. Ein Blick auf die Termauswertung zeigt wieder, wie man sich das dem Sprachverständnis zugrunde liegende semantische Wissen als zweigeteilt vorstellen kann. Zum einen besteht es in *lexikalischen Regeln*, die für jedes einzelne Wort sagen, was seine Bedeutung ist – so wie die Gleichungen in (8) für jede einzelne Ziffer ihren Wert festlegen; zum anderen besteht es in *grammatischen Regeln*, die für jede Konstruktion sagen, wie sich die Bedeutungen der mit ihr konstruierten Ausdrücke kombinieren – so wie das Schema (12) sagt, dass sich der Wert von zwei nebeneinander geschriebenen Termen (von denen der zweite hochgestellt ist) durch Exponieren der Werte dieser beiden Terme ergibt. Da es in diesem Kurs um die logische Semantik geht, werden wir die lexikalischen Regeln weitgehend vernachlässigen. Ganz ohne sie wird man zwar nicht auskommen – mit irgendwas muss ja die Kompositionalität anfangen; aber sie werden weitgehend trivial sein, wenn auch nicht ganz so trivial wie die Gleichungen in (8).

Da nach dem Kompositionalitätsprinzip Teilausdrücke zur Bedeutung des Gesamtausdrucks immer nur ihre eigene Bedeutung beitragen, lassen sie sich durch synoyme Ausdrücke *ersetzen*, ohne dass sich dabei an der Bedeutung des Ganzen etwas ändert. Diese unmittelbare Konsequenz bezeichnet man in der Semantik (und Sprachphilosophie) als:

> *Substitutionsprinzip*[17]
> Wenn man einen Teilausdrucks durch einen synonymen Ausdruck ersetzt, ändert sich nichts an der Bedeutung des Gesamtausdrucks.

Wie wir im Verlauf des Kurses öfters sehen werden, ist die typische Anwendung des Substitutionsprinzips negativ: wenn sich zwei vermeintlich synonyme Ausdrücke nicht immer für einander ersetzen lassen, ohne dass sich die Bedeutung des Ganzen ändert, können sie eben

[17] Das Substitutionsprinzip spielt bereits in Gottlob Freges Aufsatz *Über Sinn und Bedeutung* (1892) eine zentrale Rolle.

nicht synonym gewesen sein. Betrachten wir dazu ein Beispiel. Zunächst könnte man aufgrund von Sätzen wie (14) und (14') vermuten, dass die Präpositionalphrasen **in einer Woche** und **heute in einer Woche** bedeutungsgleich sind:

(14) **Kommen Sie in einer Woche noch mal vorbei.**
(14') **Kommen Sie heute in einer Woche noch mal vorbei.**

(14') mag als Anweisung etwas genauer sein, läuft aber offenbar auf dasselbe hinaus wie (14). In diesem Fall lässt sich also der eine Ausdruck durch den anderen ersetzen, ohne dass sich die Gesamtbedeutung zu ändern scheint.[18] Dass die beiden dennoch nicht synonym sind, zeigt aber die folgende Ersetzung:

(15) **Der Techniker bat mich, <u>in einer Woche</u> noch mal vorbeizukommen.**
(15') **Der Techniker bat mich, <u>heute in einer Woche</u> noch mal vorbeizukommen.**

Wenn der besagte Techniker gestern mir gegenüber (14) oder (14') geäußert hat, ist (15) eine korrekte Wiedergabe seiner Bitte – (15') dagegen nicht. Somit können (15) und (15') unmöglich dieselbe Bedeutung haben.[19] Da aber (15') aus (15) durch Ersetzung des einfach unterstrichenen Teilausdrucks durch den doppelt unterstrichenen hervorgeht, können laut Substitutionsprinzip auch die beiden Teilausdrücke nicht miteinander synonym sein – entgegen dem ersten, auf (14) und (14') basierenden Eindruck. Soweit die Illustration des Substitutionsprinzips, auf das wir bei Gelegenheit wieder zurück kommen werden.

Das Kompositionalitätsprinzip hat sich in der logischen Semantik als außerordentlich nützlich erwiesen – unter anderem, weil es hilft, überhaupt erst herauszufinden, was die Bedeutungen sprachlicher Ausdrücke sind. (Mehr dazu ab Kapitel 2.) Deswegen werden wir es in diesem Kurs sklavisch befolgen und uns immer erst dann mit einer semantischen Analyse zufrieden geben, wenn sie die Bedeutungen der uns interessierenden komplexen Ausdrücke kompositionell erklärt.

Übungsaufgaben

A1 Inwiefern bereiten ambige Ausdrücke ein Problem für die Anwendung des Invarianzkriteriums?

A2 Die Verben **telefonieren** und **anrufen** beschreiben zwar ähnliche Tätigkeiten, haben aber nicht dieselbe Bedeutung.
a) Worin besteht der Bedeutungsunterschied?
b) Ist eines der beiden ein Hyponym des anderen?
c) Inwiefern leistet die Bedeutung der Verben einen unterschiedlichen Beitrag zur Ermittlung eines ungenannten Gesprächspartners?
(i) **Arnim ruft an.**
(ii) **Arnim telefoniert.**

A3 In (4") hat die Konversen-Beziehung zwischen **älter** und **jünger** die Erweiterung um **zwei Jahre** überlebt. Zeigen Sie, dass nicht immer, wenn

18 Man beachte, dass das Substitutionsprinzip bei diesem Vergleich von (14) und (14') gar nicht zur Anwendung kommt. Denn es macht keine Aussage über Ersetzungen, bei denen sich die Bedeutung des Gesamtausdrucks nicht ändert. Das mag verblüffen, wird aber klar, wenn man das Prinzip wie folgt umformuliert (*kontraponiert*, wie man in der Logik sagt): *Wenn sich bei der Ersetzung eines Teilausdrucks durch einen anderen an der Bedeutung des Gesamtausdrucks etwas ändert, dann sind die beiden Teilausdrücke nicht synonym.*

19 Diesem Argument liegt noch ein sehr allgemeines Prinzip zugrunde, auf das wir aber erst im nächsten Kapitel eingehen werden: das *sicherste Prinzip*.

man zwei zueinander konverse Ausdrücke erweitert, die Ergebnis wieder in der Konversenbeziehung zueinander stehen.
Tipp: Betrachten Sie Substantive!

A4 Zeigen Sie, dass es sich bei den beiden Verwendungen von **Glas** – Material vs. Gefäß – wirklich um zwei Lesarten handelt, die sich wie zwei verschiedene Wörter verhalten.

A5 Geben Sie Regeln der Termbewertung für Multiplikation und Addition an, die Terme wie **(5 · (3 + 2))** und **((0 · 6) + (2 + 3))** richtig erfasst.

A6 Geben Sie ein kompositionelle Termbewertung für arabische Zahlzeichen an, die aus mehr als einer Ziffer bestehen. Nehmen Sie dabei eine 'linksverzweigende' Klammerung an, also z.B. **(((40)5)1)** für **4051**.
Zusatzfrage: Welches Problem ergibt sich bei einer rechtsverzweigen-den Strukturierung wie **4(0(51))**?

A7 Zeigen Sie, dass der Satz **Fritz und Eike sind verheiratet** ambig ist.

1. Satzbedeutung

Nach dem Kompositionalitätsprinzip ermitteln sich die Bedeutungen komplexer Ausdrücke aus denen ihrer Teile, deren Bedeutungen sich wieder aus ihren Teilen ergeben usw. – bis zu den kleinsten Teilen, bei denen es sich in der Regel um Wörter handelt. Um die Bedeutung eines komplexen Ausdrucks zu beschreiben, kann man von den Bedeutungen der Wörter ausgehen, die in ihm vorkommen, dann kompositionell zu immer komplexeren Teilen aufsteigen, bis man schließlich die unmittelbaren Teile des Gesamtausdrucks erreicht hat und diese zu dessen Bedeutung kombiniert. Wir werden später dieses Vorgehen an vielen Beispielen kennen lernen. Zuvor müssen wir aber erst einmal herausfinden, was eigentlich Bedeutungen sind. Dafür wiederum empfiehlt sich genau die umgekehrte Vorgehensweise: vom komplexen Ausdruck zum Wort. Genauer gesagt werden wir zunächst die Bedeutungen vollständiger *Sätze* bestimmen. Dabei werden wir insofern exemplarisch vorgehen, als uns zunächst nur interessiert, um was für eine *Art* von Objekten es sich bei Satzbedeutungen handelt, und z.B. weniger, worin sich die Bedeutung des einen Beispielssatzes von der des anderen unterscheidet. Wenn wir erst einmal eine klarere Vorstellung davon haben, was die Bedeutung eines Satzes im allgemeinen ist, werden wir uns im nächsten Kapitel der Frage zuwenden, wie sie sich aus den Bedeutungen seiner Teile ermittelt und was diese Bedeutungen selbst sind.

1.1 Das Semantische Hauptprinzip

Ein Unterschied zwischen jemandem, der einen Satz wie (1) hört (oder liest) und versteht, und jemandem, der ihn nicht versteht, besteht darin, dass (1) bei ersterem, aber nicht bei letzterem eine bestimmte Vorstellung, ein inneres Bild, hervorzurufen in der Lage ist:

(1) **May maliit na batang babae na naglalaro.**

(1) ist ein Satz des Tagalog[20], der sich einigermaßen wörtlich wie folgt übersetzen lässt:

(1') **Ein kleines Mädchen spielt.**

Als LeserIn dieses Skripts verstehen Sie (1'), während Sie mit (1) vermutlich nicht viel anfangen können. Und als Sie (1') gelesen haben, ist Ihnen vielleicht ein Bild durch den Kopf gegangen. Von daher mag es nahe liegen, die Frage, was die Bedeutung eines Satze ist, wie folgt zu beantworten: *Die Bedeutung eines Satzes ist die Vorstellung, die er hervorruft*. Gegen einen solchen sog. *psychologistischen* Bedeutungsbegriff spricht allerdings eine Vielzahl von Gründen. Denn die mit Sätzen assoziierten Vorstellungen sind *(a)* zu *subjektiv*, um als Bedeutungen zu taugen, sie *(b) beschränken* sich auf wenige Sätze, sie sind *(c) irrelevant* für die Kommunikation, und sie sind obendrein *(d) privater* Natur:

(a) Verschiedene Sprecher assoziieren mit einzelnen Ausdrücken zu verschiedenen Gelegenheiten verschiedene Dinge, gebrauchen sie aber dennoch im selben Sinn, mit derselben Bedeutung.

(b) Bei (1') könnte man sich assoziierte innere Bilder als Bedeutungen vorstellen, aber wie soll sich z. B. der Bedeutungsunterschied zwischen **Pizza ess ich zweimal im Monat** und **Pizza esse ich jede Woche** in inneren Bildern niederschlagen?

(c) Sprecher können aufgrund persönlicher Erlebnisse alles Mögliche mit einem Satz assoziieren, ohne dass dies Einfluss auf sein Verständnis und seine Bedeutung hätte.

(d) Die Vorstellungen und Assoziationen des Einzelnen sind anderen Sprechern prinzipiell unzugänglich, wie können sie da zur Kommunikation zwischen den Sprechern dienen?

Angesichts dieser Einwände empfiehlt es sich, nach einer Alternative zum psychologistischen

[20] Das Tagalog (Betonung auf der zweiten Silbe), seit 1962 Amtssprache auf den Philippinen, ist eine austronesiche Sprache und weltweit Muttersprache von ca. 40 Millionen Menschen – von denen einer mein früherer Kollege Tim Fernando (jetzt Trinity College, Dublin) ist, der mir die Beispiele übersetzt hat.

Bedeutungsbegriff Ausschau zu halten. Die folgende Beobachtung erweist sich dabei als nützlich. Vergleichen wir (1) mit einem weiteren Satz des Tagalog, dessen Übersetzung erst später verraten wird:

(2) **May maliit na batang lalake na nagaawit ng awit.**

Während ich dies schreibe, sitzt neben mir im Zug ein kleines Mädchen, das mit einem Puzzle beschäftigt ist. Der Satz (1) war also kein ganz beliebiges Beispiel, sondern traf in dem Moment, als ich ihn hinschrieb, tatsächlich zu. Mit (2) verhält es sich nicht anders. Ich habe den Satz kurz danach getippt (als das Mädchen immer noch spielte) und er entsprach ebenfalls den Tatsachen. Aber in den wenigen Sekunden, die seither vergangen sind, hat sich das geändert: während (1) nach wie vor zutrifft, ist (2) nicht mehr wahr.

Sie wissen nicht, was (2) bedeutet, aber eins wissen Sie jetzt: (1) und (2) bedeuten nicht dasselbe. Sie können es nicht, denn (1) ist unter den gegebenen Umständen wahr, (2) dagegen nicht. Diesen elementaren Schluss halten wir fest als:

> *Sicherstes Prinzip*
> Wenn von zwei Sätzen unter denselben Umständen der eine wahr ist und der andere nicht, dann haben sie nicht dieselbe Bedeutung.

Am Ende des vorangehenden Kapitels hatten wir von diesem Prinzip bereits Gebrauch gemacht. Seine Bedeutung liegt aber weniger in seiner tatsächlichen Anwendung, als darin, dass es sich um eine unumstrittene, ja banal wirkende Beobachtung handelt über einen Gegenstand, über den wir ansonsten so gut wie gar kein gesichertes vortheoretisches Wissen haben.[21] So unklar und schwammig das Phänomen Bedeutung auch wirken mag, so evident ist doch der Zusammenhang, der im sichersten Prinzip ausgemacht wird. Und dieser Zusammenhang besteht zwischen der Bedeutung von Sätzen und ihrer Wahrheit. Was immer also Bedeutungen sein mögen, sie haben – zumindest im Falle von Satzbedeutungen – irgendetwas mit Wahrheit zu tun.

Das obige Beispiel illustriert, dass Wahrheit in dem Sinne nicht absolut ist, als derselbe Satz einmal wahr, einmal falsch (= nicht wahr) sein kann, und zwar je nach dem, worauf er bezogen wird. (2) war *zunächst* wahr, *dann* aber falsch, was auf eine zeitliche Relativität hindeutet. Aber das ist nicht genug. Hätte ich, statt eine Minute zu warten, das Abteil gewechselt, wäre vielleicht (1) falsch und (2) wahr gewesen. Die Wahrheit und Falschheit hängt im allgemeinen von den räumlich-zeitlichen Umständen ab, auf die der Satz bezogen wird. In der Semantik bezeichnet man die Umstände, auf die ein Satz bezogen werden kann, als *Situationen*, *von* denen er wahr (oder falsch) ist, *auf* die er *zutrifft* (bzw. nicht zutrifft). Wir hatten zwei Situationen betrachtet, die sich zeitlich von einander unterschieden;[22] und bezogen auf die erste, frühere Situation waren (1) und (2) beide wahr, während (2) auf die zweite Situation bezogen falsch war. Man beachte, dass die Bezugnahme auf die Situation in dem Sinne *implizit* ist, als es keinen sprachlichen Teilausdruck gibt, der diese Situation benennt.

Nach dem sichersten Prinzip müssen zwei miteinander synonyme Sätze *von allen Situationen* jeweils entweder beide wahr oder beide falsch sein. Wir werden, der Tradition der logischen Semantik folgend, im folgenden davon ausgehen, dass Satzbedeutungen darüber hinaus keinen anderen Prinzipien unterliegen. Wir nehmen also an, dass es für die Synonymie zweier Sätze ausreicht, dass sie unter beliebigen Umständen stets beide wahr oder beide falsch sind und bezeichnen diese Umkehrung des sichersten Prinzips als:[23]

---

21 Die Benennung (*Most Certain Principle*) geht auf den neuseeländischen Logiker, Semantiker und Sprachphilosophen Maxwell J. Cresswell zurück, der das Prinzip in seinem Aufsatz *The Autonomy of Semantics* (1982) formuliert hat.

22 Obwohl sie sich im selben Abteil abspielen, unterscheiden sie sich in dem Sinne auch räumlich von einander, als sich der Zug inzwischen bewegt hat!

Semantisches Hauptprinzip
Dass zwei Sätze dieselbe Bedeutung haben, heißt, dass sie auf genau dieselben Situationen zutreffen.

In dieser Formulierung werden die Situationen, von denen die betreffenden Sätze *falsch* sind, nicht genannt. Das ist auch nicht nötig. Denn wenn zwei Sätze auf genau dieselben Situationen zutreffen, also von denselben Situationen wahr sind, dann sind beide von allen anderen Situationen falsch.

Aus dem Semantischen Hauptprinzip folgt, dass zwei Sätze, die etwas Verschiedenes bedeuten, nicht von genau denselben Situationen wahr sein können. Jeder Bedeutungsunterschied zwischen zwei Sätzen muss sich also in (mindestens) einer Situation niederschlagen, auf die nur einer der beiden Sätze zutrifft. Im Fall von (1) und (2), die tatsächlich nicht dasselbe bedeuten, hatten wir das Vorhandensein einer solchen Situation als Beleg für den Bedeutungsunterschied gewertet.[24] Das Semantische Hauptprinzip zwingt uns nun, bei *jedem* Bedeutungsunterschied einen solchen Beleg angeben zu können. Das ist, wie wir noch öfters sehen werden, nicht immer ganz einfach. Doch erweist sich das Hauptprinzip bei der Entwicklung der Semantik als so hilfreich, dass sich dieser Aufwand im allgemeinen lohnt.

1.2 Propositionen

Nach dem Semantischen Hauptprinzip kommt es bei der Bedeutung eines Satzes nur darauf an, auf welche Situationen er zutrifft. Man kann daher die Bedeutung eines Satzes mit diesen Situationen identifizieren. Genauer gesagt werden wir annehmen, dass die Bedeutung eines Satzes aus allen Situationen *besteht*, auf die der Satz zutrifft. Die Bedeutung von (3) besteht demnach gerade aus den Situationen, in denen jemand hustet:

(3) **Jemand hustet.**

Wenn z.B. Tom an seinem Schreibtisch sitzt und plötzlich husten muss, dann trifft (3) auf diese Situation zu; wenn sich dagegen während eines Konzerts alle Zuhörer ruhig verhalten, handelt es sich um eine Situation, auf die (3) nicht zutrifft. Nennen wir die erste Situation einmal t und die zweite k. Dann umfasst nach unserer Annahme die Bedeutung von (3) die Situation t, aber nicht die Situation k. Man beachte, dass dies so ist, ob nun (3) in den betreffenden Situationen selbst geäußert wird oder nicht. Der Satz muss überhaupt nicht geäußert werden und trifft dennoch auf t, aber nicht auf k zu. Das liegt einfach in seiner Bedeutung.

Dass die Bedeutung eines Satzes aus irgendwelchen Situationen *besteht*, ist so zu verstehen, dass diese Situationen eine *Gesamtheit* bilden, die als Ganzes die Bedeutung des Satzes ausmacht. Eine solche Gesamtheit werden wir als *Menge* auffassen, wobei wir diesen Begriff im mathematischen Sinn benutzen. Eine Menge zeichnet sich gerade dadurch aus, dass sie beliebig viele Objekte – in unserem Fall Situationen – zu einem abstrakten Ganzen zusammenfasst. Die auf diese Weise zusammengefassten Objekte bezeichnet man als die *Elemente* der Menge. Elementschaft ist also ein relativer Begriff: ein Ding oder eine Situation ist niemals *an sich* Element (oder nicht), sondern immer nur Element *von* einer gegebenen Menge. Die soeben betrachtete Situation t ist Element der Bedeutung von (3), aber z.B. kein Element der Bedeutung von:

(4) **Niemand hustet.**

---

23 Das Semantische Hauptprinzip geht auf den *Tractatus logico-philosophicus* (1921) des österreichischen Philosophen Ludwig Wittgenstein zurück.

24 Übrigens besagt (2), dass ein kleiner Junge ein Lied singt.

Was hat ein mathematischer Begriff wie der der Menge überhaupt in der logischen Semantik zu suchen? Würde nicht ein 'naiver' Begriff von Gesamtheit ausreichen, wenn es darum geht, Satzbedeutungen zu bestimmen? Ja und nein. Solange wir ausschließlich Satzbedeutungen betrachten, bringt die mathematische Modellierung tatsächlich nicht viel. Aber wir wollen ja herausfinden, wie sich die Bedeutungen von Sätzen kompositionell aus denen ihrer Teile ergeben. Und dafür erweisen sich ein paar elementare logisch-mathematische Hilfsmittel als unentbehrlich. Bereits im nächsten Kapitel wird das deutlich werden. Die mathematische Rekonstruktion des Bedeutungsbegriffs bringt zudem ein gewisses Maß an Präzision mit sich, das verhindert, dass man schwierige Probleme durch blumige Formulierungen unter den Teppich redet. Stattdessen erleichtert sie die Formulierung prinzipiell überprüfbarer theoretischer Hypothesen. Doch bevor wir dazu gelangen, müssen wir erst einen Teil des nötigen Handwerkszeugs erarbeiten.

Das fängt mit dem Mengenbegriff an. Wenn wir hier auch keine Einführung in die Mengenlehre geben werden – das ist für unsere Zwecke auch gar nicht nötig – so brauchen wir doch ein Minimum an Hintergrundwissen. Fürs Erste geben wir uns mit der für Mengen zentralen Eigenschaft zufrieden, die wir wieder als allgemeines Prinzip formulieren. Es besagt, dass sich eine Menge einzig und allein durch die Objekte, die in ihr zusammengefasst werden, also ihre Elemente, bestimmt:

> *Extensionalitätsprinzip*
> Wenn eine Menge A genau dieselben Elemente besitzt wie eine Menge B, dann ist $A = B$.

Der Gehalt des Extensionalitätsprinzips lässt sich am besten an einem Beispiel erkennen. Fasst man alle deutschen Millionenstädte zu einem abstrakten Ganzen zusammen, erhält man eine Menge mit drei Elementen. Für diese Menge kann man auch '{Berlin, Hamburg, München}' schreiben, wobei man die Elemente auflistet und mit Nasenklammern umschließt.[25] In diesem Fall haben wir die Elemente nach ihrer Einwohnerzahl geordnet. Wir hätten aber ebensogut '{Hamburg, Berlin, München}' schreiben können. Warum? Weil das, was zwischen den Nasenklammern steht, die Elemente der betreffenden Menge sind, demnach {Berlin, Hamburg, München} und {Hamburg, Berlin, München} dieselben Elemente haben und folglich *nach dem Extensionalitätsprinzip* es sich um ein und dieselbe Menge handeln muss. Aus demselben Grund könnte man auch einzelne (oder alle) Elemente der Menge mehr als einmal auflisten, ohne dass dies etwas an der Menge selbst ändert. Es gilt also: {Berlin, Hambug, München} = {Hamburg, Berlin, München, Berlin, Hamburg}. Insbesondere lässt sich von der Länge der Liste zwischen den Nasenklammern nicht immer auf die Anzahl der Elemente der betreffenden Menge schließen.

Das Extensionalitätsprinzip kann man weder beweisen noch widerlegen. Es handelt sich vielmehr um eine begriffsbildende Annahme: der Mengenbegriff, also der Begriff der Zusammenfassung von Objekten zu einem abstrakten Ganzen, ist so zu verstehen, dass er dieses Prinzip erfüllt. Stellt man fest, dass zwei Objekte A und B zwar dieselben Elemente haben, aber doch nicht dasselbe sind – d.h. $A \neq B$ – dann kann es sich bei A und B nicht um Mengen im Sinne der Mengenlehre gehandelt haben (und man hätte in diesem Fall auch nicht von *Elementen* sprechen sollen).

Das Extensionalitätsprinzip garantiert, dass wir das Semantische Hauptprinzip einlösen können, indem wir Satzbedeutungen als Mengen von Situationen betrachten: die Mengen der Situationen, auf die zwei Sätze zutreffen, stimmen nach dem Extensionalitätsprinzip gerade

25 Natürlich umschließt man nicht die Elemente selbst, sondern *Bezeichnungen* für diese Elemente, in diesem Fall also Städte*namen*. Übrigens kommt es auch nicht auf die *Art* der Bezeichnung an, solange nur dasselbe Objekt benannt wird. M könnte man also ebesnsogut als '{Berlin, Hansestadt Hamburg, Bayerns Hauptstadt}' notieren.

dann miteinander überein, wenn die beiden Sätze auf genau dieselben Situationen zutreffen, d.h. wenn sie nach dem Semantischen Hauptprinzip miteinander synonym sind. Weitere mengentheoretische Prinzipien werden wir im Verlaufe der nächsten Kapitel kennen lernen.

Satzbedeutungen sind Mengen, deren Elemente ausschließlich Situationen sind. Solche Mengen bezeichnet man in der Semantik als *Propositionen*,[26] und man sagt, dass ein Satz die Proposition, die er bedeutet, *ausdrückt*. Vorsicht: nicht jede Proposition muss die Bedeutung eines Satzes sein! Satzbedeutungen sind, wie man sich leicht überlegen kann, in der Regel relativ große Mengen von Situationen. So ist z.B. die weiter oben betrachtete Situation t nur eine von vielen, auf die der Satz (3) zutrifft. Mengen von Propositionen können dagegen beliebig klein sein, also z.B, auch nur ein oder zwei Elemente haben. Aber, wie in den Übungsaufgaben gezeigt wird, gibt es wohl keinen Satz, dessen Bedeutung eine dermaßen kleine Menge von Situationen ist. Kurz und grün: der Begriff der Proposition ist in dem Sinne allgemeiner als der der Satzbedeutung, als Satzbedeutungen immer Propositionen sind, aber nicht jede Proposition eine Satzbedeutung ist.

Ein Satz kann, wie wir gesehen haben, auf eine konkret gegebene Situation bezogen werden. Mit der Äußerung des Satzes wird die Situation als Element der durch ihn ausgedrückten Proposition charakterisiert. Das kann zu verschiedenen Zwecken geschehen – in Beantwortung einer Frage, um ein Missverständnis auszuräumen, oder einfach um die Zuhörerschaft über den Stand der Dinge zu informieren. Der Einsatz der durch einen Satz ausgedrückten Proposition in der Kommunikation ist Gegenstand der Pragmatik und wird uns nicht weiter beschäftigen.

Eine Frage der Sprachverwendung ist es auch, auf welche Situation sich der Sprecher bezieht, wenn er etwas über sie aussagt. In der Regel handelt es sich dabei um eine Situation, in der sich der Sprecher selbst gerade befindet. Wenn Hans seiner Nachbarin zu Beginn eines Konzerts erstaunt (4) zuflüstert, kann er dies als Aussage über die ersten Minuten des Konzerts gemeint haben und genauso verstanden werden. Und er kann damit Recht haben, obwohl zur gleichen Zeit im Foyer eine Garderobenfrau hustet. Das Foyer gehört dann einfach nicht in die Situation, über die Hans spricht.

Als räumlich-zeitliche Zusammenhänge können Situationen unterschiedlich groß sein. So ist die soeben erwähnte Konzert-Situation Teil einer größeren Situation, die zusätzlich noch das Foyer umfasst. Hans befindet sich in beiden Situationen. Es hätte daher keinen Sinn zu sagen, Hans spreche über *die* Situation, in der er sich mit seiner Nachbarin befindet. Denn beide befinden sich in vielen Situationen zugleich: im Konzertsaal während der ersten fünf Minuten; in Reihe 17 während des gesamten Konzerts; im Amsterdamer Concertgebouw während des ersten Satzes der Alpensymphonie; im Mitteleuropa des frühen 21. Jahrhunderts etc. pp. In einigen dieser Situationen ist (3) wahr, in anderen (4). Aber, nur von einer dieser Situationen spricht Hans mit seiner geflüsterten Äußerung von (4). Welche Situation das ist, hängt von seinen Absichten ab. Wenn er von seiner Nachbarin verstanden werden will, muss es für sie irgendwie offensichtlich sein, worauf er sich bezieht. Wenn sie z.B. vorher Hans gegenüber ihrer Befürchtung Ausdruck verliehen hat, dass das Konzert vor lauter Hustern nicht genießbar sein könnte, und jetzt gerade fünf Minuten seit Konzertbeginn verstrichen sind, dann liegt es in der Tat nahe, dass sich Hans mit seiner Äußerung von (4) auf die Situation im Konzertsaal während dieser fünf Minuten bezieht. Aber unter etwas anderen Umständen könnte er sich auch auf eine andere Situation beziehen – so etwa, wenn sich die Nachbarin kurz zuvor über den Gesundheitszustand seiner Familie erkundigt hätte.

Wie es dem Sprecher gelingt, den Situationsbezug für die Hörerin nachvollziehbar zu machen, ist im allgemeinen wieder eine Frage der Pragmatik. In vielen Fällen kommt es allerdings nicht darauf an, welche Situation *genau* gemeint ist, solange diese sich innerhalb bestimmter

26 Von engl. *proposition* 'Aussage'.

Grenzen bewegt. Ob sich Hans auf die ersten fünf oder die ersten viereinhalb Minuten bezieht, ob auf den gesamten Saal oder nur auf das Parkett – diese Details sind offenbar für die Kommunikation nicht von Belang – ja, sie werden oft weder vom Sprecher noch von der Hörerin registriert.[27] Darüber hinaus kann der Inhalt der Äußerung, also die ausgedrückte Proposition, den Situationsbezug weitgehend *neutralisieren*. So kommt es bei Sätzen wie (5) – entgegen dem ersten Eindruck – nicht darauf an, auf welchen Ort man sie bezieht:

(5) **In den USA gibt es in jedem Bundesstaat einen Ort namens *Springfield*.**

Statt wie in (4) implizit auf den Ort der Situation Bezug zu nehmen, über die er spricht, nennt (5) explizit einen ganz bestimmten Ort, die USA. Angenommen, Hans äußert (5), während er nach dem Konzert auf die Straßenbahn wartet. Zunächst mag man meinen, dass er damit etwas über eine weit entfernte, räumlich relativ ausgedehnte Situation aussagt. Doch ist dem nicht unbedingt so. Gesagt wird ja mit (5), dass es *zu einer nicht explizit genannten Zeit* in jedem US-amerikanischen Staat ein Springfield gibt. Wie in (3) und (4) ist die Zeit, auf die die Aussage bezogen wird, wieder die der Situation, über die Hans spricht – z.B. die zehn Minuten an der Amsterdamer Haltestelle. Einen weiteren Bezug auf diese Situation gibt es in (5) nicht. Insbesondere ist nicht von dem Ort die Rede, an dem die Situation lokalisiert ist. Es ist zwar von einem Ort die Rede, aber dieser hat mit der Situation, über die der Satz eine Aussage macht, nichts zu tun. Die Bezugnahme auf den Ort der Situation ist durch Verwendung einer expliziten Ortsangabe **in den USA** neutralisiert. Es ist also ganz egal, auf welche Situation (5) bezogen wird, solange sie zeitlich mit der Wartezeit übereinstimmt.[28] Um ein konkretes Beispiel zu nennen: Hans hätte (5) nach dem Konzert äußern können, um damit eine Aussage über eine Situation zu machen, in der er sich mit seiner Gesprächspartnerin befindet. Die Aussage, die er dann gemacht hätte, wäre, dass sich diese Situation zu einer Zeit abspielt, zu der in den USA jeder Bundesstaat einen Ort names *Springfield* enthält. Da die durch (5) ausgedrückte Proposition aus allen Situationen besteht, die die unterstrichene Bedingung erfüllen, wäre die Situation, über die Hans spricht, selbst dann in dieser Menge, wenn sie nur die ersten zwei Reihen des Parketts im Konzertsaal umfasst – solange es nur genügend Springfields in den USA gibt. Ganz allgemein trifft der Satz (5), sobald er auf eine Situation s zutrifft, auch auf jede Situation zu, die zeitlich mit s übereinstimmt, egal wo sie räumlich lokalisiert ist. In diesem Sinne ist der räumliche Aspekt der Situation, auf die sich ein Sprecher von (5) bezieht, neutralisiert – was wiederum heißt, dass die Hörerin nicht bis ins letzte (räumliche) Detail wissen muss, auf welche Situation sich der Sprecher bezieht.

Was für den Ort gilt, gilt auch für die Zeit. Auch sie lässt sich weitgehend neutralisieren:

(6) **Am 22. April 2002 haben insgesamt fünfzehn Leute angerufen.**

Der Satz kann auf sehr verschiedene Situationen zutreffen: mein Büro, das Zimmer meines älteren Sohns, die Beschwerdeabteilung eines Computerhändlers usw. Aber wenn er auf eine solche Situation zutrifft, dann spielt der Zeitpunkt praktisch keine Rolle.[29] Nehmen wir das Zimmer meines jüngeren Sohnes Tom am 23. 4. 2002. Wenn (6) auf diese Situation t – also

[27] Diese Vagheit des Gemeinten muss wiederum in der pragmatischen Analyse erklärt werden, was gar nicht so einfach ist.

[28] Aus sachlichen Gründen ist auch die zeitliche Einschränkung nicht so eng zu sehen; denn Ortsnamen ändern sich nicht so häufig. Es kommt also nicht darauf an, ob die Situation, auf die die Äußerung von (5) bezogen wird, ein paar Minuten (oder Tage) länger dauert.

[29] … mit einer kleinen Einschränkung, um die es in einer Übungsaufgabe gehen wird. – Übrigens ist (6) (strukturell) ambig. In der sog. *individuenbezogenen* Lesart besagt der Satz, dass am fraglichen Tag fünfzehn *verschiedene* Personen angerufen haben, während es nach der *ereignisbezogenen* Lesart, die wir hier außer Acht lassen werden, nur fünfzehn Anrufe gegeben haben muss, die zumindest teilweise von derselben Person getätigt sein konnten.

diese räumlich-zeitliche Umgebung – zutrifft, dann heißt dies, dass einen Tag zuvor fünfzehn Personen bei Tom angerufen haben (was nebenbei bemerkt vergleichsweise wenig ist); aber dann trifft (6) auch auf die Situation *t*' zu, die einen Tag später beginnt und zwei Wochen danach aufhört; denn auch von dieser Situation wäre es dann richtig, dass *am 22. April 2002* dort – also bei Tom – insgesamt fünfzehn Leute angerufen haben.

1.3 Der Logische Raum

Nach dem Semantischen Hauptprinzip muss sich jeder Bedeutungsunterschied zwischen zwei Sätzen mit Hilfe einer Situation belegen lassen. Dabei muss es sich nicht unbedingt um eine *gegenwärtige* Situation handeln:

(7) **Ein Archaeopterix hebt ab.**

(8) **Ein Flugsaurier setzt zur Landung an.**

Natürlich bedeuten (7) und (8) nicht dasselbe, obwohl beide von jeder gegenwärtigen Situation falsch sind. Dennoch ist anzunehmen, dass es *vergangene* Situationen gibt, auf die der eine der beiden Sätze zutrifft, der andere jedoch nicht. Die Tatsache, dass solche Situationen der Vergangenheit angehören, ohne dass ein Mensch sie beobachtet hat, ändert nichts an der *Existenz* solcher Situationen. Die Situationen, von denen im Semantischen Hauptprinzip die Rede ist, sind also zeitlich sehr weit gefasst. Sie umfassen auch alle zukünftigen Situationen, anhand derer man z.B. (9) und (10) unterscheiden kann:

(9) **Ein Astronaut fliegt zum Mars.** ♂

(10) **Ein Astronaut fliegt zur Venus.** ♀

Denn sobald in ferner Zukunft einmal ein Astronaut zum Mars fliegt, ist von dieser Reise (die ja auch ein Raum-Zeit-Ausschnitt, also eine Situation, ist) der Satz (9), nicht aber der Satz (10) wahr. Somit gibt es – die genannte Reise einmal vorausgesetzt – in der Tat Situationen, anhand derer sich (9) und (10) im Sinne des Semantischen Hauptprinzips unterscheiden lassen.

Doch selbst wenn man alle großen und kleinen, nahen und fernen, alle vergangenen, gegenwärtigen und zukünftigen Situationen heranzieht, werden diese nicht ausreichen, um sämtliche Bedeutungsunterschiede zu belegen. (9) und (10) ließen sich z.B. dann nicht voneinander unterscheiden, wenn niemals irgendjemand weiter als bis zum Mond flöge. Denn in dem Fall wären beide Sätze von *jeder* Situation falsch – und somit wären insbesondere beide Sätze von *denselben* Situationen wahr. Nach dem Semantischen Hauptprinzip müssten (9) und (10) demnach synonym sein, was natürlich absurd ist.

Um Beispiele dieser Art zu finden, muss man nicht über die Zukunft der Raumfahrt spekulieren. Auch die folgenden beiden Sätze bedeuten offenbar nicht dasselbe, sind aber von denselben Situationen wahr:

(11) **Der Entdecker der X-Strahlen starb in München.**
(12) **Der erste Physik-Nobelpreisträger starb in München.**

Bei den X-Strahlen handelt es sich um eine kurzwellige elektromagnetische Strahlung, die gemeinhin als *Röntgen-Strahlen* bekannt ist – so benannt nach ihrem Entdecker Wilhelm Conrad Röntgen, dem ersten Physik-Nobelpreisträger, der 1923 in München starb. Da dies so ist, gibt es keine Situation, auf die (11) zutrifft, (12) aber nicht – und man müsste aufgrund des Semantischen Hauptprinzips darauf schließen, das (11) und (12) dieselbe Bedeutung haben. Das Prinzip scheint damit unhaltbar zu sein.

Doch ganz so schnell geben wir nicht auf. Denn auch wenn es keine Situation gibt, von der z.B. (11) wahr ist, (12) aber nicht, so hätte es doch durchaus eine solche Situation geben können. Wenn z.B. nicht Röntgen den ersten Nobelpreis erhalten hätte, sondern Thomas Alva Edison, der in West Orange (New Jersey) starb, wäre (11) hier und heute wahr, (12) aber falsch – und wir hätten den vom Semantischen Hauptprinzip geforderten Beleg zur Differenzierung der Bedeutungen von (11) und (12) erbringen können. Dass wir es scheinbar nicht können, liegt also daran, dass wir – jedenfalls bisher – mit "Situationen" immer nur *tatsächliche* Situationen gemeint haben. Erweitern wir jedoch den Begriff der Situation auch auf solche *möglichen* Situationen wie die soeben beschriebene, können Beispiele wie (11) und (12) dem Semantischen Hauptprinzip nichts mehr anhaben. Und genau diese Erweiterung des Situationsbegriffs nehmen wir hiermit vor. Wenn also hier und im folgenden von Situationen die Rede ist, sind nicht nur solche Szenarien gemeint, die tatsächlich stattfinden, stattgefunden haben oder stattfinden werden, sondern alle denkbaren Situationen überhaupt.

Die Gesamtheit aller möglichen Situationen, zu denen auch die tatsächlichen gehören, bezeichnet man als den *Logischen Raum*.[30] Es handelt sich dabei um eine – sehr große – Menge. Da alle Elemente dieser Menge Situationen sind, ist der Logische Raum eine Proposition; eine Übungsaufgabe wird zeigen, dass er auch eine Satzbedeutung ist. Doch verschaffen wir uns erst einmal Klarheit über seine Elemente, also die möglichen Situationen selbst, und seine Struktur, also die Beziehungen zwischen den möglichen Situationen.

Wie tatsächliche Situationen sind mögliche Situationen räumlich-zeitliche Ausschnitte, die ebenfalls räumlich beliebig groß und zeitlich beliebig ausgedehnt sein können. Aber anders als tatsächliche Situationen sind nicht alle möglichen Situationen auch Ausschnitte der Wirklichkeit. Stattdessen sind sie – wenn sie nicht real sind – Ausschnitte anderer Wirklichkeiten oder, wie wir (einer philosophischen Tradition folgend) sagen werden: Ausschnitte anderer *möglicher Welten*. So wie unsere Welt vom Urknall bis zum Ende des Universums eine gigantische Situation ist, wie sie größer nicht sein kann, so ist auch das weiter oben betrachtete Szenario mit Nobelpreisträger Edison Teil einer anderen gigantischen Situation, einer anderen möglichen Welt. Mögliche Welten sind also Situationen, die in dem Sinne *maximal* sind, als sie nicht selbst wieder Teile größerer Raum-Zeit-Gebiete sind.

Die Situationen innerhalb einer möglichen Welt können in allerlei Beziehungen zu einander stehen. Die eine kann in der anderen enthalten sein oder ihr zeitlich voran gehen, sie können sich räumlich überlappen oder weit auseinander liegen etc. Jede mögliche Welt besteht somit aus einer Unzahl von Teil-Situationen, die in verschiedenen räumlich-zeitlichen Beziehungen zu einander stehen. Und jede mögliche Situation, also jedes Element des Logischen Raums ist Teil einer möglichen Welt und somit Teil eines räumlich-zeitlichen Beziehungsgeflechts. Jede einzelne dieser Situationen ist dabei ein ganz konkreter, ganz spezifischer Raum-Zeit-Ausschnitt. So wie die tatsächliche Situation, in der ich mich befinde, aus unzähligen Details besteht, von denen ich noch nicht einmal etwas ahne – von der Seriennummer des Laptops auf meinem linken Knie über die Geschwindigkeit des Zugs, in dem ich sitze, bis zur genauen Uhrzeit – so ist auch jede Situation des Logischen Raum bis ins letzte konkrete Detail spezifiziert. Und da mögliche Welten ebenfalls Situationen sind, gilt dies auch für sie. Eine mögliche Welt im Sinne des Logischen Raums ist demnach nicht so etwas wie eine Romanwelt. Denn während z.B. die Welt der Effi Briest offen lässt, ob Innstetten ein Muttermal unter der

30 Der Terminus stammt aus dem in Fn. 23 genannten Werk.

linken Achselhöhle hat – Fontane hat sich um diese Einzelheit nicht gekümmert – sind die möglichen Welten des Logischen Raums auch in diesen Details vollkommen spezifiziert. Im Logischen Raum gibt es daher zahlreiche mögliche Welten, die dem Fontaneschen Roman entsprechen, zahlreiche Effi-Briest-Welten, die sich lediglich in solchen Details von einander unterscheiden, die im Roman offen gelassen werden; und keine dieser Welten kann den Anspruch erheben, *die* Welt der Effi Briest zu sein. Nur in ihrer Gesamtheit entsprechen sie dem Inhalt des Romans. So besehen ist eine *Romanwelt* im landläufigen Sinne eine *Proposition* im Sinne des Logischen Raums.

Der Vielfältigkeit des Logischen Raums werden wir keine Grenzen setzen. Keine denkbare Situation, und sei sie auch noch so abwegig, soll aus ihm ausgeschlossen werden. Damit stellen wir sicher, dass sich die Bedeutungen beliebiger Sätze mithilfe des Semantischen Hauptprinzips von einander unterscheiden lassen, solange es auch nur denkbar ist, dass der eine von ihnen wahr ist und der andere nicht. Doch trotz der Vielfalt des Logischen Raums lässt sich nicht immer eine entsprechende mögliche Situation finden, die zwei gegebene Sätze voneinander trennt. So treffen z.B. die folgenden Sätze offenbar auf genau dieselben Situationen zu – denn wenn der eine wahr ist, kann der andere schlecht falsch sein:

(13) **Ein Esel wird von einem Bauern gekauft.**
(14) **Ein Bauer kauft einen Esel.**

Nach dem Semantischen Hauptprinzip sind (13) und (14) also synonym – und das ist auch gut so. Denn offenbar bedeuten die beiden Sätze in der Tat dasselbe.

1.4 Sinnrelationen im Logischen Raum

Die für (13) und (14) festgestellte Synonymie ist eine der in Abschnitt 0.2 angesprochenen Sinnrelationen, eine Beziehung, die allein aufgrund der Bedeutung der beiden Ausdrücke besteht. In diesem Abschnitt werden wir weitere Sinnrelationen betrachten, die zwischen (Aussage-) Sätzen bestehen können. Dabei wird unser Hauptaugenmerk auf der Frage liegen, wie sich diese Sinnrelationen in den Propositionen niederschlagen.

Beginnen wir mit einem Fall von Inkompatitbiliät. Wir hatten diese Sinnrelation eigentlich nur für Substantive definiert, aber sie überträgt sich auf natürliche Weise auf Sätze. Denn so wie **Gedanke** und **Buch** niemals auf denselben Gegenstand bezogen werden können – kein Gedanke ist ein Buch und umgekehrt – so können (14) und (15) niemals auf dieselbe Situation zutreffen:

(15) **Niemand kauft ein Tier.**

Wenn nämlich *s* irgendeine Situation wäre, auf die (14) und (15) zuträfen, dann müsste es in *s* – weil ja (14) zutrifft – irgendeinen Bauern geben, der einen Esel kauft; aber dann kauft in dieser Situation jemand (nämlich besagter Bauer) ein Tier (nämlich besagten Esel), womit entgegen unserer Annahme (15) als Aussage über *s* falsch wäre. Das Verhältnis zwischen (14) und (15) kann man sich graphisch in einem sog. *Venn-Diagramm* veranschaulichen, in dem Mengen als Flächen dargestellt werden:

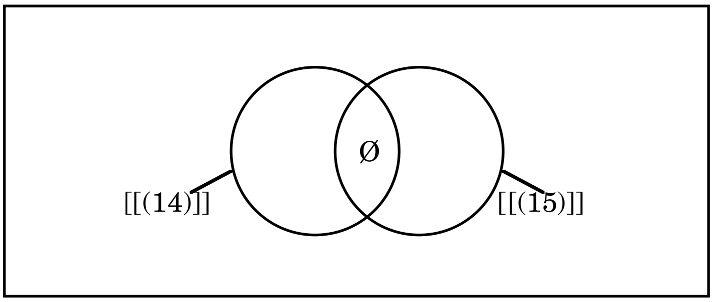


Fig. 1: Inkompatibilität von (14) und (15)

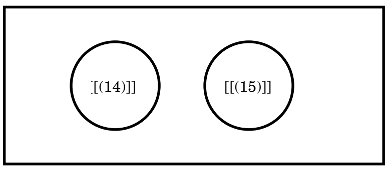
In Fig. 1 stellt das äußere Rechteck den Logischen Raum aller möglichen Situationen dar. Die Situationen, auf die (14) bzw. (15) zutreffen, sind jeweils umkreist; wir verwenden die schon in Abschnitt 0.3 (im Zusammenhang mit der Termauswertung) benutzten *semantischen Klammern* und notieren die durch einen Satz S ausgedrückte Proposition als '$[\![S]\!]$'. Die Region der Situationen, die sowohl von $[\![(14)]\!]$ als auch von $[\![(15)]\!]$ abgedeckt werden, ist der *Schnitt* der beiden Propositionen, in mengentheoretischer Notation: $[\![(14)]\!] \cap [\![(15)]\!]$. Dabei besagt die Überschneidung der Kreise nicht, dass die beiden Mengen auch gemeinsame Elemente haben. Und tatsächlich haben sie keine gemeinsamen Elemente; denn wie wir gerade festgestellt haben, gibt es keine solchen Situationen, auf die sowohl (14) als auch (15) zutrifft. In Fig. 1 ist deshalb die Überschneidungsfläche von $[\![(14)]\!]$ und $[\![(15)]\!]$ mit dem Symbol 'Ø' markiert, das für die leere Menge – die einzige Menge ohne Elemente – steht.[31]

Die Inkompatibilität von (14) und (15) findet ihren Ausdruck in dem in Fig. 1 dargestellten Verhältnis zwischen $[\![(14)]\!]$ und $[\![(15)]\!]$, sich nicht zu überlappen: $[\![(14)]\!] \cap [\![(15)]\!] = Ø$. In der Mengenlehre bezeichnet man zwei Mengen, die kein gemeinsames Element besitzen, als zueinander *disjunkt*. Wie das Beispiel zeigt, entspricht die Disjunktheit zwischen Propositionen gerade der Inkompatibilität zwischen Sätzen, die diese Propositionen ausdrücken. Auch andere Sinnrelationen zwischen Sätzen entsprechen einfachen mengentheoretischen Verhältnissen zwischen den Propositionen, die sie ausdrücken. Betrachten wir dafür:

(16) **Niemand kauft eine Kuh.**

(15) *impliziert* offenbar (16), d.h. *wenn* (15) zutrifft, *dann* trifft auch (16) zu. Bezogen auf den Logischen Raum heißt dies wiederum, dass jede mögliche Situation, von der (15) wahr ist, eine solche ist, von der (16) wahr ist. Es gibt, mit anderen Worten, keine mögliche Situation, auf die (15) zutrifft, ohne dass (16) auf sie zutrifft. Dieser Sachverhalt lässt sich wieder in einem Venn-Diagramm darstellen:[32]

31 Man hätte die beiden Kreise auch so zeichnen können, dass sie sich gar nicht überlappen:



Dass Ø die *einzige* elementfreie Menge ist, liegt am Extensionalitätsprinzip: wenn L kein Element enthält, besitzen L und Ø insbesondere dieselben Elemente, d.h. L *ist* die Menge Ø.

32 Eine alternative Darstellung ist:

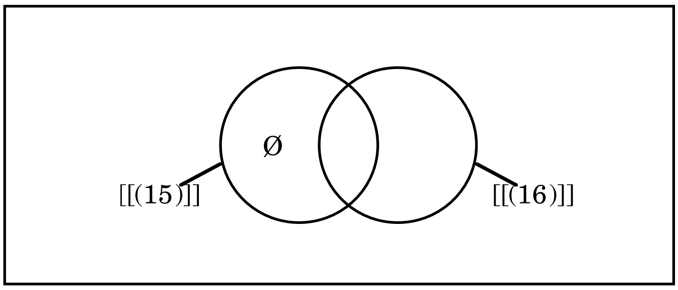


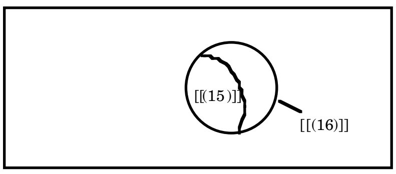
Fig. 2: Implikationsbeziehung zwischen (15) und (16)

Jedes Element der Proposition ⟦(15)⟧ ist also ein Element von ⟦(16)⟧. Mengentheoretisch gesprochen ist damit ⟦(15)⟧ eine *Teilmenge* von ⟦(16)⟧: $[\![(15)]\!] \subseteq [\![(16)]\!]$. So wie die Inkompatibilität zwischen Propositionen auf die mengentheoretische Disjunktheit hinausläuft, entspricht demnach die Implikation der Teilmengenbeziehung.

Wenn man weiß, dass (15) (auf eine gegebenen Situation) zutrifft, weiß man mehr, als wenn man nur weiß, dass (16) (von dieser Situation) wahr ist. Im allgmeinen enthält ein Satz, der einen anderen impliziert, mehr oder detailliertere Informationen als letzterer. Da die Implikation auf die Teilmengenbeziehung hinausläuft, bedeutet dies: *je informativer* ein Satz ist, *desto kleiner* ist die durch ihn ausgedrückte Proposition.[33] Dieser zunächst paradox anmutende Zusammenhang wird klarer, wenn man bedenkt, dass der informativere Satz mehr Situationen ausschließt als der weniger informative. So schließt z.B. (16) nicht aus, dass jemand eine Ente gekauft hat; denn ⟦(16)⟧ enthält Situationen, in denen Fritz eine Ente kauft (aber niemand eine Kuh). Solche Situationen werden von (15) ausgeschlossen, d.h. sie sind keine Elemente von ⟦(15)⟧. ⟦(15)⟧ ist also selektiver – und damit kleiner.

Auch die Implikation ist mit einer Sinnrelation verwandt, die wir bereits im nominalen und adjektivischen Bereich kennen gelernt haben: der Hyponymie. Denn so wie (15) nur auf eine Situation zutreffen kann, auf die (16) zutrifft, so kann auch das Hyponym **Katze** nur auf ein Individuum zutreffen, auf die das auch das Hyperonym **Tier** zutrifft. Auf den genauen Zusammenhang zwischen Hyponymie und Implikation können wir allerdings erst eingehen, wenn uns die in Kapitel 3 zu leistende semantische Analyse der Substantive zur Verfügung steht.

1.5 Satzkoordination



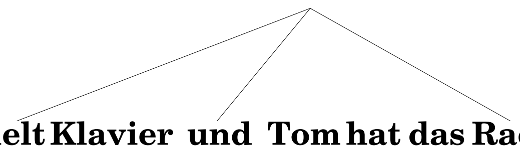
33 Die *kleinere* Menge ist hier nur die weniger umfassende, sie enthält nicht unbedingt weniger Elemente: Propositionen sind in der Regel unendlich groß, und die eine kann Teilmenge der anderen sein, ohne weniger Elemente zu enthalten. Eine mathematische Analogie mag diese sog. *Pradoxie des Unendlichen* erhellen: die Menge der geraden Zahlen {2,4,6,…} ist eine Teilmenge der positiven natürlichen Zahlen {1,2,3,4…}, aber beide haben in dem Sinne gleich viele Elemente, als sie sich eins-zu-eins auf einander beziehen lassen. Mehr dazu in jeder Mengenlehre-Einführung oder in meinem Proseminar *Logische Grundlagen der Semantik* im kommenden Semester.

Die mengentheoretische Analyse der Satzbedeutungen als Propositionen wirft ein Licht auf die Bedeutungen koordinierender Konjunktionen wie **und** und **oder**, wie sie in den folgenden Sätzen verwendet werden:

(17) **Alain spielt Klavier, und Tom hat das Radio eingeschaltet.**
(18) **Alain spielt Klavier, oder Tom hat das Radio eingeschaltet.**

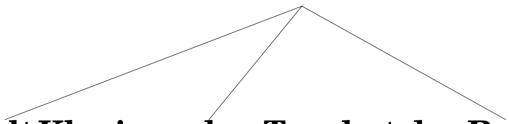
(17) und (18) lassen sich kompositionell deuten. Wir legen dafür eine *ternäre* (= dreigliedrige) Klammerung zugrunde:

(17')



Alain spielt Klavier und Tom hat das Radio eingeschaltet

(18')



Alain spielt Klavier oder Tom hat das Radio eingeschaltet

Nach dem Kompositionalitätsprinzip ergibt sich die Bedeutung des Satzes (17) durch Kombination der Bedeutungen seiner unmittelbaren Teile. Nach (17') hat (17) drei Teile, nämlich:

(17a) **Alain spielt Klavier**
(17b) **und**
(17c) **Tom hat das Radio eingeschaltet**

Zwei der drei Teile von (17) sind Sätze. Ihre Bedeutungen, $[\![(17a)]\!]$ und $[\![(17c)]\!]$, sind folglich Propositionen. $[\![(17a)]\!]$ ist die Menge der Situationen, in denen Alain Klavier spielt, $[\![(17c)]\!]$ besteht aus den Situationen, in denen Tom das Radio eingeschaltet hat. Natürlich gibt es auch Situationen, in denen beides der Fall ist; das sind offenbar gerade die Situationen, auf die (17) zutrifft. $[\![(17)]\!]$ ist damit der *Schnitt* der beiden durch die Teilsätze von (17) ausgedrückten Propositionen: $[\![(17)]\!] = [\![(17a)]\!] \cap [\![(17c)]\!]$.

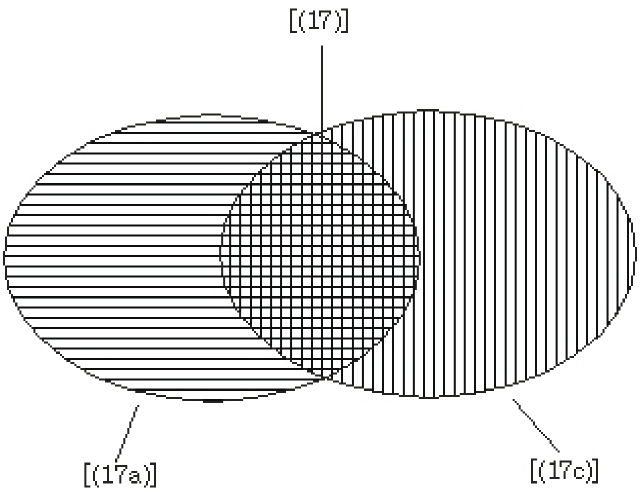


Fig. 3: $[\![(17a)]\!]$, $[\![(17c)]\!]$ *und* $[\![(17)]\!]$

Bevor wir uns überlegen, wie sich die Bedeutung von (17) kompositionell ermittelt, werfen wir einen Blick auf (18): auf welche Situationen trifft der Satz zu? Zunächst einmal umfasst $\llbracket(18)\rrbracket$ alle Situationen in $\llbracket(17a)\rrbracket$; denn sobald Alain Klavier spielt, trifft (18) zu. Ebenso umfasst $\llbracket(18)\rrbracket$ alle Situationen in $\llbracket(17c)\rrbracket$; denn auch wenn Tom das Radio eingeschaltet hat, trifft (18) zu. In Situationen, die außerhalb von $\llbracket(17a)\rrbracket$ und $\llbracket(17c)\rrbracket$ liegen, hat Tom weder das Radio eingeschaltet noch spielt Alain in ihnen Klavier. Auf solche Situationen trifft (18) nicht zu, auf die anderen sehr wohl. Folglich ist $\llbracket(18)\rrbracket$ die *Vereinigung* von $\llbracket(17a)\rrbracket$ und $\llbracket(17c)\rrbracket$. In mengentheoretischer Notation: $\llbracket(18)\rrbracket = \llbracket(17a)\rrbracket \cup \llbracket(17c)\rrbracket$ – und graphisch:

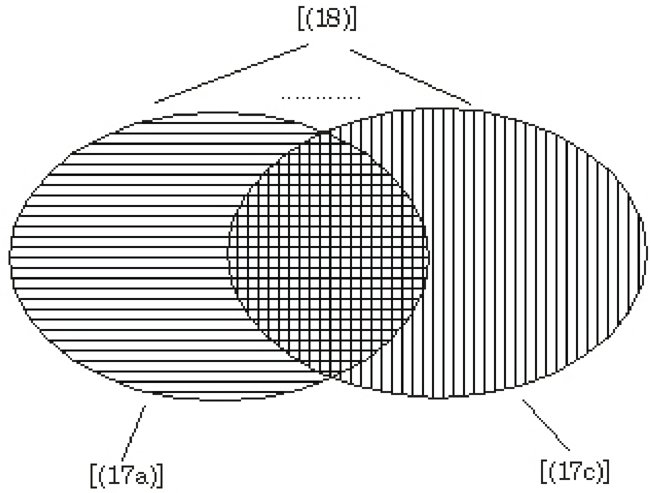


Fig. 4: $\llbracket(17a)\rrbracket$, $\llbracket(17c)\rrbracket$ *und* $\llbracket(18)\rrbracket$,

Dem Kompositionalitätsprinzip zufolge muss sich $\llbracket(17)\rrbracket$ aus $\llbracket(17a)\rrbracket$, $\llbracket(17c)\rrbracket$ und der Bedeutung von **und** ergeben; entsprechend ergibt sich $\llbracket(18)\rrbracket$ aus $\llbracket(17a)\rrbracket$, $\llbracket(17c)\rrbracket$ und der Bedeutung von **oder**. Abstrahiert man von den Zufälligkeiten des Beispiels ergibt sich die folgende Deutung von **und**- und **oder**-Verbindungen – oder *Konjunktionen* und *Disjunktionen*, wie man sie in der logischen Semantik nennt[34]:

(19) *Semantik der Konjunktion*
Wenn S und S' (Aussage-) Sätze sind, gilt:
$\llbracket S\ \textbf{und}\ S'\rrbracket = \llbracket S\rrbracket \cap \llbracket S'\rrbracket$.

(20) *Semantik der Disjunktion*
Wenn S und S' (Aussage-) Sätze sind, gilt:
$\llbracket S\ \textbf{oder}\ S'\rrbracket = \llbracket S\rrbracket \cup \llbracket S'\rrbracket$.

Von der allgemeinen Form her gleichen (19) und (20) der Regel (12) [*Bewertung komplexer Terme*] aus dem vorangehenden Kapitel. Dort wurde das [Nebeneinanderschreiben und] Hochstellen als Ausdruck einer arithmetischen Operation – der Potenzierung – gedeutet. Entsprechend deuten (19) und (20) Konjunktion und Disjunktion – also das Verbinden mit **und** bzw. **oder** – durch mengentheoretische Operationen, nämlich Schnitt ($\cap$) und Vereinigung ($\cup$). Die Analogie ist aber insofern schief, als es sich bei der Hochstellung zweifelsfrei um eine Art der Verknüpfung von Termen handelt, also um eine syntaktische Konstruktion der

[34] Die Termini *Konjunktion* und *Disjuktion* werden auch für die Wörter **und** und **oder** selbst verwendet sowie für die Bedeutungen dieser Wörter. Die Terminologie ist insofern etwas unglücklich, als ja eine *Konjunktion* im syntaktischen Sinne eine bestimmte Kategorie (Wortart) ist, der sowohl **und** als auch **oder** angehören. Aber in der Regel wird aus dem Zusammenhang klar, was jeweils gemeint ist – wie in einer Übungsaufgabe nachzuweisen ist.

mathematischen Formelsprache. Konjunktion und Disjunktion sind dagegen keine eigenen Konstruktionen. Vielmehr handelt es sich um Anwendungen derselben Konstruktion namens *Koordination*, also der Verbindung zweier Ausdrücke durch eine koordinierende Konjunktion. Will man Konjunktion und Disjunktion als Spezialfälle der Koordinations-Konstruktion deuten, muss man auch den Wörtern **und** und **oder** eine eigenständige Wortbedeutung zuweisen, die dann mit den Bedeutungen der verbundenen Sätze kombiniert werden kann. Es liegt nun nahe, die genannten mengentheoretischen Operationen selbst als diese Wortbedeutungen anzusehen:[35]

(21) *Lexikalische Semantik von Konjunktion und Disjunktion*
$[\![\mathbf{und}]\!] = \cap$; $[\![\mathbf{oder}]\!] = \cup$

Im Gegensatz zu (19) und (20) gleicht (21) von der allgemeinen Form her der *Bewertung einfacher Terme* (8) aus dem vorangehenden Kapitel, wo festgelegt wurde, das z.B. $[\![\mathbf{5}]\!] = 5$. Auch (21) gibt für gewisse einfache, lexikalische Ausdrücke einen semantischen Wert an. Allerdings wirkt (21) alles andere als trivial; denn dass das Wort **und** eine Schnittbildung von Propositionen ausdrückt, gehört (leider!) nicht zur schulischen Allgemeinbildung. Wir gehen für das folgende davon aus, dass (21) Teil der lexikalischen Semantik des Deutschen ist.

Statt wie in (19) und (20) Konjunktion und Disjunktion als verschiedene Konstruktionen zu behandeln, ist es offenbar angemessener, von einer einzigen Konstruktion auszugehen und den Unterschied auf einen Unterschied in der Wortbedeutung zurück zu führen. (21) legt fest, worin dieser Unterschied in der Wortbedeutung besteht. Aber was (21) nicht macht, was in der Tat noch fehlt, ist die Zurückführung der Satzbedeutung von Konjunktionen und Disjunktionen, also von Sätzen wie (17) und (18), auf die Bedeutungen der Wörter **und** und **oder**. Dies geschieht durch die folgende allgemeine Regel:

(22) *Semantik der Satzkoordination*
Wenn S und S' (Aussage-) Sätze sind und K eine koordinierende Konjunktion ist, gilt:
$[\![S\ K\ S']\!] = [\![S]\!]\,[\![K]\!]\,[\![S']\!]$.

Die Notation in der Gleichung mag befremden. Dabei nutzt sie nur aus, dass es sich bei den Bedeutungen der koordinierenden Konjunktionen um mengentheoretische Operationen handelt, die sich auf Propositionen anwenden lassen. Zum Beispiel ergibt sich nach (22) für den Fall, dass K = **oder**, unterm Strich genau dasselbe wie in (20):

(23)
$$
\begin{array}{llr}
 & [\![S\ K\ S']\!] & \\
= & [\![S\ \mathbf{oder} S']\!] & \text{wenn } K = \mathbf{oder} \\
= & [\![S]\!]\,[\![\mathbf{oder}]\!]\,[\![S']\!] & \text{nach (22)} \\
= & [\![S]\!] \cup [\![S']\!] & \text{wg. (21)}
\end{array}
$$

In (20 hatten wir die Disjunktion als eigene Konstruktion aufgefasst und gedeutet; die Bedeutung dieser Konstruktion war eine semantische Operation, nämlich die Vereinigung (von Propositionen), die jeweils zwei Propositionen p und q zu einer dritten, der Vereinigung $p \cup q$, 'verschmilzt'. In (23) gehen wir dagegen davon aus, dass es sich bei der Disjunktion um einen Spezialfall der Satzkoordination handelt; die Bedeutung einer Disjunktion wie (18) ergibt sich danach aus einem Zusammenspiel der Wortbedeutung von **oder** und der in (22) angegebenen Interpretation der Satzkoordination. Bei letzterer handelt es sich um eine semantische Operation, die jeweils drei Bedeutungen – zwei Propositionen p und q und eine mengentheoretische Operation O – zu einer einzigen Proposition $p\ O\ q$ 'verschmilzt'. Diese

[35] Anmerkung für HobbymathematikerInnen: In (21) müssen die Symbole '$\cap$' und '$\cup$' als Operationen über Propositionen verstanden werden, nicht über Mengen im allgemeinen; denn in letzterem Sinn handelt es sich bei Schnitt und Vereinigung nicht um mengentheoretische Objekte.

abstrakte Operation wird in der Semantik als *Funktionalapplikation* bezeichnet, weil durch sie mathematisch gesprochen eine *Funktion* (in diesem Fall die durch die Konjunktion ausgedrückte mengentheoretische Operation) auf ihre Argumente (die durch die koordinierten Sätze ausgedrückten Propositionen) angewandt (= *appliziert*) wird. Der Funktionalapplikation werden wir im Laufe des Kurses noch öfters begegnen.

Wir beenden den Abschnitt mit einem Exkurs zur Pragmatik der Disjunktion. Nach Fig. 4 – die sich natürlich im Einklang mit der in (21) geleisteten Deutung von **oder** befindet – trifft (18) auch auf die Situationen zu, von denen (17) wahr ist, in denen also sowohl Alain in die Tasten greift als auch Tom das Radio dudeln lässt. Auf den ersten Blick mag das fraglich erscheinen: besagt (18) denn nicht, dass *entweder* (17a) *oder* (17c), aber *nicht beides* zutrifft? Nicht unbedingt. Wenn ich etwa einem Gast gegenüber (18) als Entschuldigung und Erklärung für den hohen Lärmpegel verwende, kann mein Gesprächspartner mich nicht der Lüge oder des Irrtums bezichtigen, wenn sich herausstellen sollte, dass die akustische Belästigung den gemeinsamen Aktivitäten beider meiner Söhne zu verdanken ist: (18) trifft in diesem Falle erst recht zu. Die von mir ausgedrückte Proposition umfasst also *alle* Situationen in $[\![(17a)]\!]$ und $[\![(17c)]\!]$, einschließlich derjenigen im Schnitt. Der gegenteilige Eindruck entsteht allenfalls, weil die letzteren Situationen für Sprecher und Hörer weniger nahe liegen als die anderen Möglichkeiten in $[\![(18)]\!]$. Aber woran Sprecher und Hörer denken, wenn sie miteinander kommunizieren, ist für die sprachliche Bedeutung im allgemeinen unerheblich; das hatten wir bereits in Abschnitt 1.1 erwähnt.

Oft schließt eine Disjunktion die entsprechende Konjunktion allerdings tatsächlich aus. Wer einen Satz wie (25) äußert, meint damit nicht, dass (26) der Fall sein könnte:[36]

(25) **Fritz ist in der Uni oder [er ist] noch auf dem Weg [zur Uni].**
(26) **Fritz ist in der Uni und [er ist] noch unterwegs [zur Uni].**

Doch deshalb handelt es sich bei (25) nicht um einen anderen, ‘ausschließenden’ Typ von Disjunktion. Denn die durch **oder** verbundenen Teilsätze drücken von vornherein disjunkte Propositionen aus: es gibt im gesamten Logischen Raum keine Situation, in der Fritz sowohl in der Uni ist als auch auf dem Weg zur Uni – denn letzteres setzt voraus, dass er (noch) nicht an seinem Ziel angelangt ist. Gerade deswegen kann man aber (25) im Stil von (23) als Vereingung deuten; der Schnitt der beiden durch die Teilsätze ausgedrückten Propositionen wird zwar von $[\![(25)]\!]$ abgedeckt, aber dieser Schnitt ist ohnehin leer. Die Tatsache, dass mit einer Äußerung von (25) die Wahrheit von (26) ausgeschlossen wird, hat demnach mit der Bedeutung von **oder** herzlich wenig zu tun.

Nicht immer, wenn mit einer Disjunktion die Wahrheit der entsprechenden Konjunktion ausgeschlossen wird, liegt dies an der *Unmöglichkeit* der letzteren; es genügt schon, dass die *Falschheit* der Konjunktion als *bekannt* vorausgesetzt werden kann. So schließt zwar (27) an sich nicht aus, das Eric zwei Kinder mitbingt; doch wenn Sprecher und Hörer wissen, dass Eric nur ein Kind hat, ist letzteres für beide ausgeschlossen:

(27) **Eric bringt heute seinen Sohn oder [er bringt heute] seine Tochter mit.**
(28) **Eric bringt heute seinen Sohn und [er bringt heute] seine Tochter mit.**

In diesem Falle wird also die Wahrheit der Konjunktion (28) nicht vom Logischen Raum ausgeschlossen, sondern vom *Redehintergrund*, dem für die Verständigung vorausgesetzten gemeinsamen Wissen von Sprecher und Hörer. Der genaue Zusammenhang zwischen Redehintergrund und ausgedrückter Proposition sowie die Interaktion zwischen beiden fällt in

36 Ohne die in eckige Klammern gesetzte Ausdrücke sind die Sätze idiomatischer, aber dafür ist nicht deutlich, dass es sich (der Logischen Form nach) um *Satz*koordinationen handelt; auf diese Frage kommen wir im vierten Kapitel zu sprechen.

den Bereich der Pragmatik.[37] Zumindest für solche Fälle wie (27) lässt sich dort der Eindruck einer ausschließenden Lesart von **oder** mit relativ einfachen Mitteln zerstreuen. Ob dies allerdings immer geht, ist eine offene Frage. Wenn nicht, müsste man der Oberflächenform **oder** zwei lautgleiche Konjunktionen zugrunde legen und (21) dementsprechend modifizieren. Wir verkneifen uns diese Komplikation und gehen für das folgende davon aus, dass **oder** weder homonym noch polysem ist und mit (21) die wörtliche Bedeutung der satzkoordinierenden Verwendung vollständig erfasst wird.

Übungsaufgaben

A1 Sätze, bei denen die zeitliche Bezugnahme neutralisiert sind, bezeichnet man auch als *ewige* Sätze.
a) Inwiefern ist (6) kein ewiger Satz?
b) Finden Sie einen ewigen Satz,, bei dem auch die räumliche Bezugnahme neutralisiert ist.

A2 Diskutieren Sie anhand von Beispielen, was dagegen spricht, dass es Sätze gibt, die nur auf ein oder zwei Situationen zutreffen.

A3 Die folgenden Sätze besagt offenbar das genaue Gegenteil von einander; der eine *negiert* den anderen:

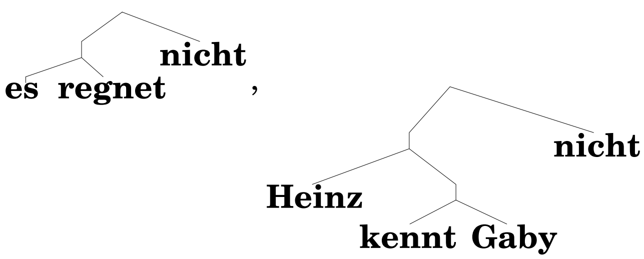
(+) **Ein Bauer kauft einen Esel.**
(–) **Kein Bauer kauft einen Esel.**

a) Inwiefern unterscheidet sich die Sinnrelation der Negation von der Inkompatibilität?
b) Stellen Sie das mengentheoretischen Verhältnis zwischen (+) und (–) mit einem Venn-Diagramm dar.

A4 Die leere Menge Ø ist ebenso eine Proposition wie der Logische Raum *LR* aller möglichen Situationen; denn beide sind Mengen, die ausschließlich aus (möglichen) Situationen bestehen.
a) Finden Sie einen Satz, der Ø (als Proposition) ausdrückt.
b) Finden Sie einen Satz, der *LR* (als Proposition) ausdrückt.

A5 Suchen Sie alle Vorkommen des Wortes *Konjunktion* in Abschnitt 1.5 heraus und entscheiden Sie jedes Mal, ob der Terminus im syntaktischen oder im logisch-semantischen Sinn gebraucht wird.

A6 Nehmen Sie – nur für den Zweck dieser Übung – an, dass die Negation **nicht** ganze Sätze modifizieren kann, wie in:



, etc.

Beschreiben Sie die Bedeutung von **nicht** unter Zuhilfenahme von Venn-Diagrammen. Versuchen Sie, dabei möglichst parallel zu der obigen Analyse der koordinierenden Konjunktionen vorzugehen.

2. Prädikation und Differenz

Die im vorangehenden Kapitel eingeführten Satzbedeutungen, die Propositionen, werden uns

[37] Dabei wird auch darauf einzugehen sein, dass (28) nur dann angemessen ist, wenn der Sprecher das Geschlecht von Erics (einzigem) Kind nicht kennt.

als Ausgangspunkt für die semantische Analyse anderer Ausdrücke dienen. Wie schon weiter oben angekündigt wurde, werden wir quasi von oben herab steigen und von den Bedeutungen ganzer Sätze auf die Bedeutungen der unmittelbaren Satzteile schließen, sodann auf die Bedeutung von deren Teilen usw. – bis wir bei den Wortbedeutungen angelangt sind. Leitmotiv wird dabei das Kompositionalitätsprinzip sein, nach dem sich die Bedeutung eines komplexen Ausdrucks aus den Bedeutungen seiner (unmittelbaren) Teile ergeben sollte. Es wird also in den folgenden Kapiteln darum gehen, wie sich diese Mengen aufgrund grammatischer und lexikalischer Regeln kompositionell ermitteln lassen.

Was immer die Bedeutungen der Teile eines gegebenen komplexen Ausdrucks sein mögen, sie müssen sich dem Kompositionalitätsprinzip zufolge, zur Bedeutung des Gesamtausdrucks 'aufaddieren'. Diese simple vortheoretische Beobachtung wird sich, wie wir bald sehen werden, als außerordentlich fruchtbar erweisen, weil sie in vielen Fällen gestattet, Bedeutungen durch *Differenzbildung* zu konstruieren. Wie das genau geht, werden wir in Abschnitt 2.2 sehen. Zuvor müssen wir jedoch einen geeigneten Ausgangspunkt finden. Dieser wird in der aus semantischer Sicht (neben den bereits besprochenen Satzkoordinationen) einfachsten Konstruktion bestehen, der *(elementaren) Prädikation*. Danach wenden wir uns etwas komplexeren Beispielen mit *mehrstelligen*(= transitiven, ditransitiven,…) *Verben* zu, die sich mit derselben Differenz-Methode analysieren lassen, aber eine kompaktere Darstellung erforderlich machen, die *Abstraktion*.

2.1 Eigennamen

Wir werden uns an dem folgenden, aus semantischer Sicht einfachen Beispiel orientieren:

(1) **Olaf hat Husten.**

Was den Satz (1) so einfach macht, ist der Umstand, dass einer seiner unmittelbaren Teile – das Subjekt – ein Eigenname ist. Wir werden solche Sätze als *Prädikationen* bezeichnen.[38] Auch komplexere Sätze wie (2) sind Prädikationen. (3) und (4) sind dagegen keine Prädikationen, obwohl sie Eigennamen enthalten, aber eben nicht als *unmittelbare* Teile.

(2) **Erna trifft auf der Straße einen Bekannten, den sie lange nicht mehr gesehen hat.**
(3) **Jeder kennt Otto.**
(3) **Heinz schläft, und Gaby arbeitet.**

Die Zerlegung von (1) in seine unmittelbaren Teile ist offenkundig:

(1')

Olaf hat Husten

Nach dem Kompositionalitätsprinzip muss irgendeine (der grammatischen Konstruktion entsprechende) Bedeutungskombination die folgenden beiden Bestandteile zu der durch (1) ausgedrückten Proposition $[\![(1)]\!]$ – also der Menge der Situationen, in denen Olaf Husten hat – verschmelzen:

- $[\![$**Olaf**$]\!]$, die Bedeutung des Subjekts **Olaf**
- $[\![$**hat Husten**$]\!]$, die Bedeutung des Prädikats **hat Husten**

Wir wissen zwar, was das Ergebnis des Zusammenwirkens dieser Bestandteile ist, nämlich $[\![(1)]\!]$, aber die Bestandteile selbst kennen wir bislang ebenso wenig wie die semantische Ope-

[38] Der Begriff stammt aus der Logik, wo er in einem etwas weiteren Sinne gebraucht und rein semantisch definiert wird. Wir kommen in Kapitel 4 auf den logischen Prädikationsbegriff zurück.

ration, die sie verschmilzt. Letzere wird sich allerdings wie im Fall der Satzkoordination mehr oder weniger von selbst ergeben, wenn wir erst einmal die beiden zu kombinierenden Bestandteile kennen. Den deplorablen Stand unseres derzeitigen Wissens um die kompositionelle Deutung von (1) können wir uns wie folgt veranschaulichen:

(1")

$$\llbracket \textbf{Olaf hat Husten} \rrbracket$$

$$\llbracket \textbf{Olaf} \rrbracket \qquad \llbracket \textbf{hat Husten} \rrbracket$$

$$= \llbracket S \rrbracket \cup \llbracket S' \rrbracket_1 \qquad = \llbracket S \rrbracket \cup \llbracket S' \rrbracket_2$$

Wir werden im Laufe dieses Kapitels beide Fragezeichen eliminieren. Anfangen werden wir dabei mit dem linken Fragezeichens $\mathbf{?}_1$; d.h. wir werden zunächst die Bedeutung des Eigennamens **Olaf** ermitteln. Eine einfache Plausibilitätsüberlegung wird uns dabei auf eine ‘minimalistische’ Antwort auf die Frage nach der Bedeutung von **Olaf** führen. Der Abbau des ersten Fragezeichens wird uns dann in die Lage versetzen, im nächsten Abschnitt die Prädikatsbedeutung systematisch herzuleiten.

Was immer die Bedeutung des Subjekts **Olaf** von (1) ist, sie muss ihren kompositionellen Beitrag zu der durch (1) ausgedrückten Proposition $\llbracket(1)\rrbracket$ leisten. Um zu sehen, worin dieser besteht, kann man (1) mit anderen Sätzen vergleichen, bei denen ein anderer Ausdruck an Subjektstelle steht – wie z.B.:

(4) **Maria hat Husten.**

(1) und (4) unterscheiden sich nur im Subjekt voneinander. Der Bedeutungsunterschied zwischen den beiden ausgedrückten Propositionen muss also von der unterschiedlichen Bedeutung der Eigennamen herrühren. Die Bedeutung $\llbracket(4)\rrbracket$ von (4) ist die Menge aller Situationen, in denen Maria Husten hat. Im allgemeinen drückt offenbar ein Satz der Gestalt *NN* **hat Husten** (wobei *NN* ein Eigenname ist) die Proposition aus, die aus allen Situationen besteht, in denen der Träger des Namens *NN* Husten hat. Der Beitrag, den der Eigenname an Subjektstelle zur Bestimmung der durch die Prädikation ausgedrückten Proposition leistet, besteht also offenkundig nur im *Namensträger*. Damit ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass Eigennamen im allgemeinen – z.B. in komplizierteren Konstruktionen – einen umfassenderen Beitrag zur Bedeutung der Gesamtkonstruktion leisten. Aber fürs erste geben wir uns mit der folgenden minimalen Hypothese über die Semantik der Eigennamen zufrieden:

(5) *Semantik der Eigennamen*
Die Bedeutung $\llbracket N \rrbracket$ eines Eigennamens *N* ist der Träger des Namens *N*, d.h.:
$\llbracket \textbf{Olaf} \rrbracket$ = Olaf, $\llbracket \textbf{Maria} \rrbracket$ = Maria, etc.

Wie die im letzten Kapitel angegebenen Gleichungen zur Deutung der Konjunktionen **und** und **oder** ist auch (5) als Teil des Regelwerks der lexikalischen Semantik des Deutschen zu verstehen. Die eigentlichen semantischen Regeln bestehen dabei in den Gleichungen, die für jeden Namen explizit dessen Bedeutung angeben. Die voran gehende Erläuterung, nach der es sich bei dieser Bedeutung um den jeweiligen Namensträger handelt, soll nur das intuitive Verständnis fördern. Es handelt sich dabei nicht um eine semantische Regel; denn wer oder was der Namensträger ist, sollte sich – wie der Sachbezug im allgemeinen – erst aus der Bedeutung des Namens ergeben, die in dieser Regel zu definieren ist. Eine definitorische Rückführung der Bedeutung auf den Namensträger wäre demnach hoffnungslos zirkulär. Dennoch ist es üblich, statt der in (5) angegebenen Gleichungen die allgemeine Festlegung zu treffen, dass Namensbedeutung und Namensträger identifiziert werden. Damit spart man sich die redundant wirkenden Gleichungen.

2.2 Prädikation

Mit (5) haben wir unsere Wissenslücken hinsichtlich der Interpretation von (1) um die Hälfte reduziert:

(6)

$$
\begin{array}{ccc}
 & \llbracket \textbf{Olaf hat Husten} \rrbracket & \\
 & = \boxed{p} & \\
\llbracket \textbf{Olaf} \rrbracket & & \llbracket \textbf{hat Husten} \rrbracket \\
= \boxed{\text{Olaf}} & & = \llbracket S \rrbracket \cup \llbracket S' \rrbracket_2
\end{array}
$$

Um nun auch noch das verbleibende Fragezeichen zu eliminieren, werden wir das Kompositionalitätsprinzip unterstellen und sozusagen rückwärts anwenden. Nach dem Kompositionalitätsprinzip ergibt sich die durch (1) ausgedrückte Proposition $\llbracket (1) \rrbracket$ durch Kombination der Bedeutung des Subjekts mit der noch zu ermittelnden Bedeutung des Prädikats. Wenn wir die – ebenfalls noch zu ermittelnde – semantische Operation, die die beiden Bedeutungen von Subjekt und Prädikat zur Proposition $\llbracket (1) \rrbracket$ verschmilzt, einmal mit '%' bezeichnen, muss also dem Kompositionalitätsprinzip und der obigen Deutung (5) der Eigennamen gemäß die folgende Gleichung gelten:

(7) $\llbracket (1) \rrbracket = \llbracket \textbf{Olaf} \rrbracket \ \% \ \llbracket \textbf{hat Husten} \rrbracket = \text{Olaf} \ \% \ \llbracket \textbf{hat Husten} \rrbracket$

Wenn (7) richtig ist (und davon gehen wir aus), müsste sich die Bedeutung des Prädikats bestimmen lassen, indem man von der Gesamtbedeutung p den Beitrag des Subjekts also die Person Olaf – *herausnimmt* oder *abzieht*:

(8) $\llbracket \textbf{hat Husten} \rrbracket = \llbracket (1) \rrbracket \ * \ \text{Olaf}$

Die Frage ist, wie man diese Operation * des Herausnehmens einer Person aus einer Proposition verstehen soll: Propositionen sind ja Mengen von Situationen, und aus denen kann man ja allenfalls Situationen herausnehmen; das Herausnehmen kann also nicht ganz wörtlich gemeint sein. Jedenfalls muss bei der genannten Differenzbildung dasselbe herauskommen wie beim Herausnehmen von Maria aus der durch (4) ausgedrückten Proposition $\llbracket (4) \rrbracket$

(9) $\llbracket (1) \rrbracket \ * \ \text{Olaf} = \llbracket \textbf{hat Husten} \rrbracket = \llbracket (4) \rrbracket \ * \ \text{Maria}$

Und diese Differenz muss sich mit beliebigen Trägern x beliebiger Namen *NN* kombinieren lassen, um die entsprechende Proposition – die Menge p_x der Situationen, in denen das Individuum x Husten hat – zu ergeben:

(10) $\text{Olaf} \ \% \llbracket \textbf{hat Husten} \rrbracket = \llbracket (1) \rrbracket$, $\text{Maria} \ \% \ \llbracket \textbf{hat Husten} \rrbracket = \llbracket (4) \rrbracket$, …,
$x \ \% \ \llbracket \textbf{hat Husten} \rrbracket = \llbracket \textit{NN} \ \textbf{hat Husten} \rrbracket$,…

Aus der Prädikatsbedeutung muss also auf irgendeine Weise hervorgehen, zu welcher Proposition sie führt, wenn sie mit welchem Namensträger kombiniert wird. Diese in der Bedeutung $\llbracket \textbf{hat Husten} \rrbracket$ enthaltene Information lässt sich in Tabellenform darstellen:

⟦**hat Husten**⟧ =

Individuum (Subjektsbedeutung)	Proposition (Satzbedeutung)
Olaf	⟦(1)⟧ [= p_{Olaf}]
Maria	⟦(4)⟧ [= p_{Maria}]
…	…
x	p_x
…	…

Offenbar reicht die in (11) enthaltene Information aus, um die Bedeutung jeder Prädikation mit dem Prädikat **hat Husten** kompositionell zu ermitteln; es handelt sich ja um die rechts von der Subjektsbedeutung eingetragene Proposition. Da die in (11) gegebene Information sowohl hinreichend als auch notwendig ist, um die Bedeutung des Satzes aus der des Subjekts zu erschließen, wenn **hat Husten** das Prädikat ist, kann es nicht falsch sein, wenn man die in (11) gegebene Information als die Bedeutung des Prädikats betrachtet. Diese Information besteht in einer Zuordnung von Individuen und Propositionen. Mathematisch gesprochen erweist sich damit ⟦**hat Husten**⟧ als eine *Funktion*, die Individuen Propositionen *zuweist*.[39]

Die in der linken Spalte der Tabelle aufgelisteten Individuen, denen die Funktion etwas zuweist, bezeichnet man als die *Argumente* der Funktion; wir gehen einmal davon aus, dass jedes Individuum, von dem man überhaupt sinnvoll sagen kann, dass es hustet, als Argument der Funktion ⟦**hat Husten**⟧ in Frage kommt. Die einem Argument von der Funktion zugewiesene Proposition bezeichnet man als den *Wert* (oder *Funktionswert*) für dieses Argument. Dabei darf es pro Argument immer nur einen zugeordneten Wert geben; das ist das Hauptcharakteristikum einer Funktion.[40] Wenn f eine Funktion ist und x ein Argument, schreibt man für den Funktionswert auch '$f(x)$'. Diese aus der Mathematik stammenden Bezeichnungen sind ganz allgmein, und wir werden sie ab jetzt immer verwenden, wenn von Funktionen die Rede ist.

Man beachte, dass die Tabelle (11) nur eine (unvollständige) *Darstellung* der Prädikatsbedeutung ist und nicht diese Bedeutung selbst. Das ist insofern wichtig, als einige Aspekte der Tabelle keine Eigenschaften der dargestellten Funktion wiedergeben. So spielt z.B. die Reihenfolge der Zeilen für die Funktion keine Rolle; bei ihr kommt es nur auf die Argument-Wert-Zuordnungen an. Außerdem werden Funktionen und Werte – Namensträger und Propositionen – in der Tabelle mit sprachlichen Mitteln repräsentiert; die dargestellte Funktion ordnet dagegen den Namensträgern Propositionen zu.

Da ⟦**hat Husten**⟧ die in (11) dargestellte Funktion ist, ergibt sich die semantische Operation %, die die Prädikatsbedeutung mit der Subjektsbedeutung verschmilzt, praktisch von selbst: die vom Prädikat beigesteuerte Funktion wird auf das vom Subjekt beigesteuerte Argument angewandt, und der daraus resultierende Funktionswert ist die Satzbedeutung. Es handelt sich also um die bereits für die Satzkoordination einschlägige *Funktionalapplikation*:[41]

39 Funktionen lassen sich als spezielle Mengen verstehen, deren Elemente sog. *geordnete Paare* sind.

40 Eine Menge von geordneten Paaren, bei der diese *Einzigkeitsbedingung* nicht erfüllt ist, bezeichnet man in der Mengelehre als *Relation*.

41 Im Unterschied zur Prädikatsbedeutung sind die dort betrachteten mengentheoretischen Funktionen (Schnitt und Vereinigung) allerdings *zweistellig*, d.h. ihre Argumente sind jeweils geordnete Paare (in dem Fall von Propositionen). Daher der Notationsunterschied: der Wert der Schnittbildung für das aus den Propositionen p und q bestehende Paar wird traditionell '$p \cap q$' geschrieben – statt '$\cap(p,q)$'

(12) *Semantik der Prädikation*
Wenn S ein Satz ist, an dessen Subjektstelle ein Eigenname NN steht und dessen Prädikat P ist, dann gilt:

$$[\![S]\!] = [\![P]\!]([\![NN]\!]) .$$

2.3 Differenz als Abstraktion

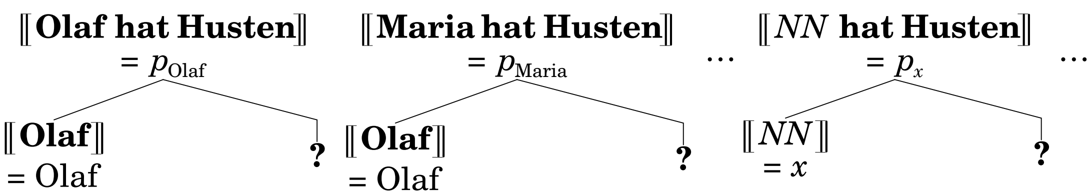
Da wir jetzt wissen, welche semantische Operation in (1) am Werk ist, können wir die obige Gleichung (7) wie folgt reformulieren:

(7') $[\![(1)]\!] = [\![\textbf{hat Husten}]\!]([\![\textbf{Olaf}]\!]) = [\![\textbf{hat Husten}]\!]\text{(Olaf)}$

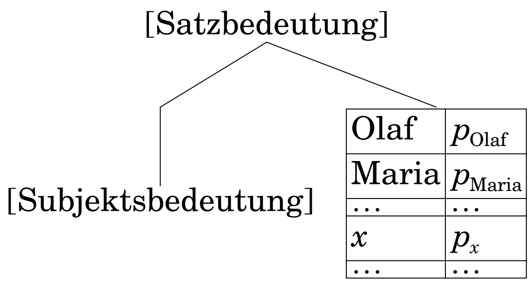
Doch wie steht es mit der *Umkehrung* der Funktionalapplikation, der in (8) angenommenen Operation *, die die Subjektbedeutung aus der Proposition herausnimmt und die Prädikatsbedeutung hinterlässt? Hierbei handelt es sich um eine ungleich kompliziertere Operation. Denn um die Funktion $[\![\textbf{hat Husten}]\!]$ aus der Proposition $[\![(1)]\!]$ zu konstruieren, genügte es nicht, nur den Beitrag des Namensträgers Olaf zu betrachten; stattdessen hatten wir in (11) *Alternativen* zu Olaf, also andere Namensträger, betrachtet und ihren Beitrag zu einer entsprechenden Satzbedeutung ermittelt. Dieses Vorgehen lässt sich schematisch folgendermaßen zusammenfassen:

(13) *Ermittlung der Prädikatsbedeutung*

- Ausgangssituation
  bekannt: Satz- und Subjektsbedeutungen ; *gesucht*: Prädikatsbedeutung:



- Konstruktion
  Man ersetze das **?** durch die Funktion, die der jeweiligen Subjektsbedeutung die jeweilige Satzbedeutung zuordnet:



Auf diese Weise ergibt sich nicht nur eine einheitliche Prädikatsbedeutung für alle Prädikationen mit dem Prädikat **hat Husten**. Die Satzbedeutung lässt sich auch – per Funktionalapplikation – aus der jeweiligen Subjektsbedeutung und dieser gemeinsamen Prädikatsbedeutung kompositionell ermitteln.

Das zur Bestimmung der Prädikatsbedeutung angewandte Verfahren (13) ist sehr allgemein und lässt sich nicht nur auf Prädikationen mit beliebigen Prädikaten anwenden, sondern auch auf eine Vielzahl anderer Konstruktionen. Wir werden es immer dann heranziehen, wenn in

in Analogie zu anderen (einstelligen) Funktionen.

einer grammatischen Konstruktion zu tun haben, die zwei Ausdrücke miteinander verbindet, wobei sowohl die Bedeutungen der Gesamtausdrücke als auch die von jeweils einem der Teil – also der jeweiligen linken oder die der jeweiligen rechten Teilausdrücke – bekannt sind. Die in (13) dargestellte Vorgehensweise gestattet es dann in der Regel, die Bedeutung des anderen, noch unanalysierten Teils zu konstruieren:

(14) *Ermittlung unbekannter Bedeutungen von Teilausdrücken*
Ausgangsituation
bekannt (✓): Bedeutung der Gesamtausdrücke und der rechten Teilausdrücke; *gesucht* (**?**): Bedeutung des linken Teils:

$[\![\textit{Gesamtausdruck}_1]\!]$ ✓ $\qquad$ $[\![\textit{Gesamtausdruck}_2]\!]$ ✓ $\qquad$ …

$[\![\textit{linker Teil}_1]\!]$ ✓ $[\![\textit{rechter Teil}]\!]$ **?** $\quad$ $[\![\textit{linker Teil}_2]\!]$ ✓ $[\![\textit{rechter Teil}]\!]$ **?**

- Konstruktion
  Man ersetze das **?** durch die Funktion, die den bekannten Bedeutungen der linken Teile die jeweilige Bedeutung des Gesamtausdrucks zuordnet:

$[\![\textit{Gesamtausdruck}_n]\!]$ ✓

$[\![\textit{linker Teil}_n]\!]$ ✓

$[\![\textit{linker Teil}_1]\!]$	$[\![\textit{Gesamtausdruck}_1]\!]$
$[\![\textit{linker Teil}_2]\!]$	$[\![\textit{Gesamtausdruck}_2]\!]$
…	…
$[\![\textit{linker Teil}_n]\!]$	$[\![\textit{Gesamtausdruck}_n]\!]$
…	…

✓

Natürlich lässt sich das Verfahren auch anwenden, wenn es der linke Teil ist, dessen Bedeutung nicht bekannt ist; wir werden im nächsten Abschnitt einen solchen Fall kennen lernen. Und es lässt sich auch dann anwenden, wenn die grammatische Konstruktion mehr als einen Teilausdruck betrifft, solange es nur einen Teil gibt, dessen Bedeutung noch nicht bekannt ist.[42] Eine Variante der Ausgangssituation in (14) lag auch im vorangehenden Kapitel vor, als wir die Satzkoordination als ternäre Konstruktion analysiert hatten und von zwei der drei Teilausdrücke bereits wussten, dass ihre Bedeutungen wie die des Gesamtausdrucks Propositionen waren. Im Nachhinein erweist sich die dort gegebene Analyse der Konjunktionen **und** und **oder** als Variante des in (13) gegebenen Verfahrens der Ermittlung einer unbekannten Bedeutung. (Mehr dazu in einer Übungsaufgabe.)

Die in (13) und (14) gegebene Konstruktion von Bedeutungen durch Differenzbildungen wird in der formalen Logik als *Funktionalabstraktion* bezeichnet, weil nach die unbekannte Bedeutung konstruiert wird, indem man vom konkreten Beitrag der einzelnen bereits analysierten Teilausdrücke – in (13) waren dies die Eigennamen – *abstrahiert* und auf ein gemeinsames Muster, die konstruierte *Funktion* zurückführt. In gewisser Weise die Umkehrung der Funktionalapplikation: wenn man die Applikation als eine Art Addition von Bedeutungen versteht, entspricht die Abstraktion einer Differenzbildung. Diese Art der Differenzbildung durch Funktionalabstraktion ist eines der wichtigsten Analyse-Instrumente der logischen Semantik. Vor allem wegen ihrer vielseitigen Einsetzbarkeit empfiehlt sich sie die hier verfolgte Analyserichtung von oben nach unten, also vom Satz über seine unmittelbaren Teile und deren

[42] Das heißt, es ist nicht bekannt, was für eine Art von Objekt diese Bedeutung sein soll, damit sie ihren kompositionellen Beitrag zur Bedeutung des Gesamtausdrucks leistet. Als MuttersprachlerInnen sind uns die Bedeutungen natürlich insofern bekannt und vertraut, als wir implizit über sie verfügen.

Teile bis hinunter zu den Wörtern.[43]

2.4 Eigennamen an Objektstelle

Ein Vorzug der Funktionalabstraktion besteht darin, dass sie sich auch dann einsetzen lässt, wenn die im Sinne der Ausgangssituation in (14) bekannten Teilbedeutungen bereits selbst durch Differenzbildung gewonnen wurden. Wenn man schon einmal weiß, dass es sich bei den Prädikatsbedeutungen um Funktionen handelt, die Individuen Propositionen zuordnen, kann man dieses Wissen nutzbar machen, um die Bedeutungen der Teile komplexer Prädikate herzuleiten – so z.B. für den folgenden Fall:

(15) **Fritz küsst Eike.**

Wir nehmen an, dass **Fritz** das Subjekt und somit (15) eine Prädikation ist. Die Zerlegung von (15) in seine Teile und Teilesteile ist wieder klar:

(15')

Fritz
küsst **Eike**

Die Bedeutungen der Gesamtaussage und der unmittelbaren Teile kennen wir schon. Wir halten diese Erkenntnis für das folgende fest und führen dabei ein paar Abkürzungen ein:

(16a) $[\![(16)]\!] = q_{\text{Fritz}}$ = die Menge der Situationen, in denen Fritz Eike küsst

(b) $[\![$**Fritz**$]\!]$ = Fritz

(c) $[\![$**küsst Eike**$]\!]$ =

Fritz	die Situationen, in denen Eike von Fritz geküsst wird
Maria	die Situationen, in denen Eike von Maria geküsst wird
Eike	die Situationen, in denen Eike sich selbst küsst
…	…
x	die Situationen, in denen Eike von x geküsst wird
…	…

Die Prädikatsbedeutung haben wir wieder in Tabellenform angegeben; q_x ist jeweils die Menge der Situationen, in denen Eike von x geküsst wird. Da es sich bei dem Prädikat um einen komplexen Ausdruck handelt, kann die Gleichung (16c) nicht im Lexikon stehen; denn dort werden nur die Bedeutungen einzelner Wörter und Morpheme festgehalten. Also müssen wir (16c) per Kompositionalität aus den Bedeutungen der unmittelbaren Teile des Prädikats herleiten. Eine dieser Bedeutungen kennen wir bereits: die des Eigennamens, wobei wir davon ausgehen, dass er dasselbe an Subjekt- wie an Objektstelle bedeutet:

(17) $[\![$**Eike**$]\!]$ = Eike

Die Bedeutung des transitiven Verbs **küsst** dagegen kennen wir noch nicht. Da wir aber sowohl die Bedeutung (16c) des Gesamtprädikats als auch die Bedeutung (17) des Objekts kennen, können wir jetzt die Differenzmethode zum Einsatz bringen:

(18) $[\![$**küsst Eike**$]\!]$ ✓

$[\![$**küsst**$]\!]$ **?** $[\![$**Eike**$]\!]$ ✓

Zunächst müssen dazu wir wieder Ausdrucksalternativen betrachten, in denen der bereits analysierte Teil, also das Objekt **Eike**, durch andere bereits analysierte Ausdrücke derselben Art, also andere Eigennamen, ersetzt wird. Wir erhalten dann wie in (16c) jeweils Funktionen,

---

43 Diese Forshungsstrategie – durch Abstraktion vom Satz zum Wort – geht auf Freges *Grundlagen der Arithmetik* (1884) zurück, wo sie anhand der Analyse von Zahlwörtern entwickelt wurde.

die sich in Tabellenform darstellen lassen:

(19)

⟦**küsst Eike**⟧ =

Fritz	die Situationen, in denen Eike von Fritz geküsst wird
Maria	die Situationen, in denen Eike von Maria geküsst wird
Eike	die Situationen, in denen Eike sich selbst küsst
…	…
x	die Situationen, in denen Eike von x geküsst wird
…	…

⟦**küsst Fritz**⟧ =

Fritz	die Situationen, in denen Fritz sich selbst küsst
Maria	die Situationen, in denen Fritz von Maria geküsst wird
Eike	die Situationen, in denen Fritz von Eike geküsst wird
…	…
x	die Situationen, in denen Fritz von x geküsst wird
…	…

⟦**küsst Maria**⟧ =

Fritz	die Situationen, in denen Maria von Fritz geküsst wird
Maria	die Situationen, in denen Maria sich selbst küsst
Eike	die Situationen, in denen Maria von Eike geküsst wird
…	…
x	die Situationen, in denen Maria von x geküsst wird
…	…

…

⟦**küsst** *NN*⟧ =

Fritz	die Situationen, in denen x von Fritz geküsst wird
Maria	die Situationen, in denen x von Maria geküsst wird
Eike	die Situationen, in denen x von Eike geküsst wird
…	…
x	die Situationen, in denen x sich selbst küsst
…	…

…

Nach der Differenzmethode (14) lässt sich jetzt eine Funktion konstruieren, die den Objektsbedeutungen – also den Namensträgern – die jeweiligen Prädikatsbedeutungen in (19) zuweist; und diese Funktion ist dann die Bedeutung des transitiven Verbs **küsst**:

(20) ⟦**küsst**⟧ =

Eike	Fritz	die Situationen, in denen Eike von Fritz geküsst wird
	Maria	die Situationen, in denen Eike von Maria geküsst wird
	Eike	die Situationen, in denen Eike sich selbst küsst
	…	…
	x	die Situationen, in denen Eike von x geküsst wird
	…	…
Fritz	Fritz	die Situationen, in denen Fritz sich selbst küsst
	Maria	die Situationen, in denen Fritz von Maria geküsst wird
	Eike	die Situationen, in denen Fritz von Eike geküsst wird
	…	…
	x	die Situationen, in denen Fritz von x geküsst wird
	…	…
Maria	Fritz	die Situationen, in denen Maria von Fritz geküsst wird
	Maria	die Situationen, in denen Maria sich selbst küsst
	Eike	die Situationen, in denen Maria von Eike geküsst wird
	…	…
	x	die Situationen, in denen Maria von x geküsst wird
	…	…
…	…	
x	Fritz	die Situationen, in denen x von Fritz geküsst wird
	Maria	die Situationen, in denen x von Maria geküsst wird
	Eike	die Situationen, in denen x von Eike geküsst wird
	…	…
	x	die Situationen, in denen x sich selbst küsst
	…	…
…	…	

Die Tabelle mag unübersichtlich wirken, ist aber nach einem einfachen Prinzip aufgebaut. In der linken Spalte findet man die möglichen Objekts-Bedeutungen, denen jeweils rechts die entsprechende Prädikatsbedeutung zugeordnet ist; diese Prädikatsbedeutung wiederum ordnet jedem Namensträger als möglicher Subjektsbedeutung die durch die entsprechende Prädikation ausgedrückte Proposition zu. Die Bedeutungskombination, die die in (20) dargestellte Funktion mit der Bedeutung des Objekts y verschmilzt, ist wieder die Funktionalapplikation:

(21) *Semantik der Anbindung von Eigennamen als Objekte*
Wenn P ein Prädikat bestehend aus einem Verb V und einem Eigennamen NN als Objekt ist, dann gilt:

$$[\![P]\!] = [\![V]\!]([\![NN]\!])\ .$$

Mit der in (20) gegebenen lexikalischen Bedeutung von **küsst** und der Kombinationsregel (21) lässt sich jetzt auf der Grundlage der in Abschnitt 2.2 entwickelten Deutung der Prädikation die Bedeutung eines Satzes wie **Maria küsst Fritz** kompositionell herleiten:

(22) ⟦**Maria küsst Fritz**⟧

nach (12)

= ⟦ **küsst Fritz**⟧ (⟦**Maria**⟧)

nach (5)

= ⟦ **küsst Fritz**⟧ (Maria)

nach (21)

= ⟦ **küsst**⟧ ⟦**Fritz**⟧ (Maria)

nach (5)

= ⟦ **küsst**⟧ (Fritz) (Maria)

nach (20)

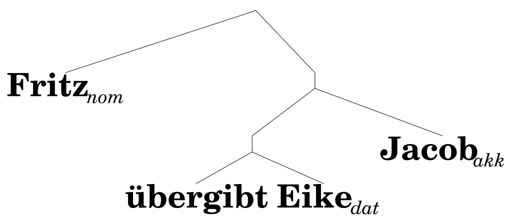
= die Situationen, in denen Fritz von Maria geküsst wird

Die letzte dieser Gleichungen gilt, weil die in (20) dargestellte Funktion dem Namensträger Fritz (in der zweiten Zeile) eine Funktion zuordnet, die angewandt auf die Namensträgerin Maria die genannte Proposition ergibt. Man beachte, dass die Herleitung in (22) nur von den lexikalischen Bedeutungszuweisungen (5) [für die Eigennamen **Fritz** und **Maria**] und (20) [für das Verb **küsst**] sowie von den Kompositionsregeln (5) [für Prädikationen] und ((21) [für die Objektanbindung] Gebrauch macht. Insbesondere haben wir also keine Zwischenergebnisse wie (20) benutzt. Auf diese Weise wird erklärt, wie sich die durch den Satz ausgedrückte Proposition allein aufgrund allgemeiner Interpretationsprinzipien aus den Wortbedeutungen und der grammatischen Konstruktion ergibt.

Die für Prädikationen und Eigennamen an Objektsposition verfolgte Strategie der Differenzbildung lässt sich auch auf Verben mit mehr als einem Objekt anwenden. So kann man die Bedeutung des ditransitiven Verbs **übergeben** anhand von Beispielen wie (23) per Abstraktion herleiten, wenn man die Struktur (23') zugrunde legt.[44]

(23) **[Der] Fritz übergibt [der] Eike [den] Jacob.**

(23')



Da das erweiterte Verb **übergibt Eike** sich in dem Sinne wie ein transitives Verb verhält, als es gemeinsam mit einem (Akkusativ-) Objekt ein Prädikat bilden kann, können wir davon ausgehen, dass seine Bedeutung ähnlich wie die in (20) dargestellte Bedeutung von **küsst** eine Funktion ist, die beliebigen Individuen Prädikatsbedeutungen zuweist. Dementsprechend lässt sich auf diesen Ausdruck die Differenzmethode anwenden; denn sowohl neben dieser Bedeutung des Gesamtausdrucks ist auch die des Objekts **Eike** bekannt. Als Ergebnis erhält man eine Funktion, deren tabellarische Darstellung sich aus Platz- und Übersichtlichkeitsgründen eigentlich verbietet und die folgendermaßen beginnt:

44 Die Artikel – im Standarddeutschen entbehrlich bis ungrammatisch - sind der Eindeutigkeit halber hinzugefügt worden. Bei einer anderen Kasusverteilung hätte man es mit einer anderen Konstruktion zu tun und dementsprechend mit einer anderen Bedeutungsoperation. Wir vernachlässigen diese Komplikation.

(24) ⟦**übergibt**⟧ =

Eike	Jacob	Fritz	die Situationen, in denen Jacob von Fritz an Eike übergeben wird
		Maria	die Situationen, in denen Jacob von Maria an Eike übergeben wird
		…	…
		x	die Situationen, in denen Jacob von x an Eike übergeben wird
		…	…
	Fritz	Fritz	∅
		Maria	die Situationen, in denen Fritz von Maria an Eike übergeben wird
		…	…
	Maria	Fritz	die Situationen, in denen Maria von Fritz an Eike übergeben wird
		Maria	∅
		…	…
	…	…	
	x	Fritz	die Situationen, in denen x von Fritz an Eike übergeben wird
		Maria	die Situationen, in denen x von Maria an Eike übergeben wird
		Eike	∅
		…	…
		x	∅
		…	…
	…	…	
Fritz	Jacob	Fritz	∅
		Maria	die Situationen, in denen Jacob von Maria an Fritz übergeben wird
		…	…
		x	die Situationen, in denen Jacob von x an Fritz übergeben wird
		…	…
	Fritz	Fritz	∅
		…	…
	…	…	
…	…		
…	…		

In dieser Tabelle taucht an mehreren Stellen das Symbol 'Ø' für die leere Menge auf, weil wir davon ausgehen, dass der Logische Raum weder Situationen enthält, in denen jemand sich selbst irgendjemandem übergibt, noch Situationen, in denen jemand sich selbst irgendjemanden übergibt. Unter dieser – fragwürdigen und hier nur aus zu Illustration gemachten – Annahme ergibt sich z.B. das erste 'Ø' in (24), weil die Menge der Situationen, in denen der Fritz der Eike die Maria übergibt, die leere Menge ist.

2.5 Lambda-Terme

Die Idee hinter den Analysen (20) und (24) transitiver bzw. ditransitiver Verben lässt sich auf solche mit beliebig vielen (nominalen) Objekten anwenden. Dabei gilt dann allerdings: je mehr Objekte, desto verschachtelter und unübersichtlicher die tabellarische Darstellung der Funktion, die sich per Differenzbildung als Bedeutung des Verbs ergibt. Doch die monströse Aufblähung der Tabellen steht in keinem Verhältnis zur Einfachheit ihres jeweiligen Aufbauprinzips. Wir hatten bereits im Zusammenhang mit (20) darauf hingewiesen. Bei (24) verhält es sich nicht anders, wie man sich klar machen kann, wenn man eine einzelne 'Zeile' von links nach rechts bis zur Proposition im jeweils innersten Kasten durchgeht: die äußerste Spalte entspricht dem Beitrag des indirekten Objekts, die linke Spalte des jeweils zweitäußersten Kastens dem des direkten Objekts, wenn das indirekte bereits feststeht etc.; und am Schluss kommt die durch einen Satz der Form '*NN* **übergibt** *MM LL*' ausgedrückte Proposition heraus.

Die Einfachheit des Aufbauprinzips solcher Tabellen wie (20) und (24) kann man ausnutzen, um zu einer wesentlich kompaktere Darstellung der dargestellten Funktionen zu gelangen, als es die Tabellenform gestattet. Diese Darstellung lässt sich bereits für Prädikatsbedeutungen angeben und dann auf die komplexeren Fälle übertragen. Weiter oben hatten wir eine Analyse des Prädikats **hat Husten** gegeben, die wir hier in etwas ausführlicherer Form wiederholen:

(25) ⟦**hat Husten**⟧ =

Olaf	die Menge der Situationen, in denen Olaf Husten hat
Maria	die Menge der Situationen, in denen Maria Husten hat
…	…
x	die Menge der Situationen, in denen x Husten hat
…	…

Das in der markierten Zeile genannte Individuum x ist dabei der Träger eines beliebigen Namens. Wegen dieser Beliebigkeit deckt die markierte Zeile die anderen Zeilen mit ab: die erste und zweite Zeile sind Spezialfälle der markierten Zeile; denn die Variable 'x' steht für beliebige Namensträger, also auch für Olaf und Maria. Und was für die ersten beiden Zeilen der Tabelle in (25) gilt, gilt auch für alle anderen Zeilen: sie werden bereits durch die markierte Zeile erfasst. Daher reicht es, wenn man statt der Tabelle nur die markierte Zeile aufschreibt, die wiederum aus zwei Teilen besteht, der Variablen, die für die beliebigen Argumente der Funktion steht und der Beschreibung der Proposition, die von dem durch die Variablen bezeichneten Individuum abhängt. In der Semantik hat sich dafür die folgende Notation eingebürgert, bei der das Argument mit einem kleinen griechischen Lamba (wie *l*inks) markiert und vom Funktionswert durch einen Punkt abgesetzt wird:[45]

(26) λx. die Menge der Situationen, in denen x Husten hat

(26) ist ein so genannter *Lambda-Term*, wie wir ihn ab jetzt zur Beschreibung von Funktionen benutzen werden. Man sieht bereits am Vergleich zwischen (25) und (26), dass dadurch die Darstellung nicht nur platzsparender, sondern auch klarer ist; denn der Lambda-Term fasst genau das zusammen, was den einzelnen Zeilen von (25) gemeinsam ist und gibt damit das Aufbauprinzip der Tabelle wieder.

Auch komplexere Funktionen lassen sich durch Lambda-Terme beschreiben. Da jeder der Funktionswerte der in (20) definierten Bedeutung von **küsst** selbst eine Funktion ist, lässt sich die Tabelle zunächst wie folgt vereinfachen:

(27) ⟦**küsst**⟧ =

Eike	λx. die Situationen, in denen Eike von x geküsst wird
Fritz	λx. die Situationen, in denen Fritz von x geküsst wird
Maria	λx. die Situationen, in denen Maria von x geküsst wird
…	…

Das Ganze ist auch wieder eine Funktion, deren typische Zeile die folgende Gestalt hat:[46]

45 Die Darstellung von Funktionen durch Terme geht auf Freges 'Über Funktion und Begriff' (1891) zurück, wo eine andere Notation benutzt wird. Die Lambda-Notation haben der amerikanische Logiker Alonzo Church und sein Schüler Stephen Kleene in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts eingeführt.

46 Man beachte, dass wir für die Objekts-Bedeutung eine andere Variable ('y') benutzen müssen, damit wir nicht mit der für die Subjekts-Bedeutung ('x') in Konflikt geraten.

(28)

…	…
y	λx. die Situationen, in denen y von x geküsst wird
…	…

Insgesamt lässt sich somit die Bedeutung von **küsst** durch *einen einzigen* Lambda-Term darstellen:

(29) ⟦**küsst**⟧ = λy. λx. die Situationen, in denen y von x geküsst wird

An die Stelle der eingeschachtelten Tabellen in (20) treten in (29) die beiden Lambda-Präfixe. In ähnlicher Weise lassen sich auch noch tiefer verschachtelte Tabellen wie die in (24) auf eine einzige, aus einem Lambda-Term bestehende Zeile reduzieren, wie in einer Übungsaufgabe gezeigt wird.

Die Beschreibung von Funktionen durch Lambda-Terme ist gegenüber der Tabellendarstellung nicht nur platzsparend und übersichtlicher, sie vereinfacht auch die kompositionelle Ermittlung der Bedeutungen komplexer Terme durch Funktionalapplikation. Das kann man sich zunächst an einem Beispiel klar machen. In der weiter oben gegebenen Herleitung (22) der Bedeutung von **Maria küsst Fritz** hatten wir im letzten Schritt die Funktion ⟦**küsst**⟧ auf Fritz und dann das Ergebnis auf Maria angewandt:

(22) …
= ⟦ **küsst**⟧ (Fritz) (Maria)
nach (20)
= die Situationen, in denen Fritz von Maria geküsst wird

Bei diesem Übergang hatten wir uns einfach auf die Tabelle (20) verlassen, in der die Bedeutung von **küsst** angegeben ist und nach der deren Anwendung auf Fritz eine Funktion ergibt, die für Maria den genannten Wert (also die Menge der Situationen, in denen Maria Fritz küsst) liefert. Die kompakte Darstellung durch Lambda-Terme gestattet es nun, die Funktion direkt zu benennen. Die vorletzte Zeile von (22) sieht, wenn man den in (29) gegebenen Lambda-Term einsetzt (und ihn der Eindeutigkeit halber mit eckigen Klammern versieht), wie folgt aus:

(22') …
= [λy. λx. die Situationen, in denen y von x geküsst wird] (Fritz) (Maria)

Die durch den Lambda-Term bezeichnete Funktion wird zunächst auf das Argument Fritz angewandt. Das so erhaltene Zwischenergebnis ist wieder eine Funktion, die sich wieder mit einem Lambda-Term darstellen lässt:

(22") …
= [λy. λx. die Situationen, in denen y von x geküsst wird] (Fritz) (Maria)
= [λy. λx. die Situationen, in denen Fritz von x geküsst wird] (Maria)

Schließlich wird diese Funktion auf die Subjekts-Bedeutung angewandt – mit dem bekannten Ergebnis. Insgesamt stellt sich die Ableitung (22) mit Lambda-Termen also wie folgt dar:

(22*) $[\![$**Maria küsst Fritz**$]\!]$

nach (12)

= $[\![$ **küsst Fritz**$]\!]$ ($[\![$**Maria**$]\!]$)

nach (5)

= $[\![$ **küsst Fritz**$]\!]$ (Maria)

nach (21)

= $[\![$ **küsst**$]\!]$ $[\![$**Fritz**$]\!]$ (Maria)

nach (5)

= $[\![$ **küsst**$]\!]$ (Fritz) (Maria)

nach (29)

= [λy. λx. die Situationen, in denen y von x geküsst wird] (Fritz) (Maria)
= [λx. die Situationen, in denen Fritz von x geküsst wird] (Maria)
= die Situationen, in denen Maria von Fritz geküsst wird

Es fällt auf, dass bei den letzten beiden Übergängen jeweils ein Lambda-Präfix abgebaut wurde und zugleich die entsprechende Variable im Rest des Lambda-Terms durch das jeweilige Argument ersetzt wurde. Zunächst verschwindet das 'λy ' und zugleich tritt 'Fritz' an die Stelle von 'y'; dann verschwindet das 'λx ' und 'Fritz' tritt an die Stelle von 'x'.[47] Das ist kein Zufall. Im Lambda-Term vertritt ja die im Präfix aufgeführte Variable gerade ein beliebiges Argument. Wenn also die durch einen Lambda-Term bezeichnete Funktion auf ein spezifisches Argument angewandt wird, dann lässt sich das Ergebnis so beschreiben, dass die Stelle der Variablen durch eine Bezeichnung des Elements eingenommen wird; und das Lambda-Präfix verschwindet natürlich, denn das Ergebnis ist ja ein Funktions*wert* – also das, was rechts vom Punkt beschrieben wird. Diese Streichung von Lambda-Präfixen und anschließende Einsetzung von Argumenten wird als *λ-Konversion* bezeichnet.[48]

Die λ-Konversion ist für die semantische Praxis von höchster Bedeutung. Denn sie ermöglicht es, kompositionelle Herleitungen quasi mechanisch zu berechnen. Das vereinfacht vor allem die Überprüfung semantischer Analysen anhand konkreter Beispiele: durch Streichung von Lambda-Präfixen und Einsetzung von Argumenten rechnet man aus, welche Bedeutung eine bestimmte Analyse einem gegebenen komplexen Ausdruck zuweist und vergleicht dies mit dem muttersprachlichen Verständnis des Ausdrucks. Ein Großteil des semantischen Alltags besteht im Konstruieren und Auswerten von Lambda-Termen. Daher die durchaus ernst gemeinte Aussage der amerikanischen Semantikerin Barbara Partee: *Lambdas changed my life.*

---

47 Wir setzen die Namen 'Fritz' und 'Maria' in Anführungszeichen, weil es ja nicht die Personen sind, die an die Stelle der Variablen treten; es handelt sich also um eine meta-metasprachliche Betrachtung!

48 Das ist die in der Semantik verbreitetste Bezeichnung. In der Logik (und Informatik) spricht man eher von *β-Konversion* oder – wenn nur die eine Richtung der Umformung gemeint ist – von *β-Reduktion*.

Übungsaufgaben

A1 Zeigen Sie, dass es sich bei der im vorangehenden Kapitel gegebenen Analyse der Konjunktionen **und** und **oder** um eine Variante des in (13) gegebenen Differenzverfahrens zur Ermittlung unbekannter Bedeutung handelt.

A2 a) Beschreiben Sie die in Tabelle (24) gegebene Bedeutung ⟦**übergibt**⟧ durch einen Lambda-Term.
b) Analysieren Sie mit der in a) gegebenen Bedeutungsbeschreibung den Satz (23) im Stil von (22*), also mit allen Zwischenergebnissen und λ-Konversionen.

3. Quantifikation

3.1 Quantoren

Im vorangehenden Kapitel hatten wir nur Sätze betrachtet, an deren Subjektstelle Eigennamen stehen. Jetzt wenden wir uns auf dem Hintergrund der dort gewonnenen Erkenntnisse den Bedeutungen anderer Subjekte zu.

(1) **Niemand hustet.**

Es ist klar, dass **niemand** weder ein Eigenname ist noch sich auf ein einzelnes Individuum bezieht. Die oben angegebene Semantik lässt sich also nicht auf diesen Typ von Nominal übertragen. Stattdessen werden wir diese Bedeutungen per Differenzbildung konstruieren. Die Voraussetzungen dafür sind günstig. Zum einen kennen wir in (1) die Bedeutung des gesamten Satzes – das ist eine Proposition; zum anderen haben wir im letzten Kapitel die Bedeutung von Prädikaten wie **hustet** als Funktionen identifiziert, die Individuen Propositionen zuweisen. Nach der Differenzmethode müsste das eigentlich reichen, um die Bedeutung von **niemand** zu ermitteln; wir brauchen dazu nur beliebige Varianten von (1) zu betrachten, die sich durch ihre Prädikate voneinander unterscheiden, und die Bedeutungen der letzteren mit den entsprechenden Propositionen paaren:

(1') **Niemand schläft.**
(1") **Niemand wohnt am Nordpol.**

Die Bedeutung jedes dieser Sätze ist die Proposition, die er ausdrückt:

(2) $[\![(1)]\!]$ = die Situationen, in denen niemand hustet

(2') $[\![(1')]\!]$ = die Situationen, in denen niemand schläft

(2") $[\![(1")]\!]$ = die Situationen, in denen niemand am Nordpol wohnt

Die Prädikatsbedeutungen lassen sich wieder durch Lambda-Terme angeben:

(3) $[\![$**hustet**$]\!]$ = λx. die Situationen, in denen x hustet

(3') $[\![$**schläft**$]\!]$ = λx. die Situationen, in denen x schläft

(3") $[\![$**wohntam Nordpol**$]\!]$ = λx. die Situationen, in denen x am Nordpol wohnt

Ordnet man nun jeder Prädikatsbedeutung die entsprechende Proposition zu, ergibt sich die Bedeutung des Subjekts:

(4) $[\![$**niemand**$]\!]$ =

λx. die Situationen,in denen x hustet	die Situationen, in denen niemand hustet
λx. die Situationen, in denen x schläft	die Situationen, in denen niemand schläft
λx. die Situationen, in denen x am Nordpol wohnt	die Situationen, in denen niemand am Nordpol wohnt
…	…

Die Bedeutung von **niemand** ist demnach eine Funktion, deren Argumente (beliebige) Prädikatsbedeutungen und deren Werte Propositionen sind. Solche Funktionen bezeichnet man als *Quantoren*; nominale Ausdrücke, deren Bedeutungen Quantoren sind, heißen *quantifizierende Nominalphrasen*. Nicht jeder Ausdruck, der an Subjektstelle stehen kann, ohne ein Eigenname zu sein, ist eine quantfizierende Nominalphrase; denn nicht immer lässt sich die Differenzmethode in dieser Weise anwenden. Aber für **niemand** und eine ganze Reihe anderer an Subjekt- und Objektstelle stehender Nominale funktioniert diese Analyse. Wir werden weitere Beispiele im Laufe des Kapitels und in den Übungsaufgaben kennen lernen.

Das Problem mit der Tabelle (4) ist, dass ihr Aufbauprinzip nicht klar ist. Denn anders als in den bisherigen Anwendungen des Differenzprinzips ist aus den in (4) angeführten Beispielen nicht unmittelbar ersichtlich, wie eine typische Zeile dieser Tabelle aussieht. Das wird deutlich, wenn man versucht, für ein *beliebiges* Argument der in (4) dargestellten Funktion den entsprechenden Wert anzugeben:

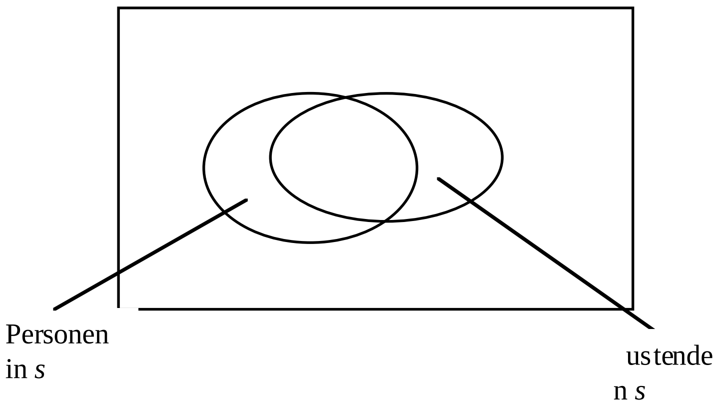
(4**???**)⟦**niemand**⟧ =

…	…
P	die Situationen, in denen **???**
…	…

Das typische Argument *P* ist eine Prädikatsbedeutung, also selbst wieder eine Funktion. Die rechts von ihr in der Tabelle stehende Proposition muss irgendwie von ihr abhängen. Aber wie? Solange wir diese Frage nicht beantworten können, können wir die Bedeutung von **niemand** auch nicht durch einen Lambda-Term angeben; denn dieser ergibt sich ja erst aus der typischen Zeile der Tabelle.

Um die drei Fragezeichen in (4**???**) durch eine Charakterisierung der entsprechenden Proposition zu ersetzen, muss man herausfinden, worin die Gemeinsamkeit der Werte der in (4) dargestellten Funktion besteht. Jeder dieser Funktionswerte ist zunächst eine Menge von Situationen. Um welche Menge es sich handelt, hängt natürlich von der jeweiligen Prädikatsbedeutung ab; aber es lässt sich durchaus ein Muster erkennen, wenn man sich überlegt, unter welchen Umständen eine gegebene Situation *s* Element der jeweiligen Proposition ist, unter welchen Bedingungen also die jeweilige Aussage von *s* wahr ist. In der ersten Zeile erfüllt *s* diese *Wahrheitsbedingung*, wenn niemand in *s* hustet, wenn es also in *s* keine Person gibt, die in *s* hustet. Diese Bedingung lässt sich durch ein Venn-Diagramm veranschaulichen, wenn man die Personen und die hustenden Individuen (bei denen es sich ja auch um Tiere handeln könnte) jeweils in Mengen zusammenfasst:[49]

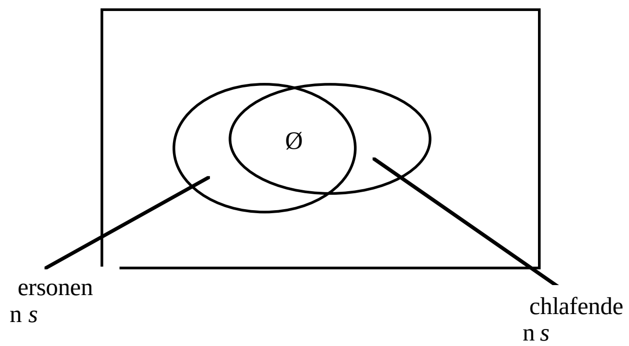
(5)



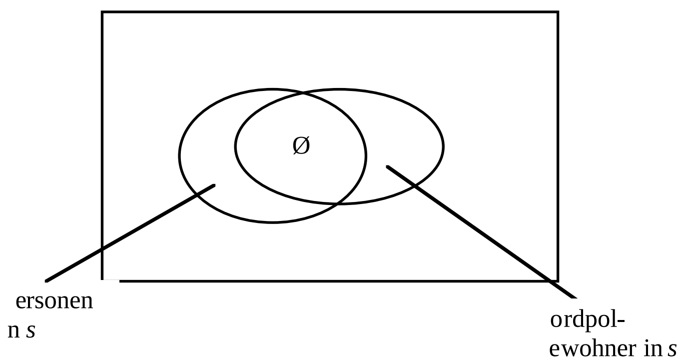
Wenn (1) von *s* wahr sein soll und somit *s* zu der Proposition gehört, die die in (4) dargestellte Funktion der Bedeutung von **hustet** zuweist, dürfen sich die beiden genannten Mengen nicht überlappen. Die Wahrheitsbedinungen für die Elemente der anderen in der rechten Spalte von (4) genannten Propositionen sind ganz analog und lassen sich ebenfalls durch Venn-Diagramme darstellen:

49 Anders als bei den bisherigen Venn-Diagrammen stellt das Rechteck in (5) natürlich nicht den Logischen Raum aller möglichen Situationen dar, sondern die Menge aller Individuen.

(5')



(5")



Die Proposition, die die Bedeutung von **niemand** einer Prädikatsbedeutung zuweist, besteht also immer aus allen Situationen, in denen die Menge der Personen sich nicht mit einer gewissen anderen Menge überlappt; was diese andere Menge ist, hängt dabei sowohl von der jeweiligen Situation als auch vom betrachteten Prädikat ab. Wenn *s* die Situation ist und **hustet** das Prädikat, handelt es sich z. B. um die Menge der in *s* Hustenden. Man bezeichnet diese Menge als *Extension* des Prädikats *in* der Situation *s*. Wenn *V* ein Prädikat ist, werden wir '$ext_s(V)$' für seine Extension (in einer Situation *s*) schreiben. Jedes *s* in der Proposition, die ⟦**niemand**⟧ der Bedeutung von *V* zuordnet, muss also die folgende Bedingung erfüllen:

(6) $Per_s \cap ext_s(V) = \emptyset$

(6) sieht vielleicht kompliziert aus, bringt aber nur den gemeinsamen Kern von (5), (5') und (5") auf den Punkt: dass sich die Menge Per_s der Personen in der Situation *s* mit der Extension des Prädikats *V* in dieser Situation nicht überlappt. Die Spalten der Tabelle (4) lassen sich mit Hilfe der Wahrheitsbedingung (6) vereinheitlichen, wodurch die Darstellung der Bedeutung von **niemand** durch einen Lambda-Term in greifbare Nähe rückt:

(7) ⟦**niemand**⟧ =

⟦**hustet**⟧	die Situationen s, in denen $Per_s \cap ext_s$(**hustet**) = ∅
⟦**schläft**⟧	die Situationen s, in denen $Per_s \cap ext_s$(**schläft**) = ∅
⟦**wohntam Nordpol**⟧	die Situationen s, in denen $Per_s \cap ext_s$(**wohntam Nordpol**) = ∅
…	…

Eine Hürde gilt es allerdings noch zu überwinden. Wenn wir nämlich das allgemeine Muster hinter den einzelnen Zeilen der Tabelle (7) angeben wollen, müssen wir für eine beliebige Prädikatsbedeutung P sagen, was die ihr zugeordnete Proposition ist. Aus (7) geht das zunächst nicht direkt hervor. Denn die rechten Spalten geben nur an, inwiefern die jeweilige Proposition vom *Prädikat* selbst (**hustet**, …) abhängt, aber nicht, wie sich die Proposition aus der *Prädikatsbedeutung* (λx. die Situationen,in denen x hustet , …) ergibt. Dieser Unterschied ist subtil, aber wichtig. Denn erst wenn die Satzbedeutung aus der (Subjekts- und) Prädikatsbedeutung konstruiert werden kann, ist dem Kompositionalitätsprinzip genüge getan. Um eine solche Konstruktion durchzuführen, bedarf es offenbar einer Herleitung der Prädikatsextension aus der Prädikatsbedeutung.[50] Am Beispiel sieht man am besten, wie das geht. Betrachten wir drei fiktive Situationen n, n' und n'', in denen die Extension von **wohnt am Nordpol** jeweils verschieden ist: während in n nur Fritz am Nordpol wohnt, lebt er in n' dort gemeinsam mit Eisbär Petz; in n'' dagegen ist der Nordpol unbewohnt:

(8a) ext_n(**wohntam Nordpol**) = {Fritz}

(b) $ext_{n'}$(**wohntam Nordpol**) = {Fritz, Petz}

(c) $ext_{s''}$(**wohntam Nordpol**) = ∅

Vergleichen wir nun diesen Extensionsverlauf mit der Bedeutung des Prädikats **wohnt am Nordpol**, die wir hier in Tabellenform wiedergeben:

(9) ⟦**wohntam Nordpol**⟧ =

Fritz	die Situationen, in denen Fritz am Nordpol wohnt
Eike	die Situationen, in denen Eike am Nordpol wohnt
Petz	die Situationen, in denen Petz am Nordpol wohnt
…	…

Die Propositionen in der rechten Spalte von (9) umfassen jeweils sehr viele Situationen des Logischen Raums, die wir hier unmöglich alle auflisten können. Wenn wir uns aber einmal auf die Situationen n, n' und n'' beschränken und den Rest des Logischen Raums quasi ausblenden, ergibt sich statt (9) das folgende Bild:

(9') ⟦**wohntam Nordpol**⟧ =

Fritz	$\{n,n'\}$
Eike	∅
Petz	$\{n'\}$
…	…

Um nun zu sehen, wie sich die Extension des Prädikats **wohnt am Nordpol** in einer Situation systematisch aus der Bedeutung ergibt, schauen wir uns die Situation n' an, in der Fritz und Petz die einzigen Nordpolbewohner sind. Die Prädikatsextension besteht aus allen Individuen, die in dieser Situation am Nordpol wohnen, denen also in (9) bzw. (9') eine auf n' zutreffende Proposition zugewiesen wird. Fritz ist in dieser Extension, weil rechts von Fritz in (9) bzw. (9') eine Menge steht, von der n' ein Element ist; bei Eike ist das nicht so, und sie ist auch nicht in der Extension des Prädikats. Die Proposition rechts von Fritz ist aber gerade der

50 Eine solche Herleitung ist ohnehin nötig, wenn man erklären will, wie sich der Sachbezug eines Prädikats aus seiner Bedeutung ergibt. Wir kommen auf diesen Aspekt im nächsten Kapitel zurück.

Funktionswert, also $[\![$**wohntam Nordpol**$]\!]$ (Fritz). Fritz ist m. a. W. in der Extension von **wohnt am Nordpol** in n', weil gilt:

- $n' \in [\![$**wohntam Nordpol**$]\!]$ (Fritz).

Durch Verallgemeinerung dieses Einzelfalls ergibt sich die Konstruktion der Prädikatsextension aus der Prädikatsbedeutung:

(10) *Konstruktion der Prädikatsextension*
Die Extension eines Prädikats V in einer Situation s ist die Menge der Individuen x, für die gilt:
- $s \in [\![V]\!](x)$.

Da wir jetzt wissen, dass sich die Prädikatsextension wie in (10) konstruieren lässt, werden wir für sie auch '$ext_x([\![P]\!])$ ' (statt '$ext_x(P)$ ') schreiben.[51] Mit dieser Notation können wir nun endlich die typische Zeile (4**???**) der Tabellendarstellung der Bedeutung von **niemand** vervollständigen:

(4…)

…	…
P	die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_s(P)$
…	…

An die Stelle von (4…) können wir nun einen Lambda-Term setzen:

(11) $[\![$**niemand**$]\!] = \lambda P$ die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_s(P)$

Da wir die Bedeutung von **niemand** per Differenzmethode ermittelt haben, ergibt sich die einschlägige Bedeutungskombination wieder von selbst:

(12) *Semantik der Quantifikation*
Wenn S ein Satz ist, an dessen Subjektstelle eine quantifizierende Nominalphrase QN steht und dessen Prädikat P ist, dann gilt:
$[\![S]\!] = [\![QN]\!]([\![P]\!])$.

Man beachte, dass sich in (12) gegenüber der Deutung der Prädikation im vorangehenden Kapitel – dort ebenfalls unter (12) zu finden – die Richtung der Funktionalapplikation verkehrt hat; denn dort war es die Prädikatsbedeutung, die auf das Subjekt angewandt wurde, während es bei der Quantifikation umgekehrt ist. Dieser Unterschied ist in dem Sinne grammatisch bedingt, als wir (wie auch viele Syntaktiker) davon ausgehen, dass es sich bei Prädikation und Quantifikation um verschiedene Konstruktionen handelt. Am Ende des Kapitels werden wir allerdings eine alternative Analyse kennenlernen, die ohne den besagten Konstruktionsunterschied auskommt.

Überprüfen wir nun das Ergebnis der Differenzmethode, indem wir die durch (1) ausgedrückte Proposition mit Hilfe der lexikalischen Bedeutungsregel (11) kompositionell ermitteln:

51 Vorher war das insofern ungerechtfertigt, als wir ja nicht wussten, ob bedeutungsgleiche Prädikate auch immer extensionsgleich sind. Wenn wir nämlich zwei bedeutungsgleiche Prädikate P und P' hätten, für die $ext_s(P) \neq ext_s(P')$, dürften wir für $ext_x(P)$ nicht '$ext_s([\![P]\!])$ ' schreiben, denn mit $[\![P]\!] = [\![P']\!]$ wäre ja $ext_s(P) = ext_s([\![P]\!]) = ext_s([\![P']\!]) = ext_s(P')$. Aufgrund der Konstruktion (10) können wir schließen, dass es solche P und P' nicht geben kann; denn wenn die Extension aus der Bedeutung konstruiert werden kann, haben bedeutungsgleiche Prädikate gleiche Extensionen.

(13) $[\![(1)]\!]$

$= [\![$**niemandhustet**$]\!]$

nach (12)

$= [\![$**niemand**$]\!]$ $([\![$**hustet**$]\!])$

nach (11)

$= [\lambda P$ die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_x(P)]$ $([\![$**hustet**$]\!])$

λ-Konversion

$=$ die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_x([\![$**hustet**$]\!])$

Notationskonvention

$=$ die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_x($**hustet**$)$

nach (10)

$=$ die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von
der Menge der Individuen x, für die gilt: $s \in [\![$**hustet**$]\!](x)$

nach (3)

$=$ die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von
der Menge der Individuen, die in s husten

Def. von Per_s

$=$ die Situationen, in denen die Menge der Personen disjunkt ist von
der Menge der Individuen, die husten

Def. Disjunktheit

$=$ die Situationen, in denen es kein Individuum gibt, das eine Person ist
und hustet

sowieso

$=$ die Situationen, in denen niemand hustet

Damit hat sich die Analyse von **niemand** als quantifizierende Nominalphrase bestätigt. Es gibt eine ganze Reihe weiterer Nominalphrasen, deren Bedeutung auf ähnliche Weise herleitbar ist:

Übungsaufgabe

A1 Geben Sie für jede der folgenden quantfizierenden Nominalphrasen eine Bedeutung durch einen Lambda-Term an; machen Sie dabei ähnlich wie in (11) vom Extensions-Begriff Gebrauch:

a) **ein Kind**
b) **jedes Mädchen**
c) **die meisten Jungen**

3.2 Determinatoren

Im Gegensatz zu denen in der Übungsaufgabe zu analysierenden Ausdrücken bildet die quantifizierende Nominalphrase **niemand** insofern eine Ausnahme, als sie aus einem einzigen Lexem besteht und sich nicht aus einem *Determinator* (oder Artikel) und einem (möglicherweise erweiterten) Substantiv zusammensetzt: **ein** + **Kind**, **jede** + **Frau**, **die meisten** + **Kinder**.[52] Wir werden nun solche 'normalen' NPs betrachten und sie per Differenzmethode in ihre Bestandteile zerlegen. Zunächst jedoch müssen wir feststellen, dass sich die Methode nicht unmittelbar anwenden lässt. Zwar kennen wir z.B. die Bedeutung des (Gesamt-) Ausdrucks **kein Mensch** – nämlich $[\![$**niemand**$]\!]$ – aber weder die des Determinators **kein** noch die des Substantivs **Mensch** sind uns bisher untergekommen:

(14) $[\![$**kein Mensch**$]\!]$
$= [\![$**niemand**$]\!]$

$[\![$**kein**$]\!]$ $= ?_1$ $[\![$**Mensch**$]\!]$ $= ?_2$

Die in (14) dargestellte Situation ist ähnlich wie die Ausgangslage im vorangehenden Kapitel, als es darum ging, in Prädikationen die ausgedrückte Proposition aus den Bedeutungen von Subjekt und Prädikat zusammenzusetzen. Und wir werden uns auch auf ähnliche Weise behelfen, indem wir durch Vergleich mit Ausdrucksalternativen den Beitrag ermitteln, den das Substantiv zur Bedeutung der gesamten Nominalphrase leistet:

(15a) **Kein Mensch schläft.**
(b) **Kein Kind schläft.**
(c) **Keine Frau schläft.**

Die Wahrheitsbedingungen von (15a–c) unterscheiden sich nur dadurch voneinander, dass in einer gegebenen Situation s die Extension von **schläft** jeweils von einer anderen Menge disjunkt sein muss – von der der Menschen, der der Kinder bzw. der der Frauen in s. Abstrahieren wir vom konkreten Prädikat, so ergeben sich – ganz analog zur Analyse (11) von **niemand** – für die Subjekte in (15a–c) die folgenden Bedeutungen:

(16a) $[\![$**kein Mensch**$]\!] = \lambda P.$ die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_x(P)$
(b) $[\![$**kein Kind**$]\!] = \lambda P.$ die Situationen s, in denen Kin_s disjunkt ist von $ext_x(P)$
(c) $[\![$**keine Frau**$]\!] = \lambda P.$ die Situationen s, in denen Fra_s disjunkt ist von $ext_x(P)$

Dabei sind natürlich Fra_s und Kin_s die Menge der Frauen bzw. der Kinder in der Situation s, und Per_s ist nach wie vor die Menge der Personen, also der Menschen – wir machen da keinen Unterschied (welchen auch?). Es fällt auf, dass sich die Substantive in (15a) in dem Sinne analog zum (fehlenden) Prädikat verhalten, als auch sie eine Menge von Individuen festlegen, die von der jeweiligen Situation abhängt, auf die die Proposition bezogen wird. Aufgrund dieser Analogie liegt es nahe, die Substantivbedeutung wie die Prädikatsbedeutung als eine Funktion aufzufassen, die jedem Individuum eine Proposition zuweist; aus dieser Funktion lässt sich dann in gewohnter Manier die jeweilige Extension konstruieren. So wie also die Bedeutung des Prädikats **schläft** jedem Individumm die Menge der möglichen Situationen zuweist, in denen dieses Individuum schläft, weist die Bedeutung von **Mensch** jedem Individuum die Situationen zu, in denen dieses Individuum ein Mensch ist:

(17a) $[\![$**Mensch**$]\!] = \lambda x.$ die Situationen, in denen x ein Mensch ist

[52] Wir unterstellen diese Klammerung, weil sich die Struktur '**die** + (**meisten** + **Kinder**)' nicht nach der in diesem Kapitel eingeschlagenen Strategie interpretieren lässt.

(b) $[\![$**Kind**$]\!]$ = λx. die Situationen, in denen x ein Kind ist

(c) $[\![$**Frau**$]\!]$ = λx. die Situationen, in denen x eine Frau ist

Man beachte, dass nach (17) ein Substantiv wie **Mensch** dieselbe Bedeutung hat wie das Prädikat **ist ein Mensch**. Diese semantische Parallelisierung von Substantiven und Prädikaten hat eine lange, mindestens auf Aristoteles zurückführende Tradition, lässt sich aber nach neueren semantischen Erkenntnissen nicht aufrecht erhalten. Wir werden sie hier dennoch anwenden, weil sie für die gegenwärtigen Zwecke – die Analyse quantifizierender Nominalphrasen – ausreicht und wir dadurch unnötige Komplikationen vermeiden. Unter dieser Voraussetzung hat sich jetzt die Lage gegenüber der in (14) geschilderten Situation entscheidend verbessert:

(18) $[\![$**kein Mensch**$]\!]$ ✓

$[\![$**kein**$]\!]$ **?** $[\![$**Mensch**$]\!]$ ✓

(18) beschreibt die typische Ausgangslage für die Anwendung der Differenzmethode, nach der die gesuchte Bedeutung von **kein** eine Funktion ist, die jeder Substantivbedeutung einen entsprechenden Quantor zuweist. Aus den Beobachtungen in (16) und (17) ergibt sich zunächst die folgende Tabelle[53]:

(19) $[\![$**kein-**$]\!]$ =

λx. die Situationen, in denen x ein Mensch ist	λP. die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_x(P)$
λx. die Situationen, in denen x ein Kind ist	λP. die Situationen s, in denen Kin_s disjunkt ist von $ext_x(P)$
λx. die Situationen, in denen x eine Frau ist	λP. die Situationen s, in denen Fra_s disjunkt ist von $ext_x(P)$
…	…

Die linke Spalte enthält die Bedeutungen unserer drei Beispiels-Substantive nach (17), in der rechten werden ihnen die entsprechenden Quantoren nach (16) zugewiesen. Da die rechts genannten Mengen Per_s , Kin_s und Fra_s gerade die (von s abhängigen) Extensionen der links von ihnen stehenden Bedeutungen sind – Per_s = ext_s($[\![$**Mensch**$]\!]$) usw. – ist das Aufbauprinzip von (19) klar; die typische Zeile sieht offenbar folgendermaßen aus:

(19…)

…	…
Q	λP. die Situationen s, in denen $ext_x(Q)$ disjunkt ist von $ext_x(P)$
…	…

Unter Rückgriff auf die bereits in Kapitel 1 eingeführte mengentheoretische Notation – Disjunktheit ist leerer Schnitt – können wir die Tabelle mit einem Lambda-Term zusammenfassen:

(20) $[\![$**kein-**$]\!]$ = λQ. λP. die Situationen s, so dass $ext_s(Q) \cap ext_s(P) = \varnothing$

Auf dieselbe Art und Weise lassen sich nun auch die Bedeutungen anderer Determinatoren herleiten. Voraussetzung ist dabei jeweils, dass die Bedeutungen der durch sie eingeleiteten quantfizierenden Nominalphrasen bereits bekannt sind. Beginnen wir mit dem unbestimmten Artikel:

(21) **Ein Kind schläft.**

Man kann (21) auf verschiedene Weisen verstehen.

53 Der Bindestrich in '**kein-**' soll nur darauf hinweisen, dass es sich nicht um die Deutung einer einzelnen Wortform, sondern des Lexems mit allen seinen Formen handelt; **kein** in **kein Mensch** hat dieselbe Bedeutung wie **keine** in **keine Frau** etc.

(i) Zum einen kann gemeint sein, dass Kinder im allgemeinen schlafen – z.B. wenn (21) als Antwort auf die Frage **Was macht ein Kind in der Nacht?** verwendet wird.

(ii) Nach einer weiteren, näherliegenden Art, (21) zu verstehen, ist der Satz falsch von einer Situation, in der zwei oder mehr Kinder schlafen. So versteht man den Satz, wenn mit ihm die Frage **Wie viele Kinder schlafen?** beantwortet wird.

(iii) Schließlich kann (21) einfach das Gegenteil von (15b) zum Ausdruck bringen, z.B. wenn man fortfährt mit: **... und vielleicht schlafen noch mehr Kinder**.

Bei (i) liegt eine so genannte *generische* Lesart vor, die wir hier außer Acht lassen, weil sie sich mit unserer Deutung quantifizierender Nominalphrasen nicht (oder nur schwer) vereinbaren lässt; aber wir kommen in Kapitel 9 noch einmal kurz auf sie zurück. Der Unterschied zwischen (ii) und (iii) ist der zwischen Zahlwort und unbestimmten Artikel, wie er im Englischen lexikalisiert ist (**one** vs. **a**). Ob es sich auch im Deutschen um verschiedene Wörter (also Lesarten derselben Oberflächenform) handelt, ist zunächst nicht klar. Es könnte ja sein, dass die verschiedenen Interpretationen von verschiedenen Verwendungssituationen herrühren. Wir werden dieser Frage hier nicht nachgehen; denn prinzipiell lassen sich beide Verwendungen analog zur Bedeutung von **kein** beschreiben. Solange auch nur eine von ihnen der wörtlichen Bedeutung von **ein** entspricht,[54] lässt sich diese nämlich per Differenzmethode erfassen. Im Falle des unbestimmten Artikels ist das besonders einfach; hier muss man bloß die Wahrheitsbedingung negieren und damit Disjunktheit durch Überlappung ersetzen:[55]

(22) $[\![\textbf{ein-}_{indef}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s(Q) \cap ext_s(P) \neq \emptyset$

Im Fall des im Sinne von (ii) interpretierten Zahlworts **ein** wird offenbar ebenfalls eine Aussage über das Verhältnis von Nomens- und Prädikatsextension gemacht: (21) ist in diesem Sinn von einer Situation s wahr, wenn der Schnitt der Menge $ext_s([\![\textbf{Kind}]\!])$ der Kinder in s mit der Extension von **schläft** in s gerade ein Element – nicht mehr und nicht weniger – enthält. Das schließt natürlich weder aus, dass es noch weitere Kinder gibt, noch dass außer diesem einen Kind noch irgendwelche anderen Individuen schlafen. Für den allgemeinen Fall ergibt sich aus dieser Überlegung die folgende Analyse des Zahlwortes (oder *Numerale*):

(23) $[\![\textbf{ein-}_{Num}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $|ext_s(Q) \cap ext_s(P)| = 1$

(Dabei bezeichnet '$|M|$' die Anzahl der Elemente oder *Kardinalität*[56] einer Menge M.) Wir werden, wie gesagt, offen lassen, ob der Unterschied zwischen (22) und (23) wirklich in der Semantik verankert ist oder ob es sich um einen reinen Gebrauchsunterschied handelt. Des weiteren werden wir im folgendnen, soweit nichts Gegenteiliges gesagt ist, uns mit '**ein-**' ohne Index stets auf den nach (22) analysierten unbestimmten Artikel beziehen.

Wie **kein-** und **ein-** bringt auch **jed-** letztlich eine einfache mengentheoretische Beziehung zwischen Substantiv- und Prädikatsextension zum Ausdruck. Denn offenbar trifft ein Satz wie (24) auf eine Situation s zu, wenn in s die Extension von **Kind** vollständig in der von **schläft**

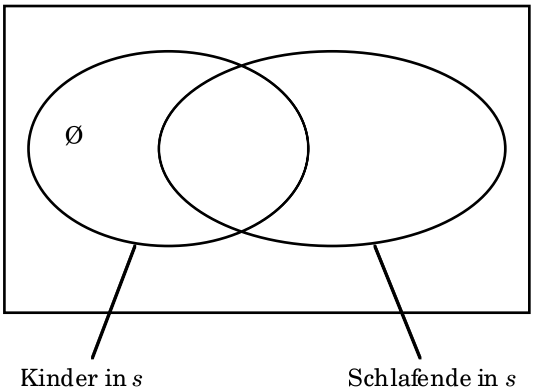
54 Wir werden in Kapitel 8 sehen, dass sich die Sache komplizierter verhält.

55 An (22) kann man übrigens sehen, dass es keine absolute Unterscheidung zwischen *positiven* und *negativen* Aussagen, Eigenschaften, Bedingungen usw. gibt: positiv ausgedrückt *überlappen* sich zwei Mengen, wenn – negativ ausgedrückt – ihr Schnitt *nicht mit Ø zusammenfällt*. Der Unterschied zwischen positiv und negativ ist im allgemeinen nur einer in der Formulierung, nicht im beschriebenen Sachverhalt.

56 Der mengentheoretische Begriff der *Kardinalität* – den zu definieren hier zu weit führen würde – ist insofern allgemeiner als der der *Anzahl der Elemente*, als er auch sinnvoll auf unendliche Mengen angewandt werden kann, ja sogar für diese entwickelt wurde. Für endliche Mengen, also insbesondere solche mit nur einem Element, fallen die beiden Begriffe zusammen.

enthalten ist:

(24)



$[\![\textbf{Jedes Kind schläft}]\!]$ = die Situationen s, in denen $ext_s([\![\textbf{Kind}]\!]) \subseteq ext_s([\![\textbf{schläft}]\!])$

Entsprechend ergibt sich analog zu den semantischen Analysen der anderen Determinatoren:

(25) $[\![\textbf{jed-}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s(Q) \subseteq ext_s(P)$

Auch in (26) wird die Substantivextension zur Prädikatsextension in Beziehung gesetzt:

(26) **Die meisten Kinder schlafen.**

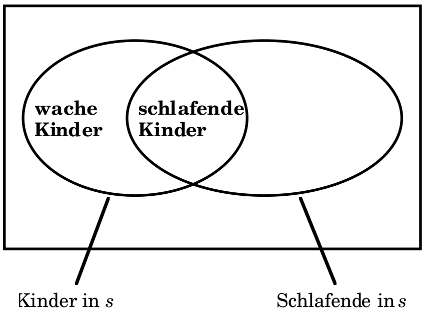
Unter der Annahme, dass die Pluralform **Kinder** bedeutungsgleich ist mit der Singularform **Kind**[57], lassen sich die in (26) beschriebenen Situationen als diejenigen beschreiben, in denen es mehr schlafende Kinder gibt als wache. Die schlafenden Kinder bilden die Schnittmenge aus der Extension von **Kind** und der von **schläft**; die wachen Kinder bilden die *Differenz* aus diesen Mengen, also die Extension von **Kind** ohne ('\') den Schnitt mit der von **schläft**:[58]

---

57 Diese Annahme mag befremden: Leistet der Plural nicht seinen Beitrag zur Bedeutung, indem er die Bezugnahme auf mehrere Objekte gestattet? Ganz so einfach verhält sich die Sache nicht. Denn auch das singularische Substantiv **Kind** bezieht sich ja in dem Sinne auf mehrere Individuen, als seine (jeweilige) Extension alle Kinder umfasst; ohne diese Bezugnahme wären Quantifikationen wie **jedes Kind** und **kein Kind** nicht möglich. Andererseits gibt es tatsächlich Verwendungen pluralischer Nominalphrasen, die eine Bezugnahme auf *Gruppen* von Individuen erfordern; ein Beispiel ist die in Kapitel 0 betrachete so genannte *kollektive Prädikation* **Fritz und Eike sind** [**miteinander**] **verheiratet**. In diesen Fällen hat der Plural eine eigenständige Bedeutung; aber so ein Fall liegt nach landläufiger semantischer Auffassung in (26) nicht vor; denn der Satz lässt sich – bei entsprechender Klammerung – als normale Quantifikation auffassen. Auf die Semantik des Plurals und Kollektivität kommen wir in diesem Kurs leider nicht mehr zu sprechen. Interessierten sei deshalb Godehard Links Handbuch-Artikel 'Plural' (in A. .v Stechow, D. Wunderlich (Hrsg.), *Semantik / Semantics*. Berlin 1991, S. 418–440) empfohlen.

58 Im allgemeinen ist die Differenz $A \setminus B$ die Menge der Elemente der Menge A, die nicht zugleich Elemente der Menge B sind. Dieser Differenzbegriff hat natürlich nichts mit der semantischen Differenz i.S.v. Funktionalabstraktion zu tun.

(27)



$[\![$**Die meisten Kinder schlafen**$]\!]$ =
die Situationen s, in denen $ext_s([\![\textbf{Kind}]\!]) \cap ext_s([\![\textbf{schläft}]\!])$ grö˚er ist als $ext_s([\![\textbf{Kind}]\!]) \setminus ext_s([\![\textbf{schläft}]\!])$

Der Größenvergleich bezieht sich dabei auf die Anzahl der Elemente. Wie zuvor können wir jetzt wieder aus dem konkreten Fall auf die Bedeutung des Determinators schließen:

(28) $[\![$**die meisten**$]\!]$ =
$\lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $|ext_s(Q) \cap ext_s(P)| > |ext_s(Q) \setminus ext_s(P)|$

Wir beenden unseren semantischen Rundgang durch die Determinatoren mit dem bestimmten Artikel **d-** (= **der/die/das**). Ob er sich adäquat im Stil der anderen Determinatoren deuten lässt, ist in der Semantik heftig umstritten. Klar ist aber, dass sich zumindest bestimmte Verwendungsweisen erfassen lassen. Betrachten wir dazu ein Beispiel:

(29) **Die türkische Kursteilnehmerin sitzt in der zweiten Reihe.**

Auf was für Situationen s trifft (29) zu? Zunächst einmal muss es (b) in s überhaupt eine türkische Kursteilnehmerin geben, die in der zweiten Reihe sitzt. Aber das reicht insofern nicht, als (29) nur schlecht auf Kurse bezogen werden kann, an denen mehrere Türkinnen teilnehmen. Eine weitere Bedingung an s ist also, dass es dort (a) *genau eine* türkische Kursteilnehmerin gibt.

(30) $[\![(29)]\!]$ =
die Situationen s, so dass gilt:
(a) $|ext_s([\![\textbf{türkische Kursteilnehmerin}]\!])| = 1$;
(b) $ext_s([\![\textbf{türkische Kursteilnehmerin}]\!]) \cap ext_s([\![\textbf{sitzt in der 2. Reihe}]\!] \neq \emptyset$

Die Bedingungen (a) und (b) lassen sich auch anders ausdrücken. Zum Bespiel lässt sich auch (b) als eine Bedingung an die Anzahl der Elemente des Schnitts von Substantiv- und Prädikatsextension formulieren. Oder man ersetzt (b) durch eine Teilmengenbeziehung; denn unter der Voraussetzung (a) läuft (b) auf (b') hinaus, wie in einer Übungsaufgabe nachzuweisen sein wird:

(b') $ext_s([\![\textbf{türkische Kursteilnehmerin}]\!]) \subseteq ext_s([\![\textbf{sitzt in der 2. Reihe}]\!])$

Auch die Bedingung (a) lässt sich umformulieren; zum Beispiel kann man sie in zwei Teilbedingungen aufspalten:

($a1$) $ext_s([\![\textbf{türkische Kursteilnehmerin}]\!]) \neq \emptyset$;
($a2$) $|ext_s([\![\textbf{türkische Kursteilnehmerin}]\!])| \leq 1$;

($a1$) besagt, dass es überhaupt eine türkische Kursteilnehmerin gibt, und garantiert damit, dass die Extension des Substantivs *mindestens* ein Element enthält; ($a2$) wiederum besagt, dass diese *höchstens* ein Element enthält. Gemeinsam drücken also diese Bedingungen dasselbe aus wie (a).

Die Formulierung ($a1$), ($a2$) und (b') ist als *Russellsche Kennzeichnungstheorie*[59] bekannt. Allgemeiner gesprochen handelt es sich dabei um die folgende semantische Analyse des bestimmten Artikels:

(31)
$[\![\mathbf{d}\text{-}_{Russell}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass gilt: $|ext_s(Q) \cap ext_s(P)| = 1$
($a1$) $ext_s(Q) \neq \emptyset$;
($a2$) $|ext_s(Q)| \leq 1$;
(b') $ext_s(Q) \subseteq ext_s(P)$.

($a1$) bezeichnet man als *Existenzbedingung*, weil sie ausdrückt, dass es überhaupt etwas gibt, das der vom Substantiv beigesteuerten Bedingung (in unserem Fall: türkische Kursteilnehmerin zu sein) genügt. ($a2$) heißt *Einzigkeitsbedingung*; denn sie besagt, dass es sich dabei um ein einziges – also: nicht mehr als ein – Individuum handelt. Für ($a3$) gibt es keine spezielle Bezeichnung.

Wir werden einige Vorzüge dieser auf den ersten Blick übermäßig kompliziert anmutenden Analyse in späteren Kapiteln kennen lernen. Schon jetzt ist aber kritisch einzuwenden, dass (31) unmöglich alle Aspekte der Verwendung des bestimmten Artikels abdecken kann. Die folgenden Beispiele illustrieren das:

(32a) **<u>Das Auto</u> war zwischen einer Mauer und einem Porsche eingeklemmt.**
(b) **Obwohl Astrid Lindgren gerade in Schweden sehr populär war, hat <u>die Autorin</u> nie den Literaturnobelpreis erhalten.**
(c) **<u>Der Tiger</u> ist eine in Asien beheimatete Großkatze.**

- (32a) kannn nur auf Situationen zutreffen, in denen es mehr als ein Auto gibt – nämlich einen Porsche und das durch die unterstrichene Kennzeichnung beschriebene Fahrzeug. In der in (31) angegebenen Form ist damit die Einzigkeitsbedingung in diesen Situationen nicht erfüllt. Allenfalls könnte man sagen, dass es sich bei dem gekennzeichneten Auto um das einzige *bereits zur Debatte stehende* Element der Extension von **Auto** handelt. Die Einzigkeitsbedingung muss also hier zu einer *Einschlägigkeitsbedingung* verstärkt werden.
- In (32b) wird die unterstrichene Kennzeichnung auf den Namen im Nebensatz zurück bezogen oder, wie man in der Semantik sagt: *anaphorisch* verwendet; sie lässt sich hier ohne großen Bedeutungsunterschied durch das Pronomen **sie** ersetzen. Auch hier ist wieder die Einzigkeitsbedingung verletzt: der (Haupt-) Satz besagt ja nicht, dass es (in der genannten Situation) überhaupt nur eine Autorin gibt.
- Nach (31) müsste (32c) besagen, dass es überhaupt nur einen Tiger gibt; doch die Einzigkeitsbedingung scheint sich allenfalls auf die gesamte Art *panthera tigris* zu beziehen und nicht auf ihre einzelnen Vertreter. Man spricht hier, wie schon weiter oben in einem ähnlichen Zusammenhang mit Indefinita, von einer *generischen* Verwendung (im weitesten Sinne).

Wir werden in Kapitel 7 auf diese und andere Einwände zur Russellschen Kennzeichnungstheorie zurück kommen und bis dahin letztere als korrekt unterstellen.

---

59 Nach Betrand Russell, der in seinem Aufsatz *On Denoting* (1905) diese Theorie einer älteren Fregeschen Analyse entgegengestellt und sie zugleich sprachkritisch auf Werke der zeitgenössischen Philosophie angewandt hat. Russells Analyse hat einen immensen Einfluss auf die Entwicklung der angelsächsischen Philosophie des 20. Jahrhunderts gehabt.

3.3 *Konservativität und Invarianz*

Vergleicht man die Bedeutungen der soeben beschriebenen Determinatoren miteinander, so fällt auf, dass sie im Grunde immer nur die (jeweiligen) $\boxed{\text{Extensionen der Substantive}}$ mit den (jeweiligen) der $\boxed{\text{Extensionen der Prädikate}}$ in Beziehung setzen:

(33a) $[\![\textbf{kein-}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $\boxed{ext_s(Q)} \cap \boxed{ext_s(P)} = \varnothing$

(b) $[\![\textbf{ein-}_{indef}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $\boxed{ext_s(Q)} \cap \boxed{ext_s(P)} \neq \varnothing$

(c) $[\![\textbf{ein-}_{Num}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $\left|\boxed{ext_s(Q)} \cap \boxed{ext_s(P)}\right| = 1$

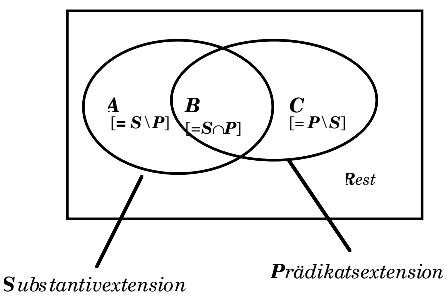
(d) $[\![\textbf{jed-}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $\boxed{ext_s(Q)} \subseteq \boxed{ext_s(P)}$

(e) $[\![\textbf{die meisten}]\!] =$
$\lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $\left|\boxed{ext_s(Q)} \cap \boxed{ext_s(P)}\right| > \left|\boxed{ext_s(Q)} \setminus \boxed{ext_s(P)}\right|$

(f) $[\![\textbf{d-}_{Russell}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass gilt:
$(a1)$ $\boxed{ext_s(Q)} \neq \varnothing$;
$(a2)$ $\left|\boxed{ext_s(Q)}\right| \leq 1$;
(b') $\boxed{ext_s(Q)} \subseteq \boxed{ext_s(P)}$.

Die lexikalischen Analysen in (33) legen den Verdacht nahe, dass es sich bei der Kernbedeutung eines Determinators eigentlich nur um eine einfache, rein mengentheoretisch beschreibbare Beziehung zwischen Extensionen handelt; der 'Rest' der Bedeutung – die Abstraktion von Substantiv- und Prädiaktsbedeutung ($\lambda Q.\ \lambda P.$) und die abschließende Bildung einer Proposition ('die Situationen *s*, so dass gilt: …') – ist immer gleich. Wir werden im nächsten Kapitel sehen. wie sich diese Beobachtung im Rahmen einer alternativen Bedeutungsbeschreibung ausnutzen lässt. An dieser Stelle nehmen wir lediglich zur Kenntnis, dass die Gemeinsamkeiten zwischen den Determinatorenbedeutungen noch tiefer gehen. Es lässt sich nämlich feststellen, dass die Beziehungen, die in (33) jeweils zwischen den hervorgehobenen Extensionen hergestellt werden, nicht beliebiger Art sind, sondern immer bestimmte 'Regionen' betreffen, in die Substantiv- und Prädikatsextensionen den Bereich der Individuen (in einer gegebenen Situation) im Sinne des folgenden Venn-Diagramms zerlegen:

(34)



Es fällt auf, dass alle in (33) genannten Extensionsverhältnisse immer nur die Differenz ***A*** und/oder den Schnitt ***B*** betreffen: die Bedeutung von **kein-** verlangt, dass ***B*** leer ist, die von **jed-**, dass ***A*** leer ist, die von **die meisten**, dass ***B*** mehr Elemente enthält als ***A*** etc.:

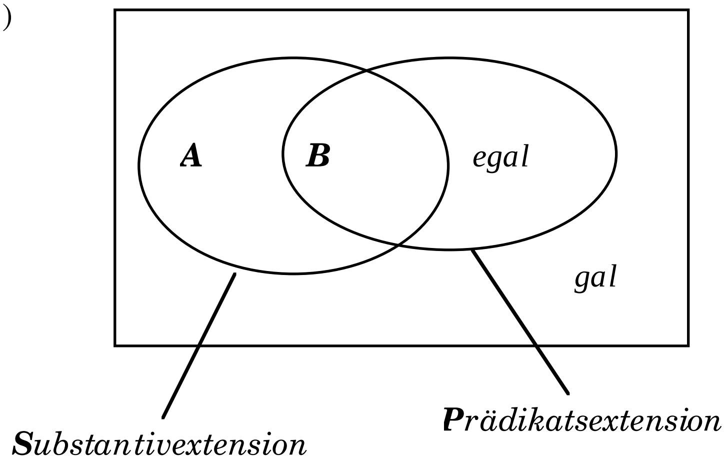
(35a) $\boldsymbol{B} = \varnothing$ **kein-**

(b) $\boldsymbol{B} \neq \varnothing$ **ein-**$_{indef}$

(c) $|\boldsymbol{B}| = 1$ **ein-**$_{Num}$
(d) $\boldsymbol{A} = \emptyset$ **jed-**
(e) $|\boldsymbol{B}| > |\boldsymbol{A}|$ **die meisten**
(f) $|\boldsymbol{A}| = 0 < |\boldsymbol{B}| = 1$ **d-**$_{Russell}$

Es scheint, als spielten bei der Quantifikation weder die Objekte in ***C*** noch die im Rest ***R*** eine Rolle. Die Bedeutungen der Determinatoren interessieren sich sozusagen nur für zwei der vier Regionen:

(36)



Determinatoren, deren Bedeutung eine Beziehung zwischen den in (36) dargestellten Extensionen ausdrücken, nennt man *konservativ*. Bei einem konservativen Determinator tragen also Substantiv- und Prädikatsbedeutung immer nur ihren Schnitt ***B*** und die Differenz ***A*** zur Satzbedeutung bei. Alles andere macht der Determinator. Intuitiv gesprochen macht ein konservativer Determinator eine Aussage über das Verhältnis zwischen Substantiv- und Prädikatsextension, soweit letztere überhaupt von ersterer betroffen ist: es werden nur diejenigen Objekte in der Prädikatsextension betrachtet, die sich in der Extension des Substantivs befinden. Das Substantiv steckt mit seiner Extension sozusagen den Rahmen ab, innerhalb dessen die Prädikatsextension betrachtet wird; alles außerhalb der Substantivextension wird vernachlässigt.

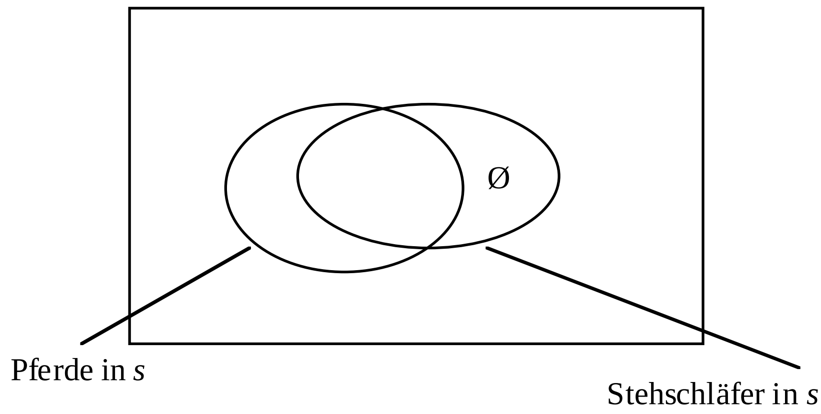
Die Liste der Bedingungen in (35) legt den Verdacht nahe, dass alle Determinatoren konservativ sind. Das ist in der Tat so – und zwar nicht nur im Deutschen: Determinatoren sind offenbar in allen Sprachen konservativ.[60] Dabei könnte man sich leicht vorstellen, wie ein nicht-konservativer Determinator auszusehen hätte. Hier ist ein vermeintliches Gegenbeispiel zur universellen Konservativität:

(37) **Nur Pferde können im Stehen schlafen.**

(37) trifft auf eine Situation *s* zu, wenn es keine Individuen gibt, die im Stehen schlafen können, ohne Pferde zu sein:

60 Das ist eine relativ neue Erkenntnis, die auf den Aufsatz 'Generalized Quantifers and Natural Language' (1981) von Jon Barwise und Robin Cooper zurückgeht.

(38)



Die Prädikatsextension muss m.a.W. eine Teilmenge der Extension des Substantivs sein. Daraus ergibt sich eine zur Bedeutung (33d) von **jed-** spiegelbildliche Analyse:

(39) $[\![\textbf{nur}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s(P) \subseteq ext_s(Q)$

Nach dieser Analyse ist **nur** nicht konservativ; denn die (39) entsprechende Bedingung an die Regionen in der Unterteilung (34) betrifft weder ***A*** noch ***B***, sondern lautet:

(40) $\boldsymbol{C} = \emptyset$ **nur**

Aber aus syntaktisch-morphologischer Sicht spricht nichts dafür, dass es sich bei **nur** überhaupt um einen Determinator handelt – selbst wenn es bei oberflächlicher Betrachtung von Beispielen wie (37) den Anschein haben könnte:

☞ **nur** weist nicht die für deutsche Determinatoren übliche Kongruenzmorphologie auf: **viele Kinder** vs. **vielen Kindern**, aber **nur Kinder/n**

☞ **nur** verbindet sich mit Konstituenten aller möglichen Kategorien, nicht nur mit Substantiven; **nur schlafen**, **nur der König**, ...; insbesondere lässt sich die Konstruktion in (37) auch als Modifikation des pluralischen Indefinitums **Kinder** – also einer Nominalphrase – auffassen

☞ auch in nominalen Verbindungen wie (37) ist **nur** – im Gegensatz zu allen anderen Determinatoren – anfällig für Betonungsunterschie-de:[61] **Maria isst nur *Erdbeeren* mit Schlagsahne** bedeutet nicht dasselbe wie **Maria isst nur Erdbeeren mit *Schlagsahne***.

Da außerdem **nur** der einzige nicht-konservative Determinator wäre; bestätigt die quantorensemantische Analyse diesen syntaktisch-morphologischen Befund.

Neben der Konservativität gibt es eine weitere Gemeinsamkeit zwischen den in (35) aufgelisteten Bedingungen, die die einzelnen Determinatoren an Substantiv- und Prädikatsextension stellen. Denn dabei handelt es sich immer um Beziehungen, die sich anhand der *Anzahl* der Elemente der Mengen ***A*** und ***B*** festmachen lassen. So liegt zum Beispiel die nach (35a) durch **kein-** ausgedrückte Disjunktheit gerade dann vor, wenn der Schnitt null Elemente enthält, wenn also gilt: $|\boldsymbol{B}| = 0$. Entsprechend besagt die Überlappung in (33b), dass $b \neq 0$ usw. Wenn wir die Kardinalität von ***A*** und ***B*** mit '*a*' bzw. '*b*' bezeichnen, lassen sich die Bedingungen in (35) durch die folgenden Zahlenverhältnisse erfassen:

61 Betonungsunterschiede spielen auch sonst eine Rolle für die Bedeutung, aber in Verbindung mit Ausdrücken wie **nur** wirken sie sich auf die Wahrheitsbedingungen aus. Dieses – übrigens in der Semantik sehr gut untersuchte – Phänomen bezeichnet man als *Fokussensitivität*.

(41a) $b = 0$ **kein-**
(b) $b \neq 0$ **ein-**$_{indef}$
(c) $b = 1$ **ein-**$_{Num}$
(d) $a = 0$ **jed-**
(e) $a > b$ **die meisten**
(f) $a = 0 < b = 1$ **d-**$_{Russell}$

Determinatoren, deren Bedeutungen sich im Stil von (34) auf reine Zahlenverhältnisse zwischen Extensionen zurückführen lassen, heißen in der Semantik *invariant*.[62] Die bisherigen Analysen legen nahe, dass *alle* Determinatoren invariant sind. Doch es gibt bemerkenswerte Ausnahmen:

(42) **Peters Auto ist grün.**

Der possessive Genitiv **Peters** erfüllt in (42) die Funktion eines Determinators; und er lässt sich im Sinne der Paraphrase (42') mit einer Variante der Russellschen Kennzeichnungstheorie analysieren:

(42') **Das Auto, das Peter gehört, ist grün.**

Nach der Russellschen Analyse besagt (42'), dass (a1) Peter mindestens ein Auto besitzt, (a2) höchstens ein Auto besitzt, und (b ') jedes Auto, das Peter besitzt, grün ist. Für das Subjekt von (42) und (42') ergibt sich demnach die folgende Bedeutung:

(43) $[\![\textbf{Peters Auto}]\!] = [\![\textbf{das Auto, das Peter gehört}]\!] =$

λP. die Situationen s, so dass gilt:

(a1) $ext_s([\![\textbf{Auto, das Peter gehört}]\!]) \neq \varnothing$;

(a2) $|ext_s([\![\textbf{Auto, das Peter gehört}]\!])| \leq 1$;

(b') $ext_s([\![\textbf{Auto, das Peter gehört}]\!]) \subseteq ext_s(P)$

$=$

λP. die Situationen s, so dass gilt:

(a1) $ext_s([\![\textbf{Auto}]\!]) \cap PB_s \neq \varnothing$;

(a2) $|ext_s([\![\textbf{Auto}]\!]) \cap PB_s| \leq 1$;

(b') $ext_s([\![\textbf{Auto}]\!]) \cap PB_s \subseteq ext_s(P)$

Dabei steht 'PB_s' für die Objekte, die Peter in der jeweiligen Situation s besitzt: offenbar ergibt sich die Extension von **Auto, das Peter besitzt** durch Schnittbildung der Extension von **Auto** mit Peters Besitztümern.[63] Während sich aber die Bedeutung (43) im Fall des Subjeks von (42') durch Kombination des Russellschen Artikels mit dem erweiterten Substantiv **Auto, das Peter gehört** ergibt, muss für das Subjekt von (42) für dasselbe Resultat die (noch zu ermittelnde) Bedeutung von **Peters** mit $[\![\textbf{Auto}]\!]$ kombiniert werden. Ein kurzer Vergleich mit einschlägigen Ausdrucksvarianten führt in mittlerweile gewohnter Manier auf die gesuchte Bedeutung des Possessivums:[64]

62 Der Terminus bezeichnet eigentlich eine allgemeinere Eigenschaft von Bedeutungen, die wir im nächsten Kapitel kennenlernen werden.

63 Die genaue kompositionelle Herleitung wird uns in Kapitel 6 im Rahmen der Relativsatz-Semantik beschäftigen.

64 Aus Einfachheitsgründen vernachlässigen wir zwei Subtilitäten. Zum einen kann der possessive Genitiv eine andere Beziehung als *Besitz* anzeigen: **Peters Haus** kann z.B. auch das Haus sein, das Peter bewohnt. Zum anderen anderen kann die einschlägige Beziehung auch durch das Substantiv selbst

(44) $[\![\textbf{Peters Auto}]\!]$ =
λP. die Situationen s, so dass gilt:
$(a1)\ ext_s([\![\textbf{Auto}]\!]) \cap PB_s \neq \emptyset$;
$(a2)\ |ext_s([\![\textbf{Auto}]\!]) \cap PB_s| \leq 1$;
$(b')\ ext_s([\![\textbf{Auto}]\!]) \cap PB_s \subseteq ext_s(P)$

(44') $[\![\textbf{Peters Fahrrad}]\!]$ =
λP. die Situationen s, so dass gilt:
$(a1)\ ext_s([\![\textbf{Fahrrad}]\!]) \cap PB_s \neq \emptyset$;
$(a2)\ |ext_s([\![\textbf{Fahrrad}]\!]) \cap PB_s| \leq 1$;
$(b')\ ext_s([\![\textbf{Fahrrad}]\!]) \cap PB_s \subseteq ext_s(P)$

(44") $[\![\textbf{Peters Haus}]\!]$ =
λP. die Situationen s, so dass gilt:
$(a1)\ ext_s([\![\textbf{Haus}]\!]) \cap PB_s \neq \emptyset$;
$(a2)\ |ext_s([\![\textbf{Haus}]\!]) \cap PB_s| \leq 1$;
$(b')\ ext_s([\![\textbf{Haus}]\!]) \cap PB_s \subseteq ext_s(P)$

Durch Abstraktion von der jeweiligen Substantivbedeutung gelangen wir zu der folgenden Analyse des Possessivs:

(45) $[\![\textbf{Peters}]\!]$ =
$\lambda Q.\ \lambda P$. die Situationen s, so dass gilt:
$(a1)\ ext_s(Q) \cap PB_s \neq \emptyset$;
$(a2)\ |ext_s(Q) \cap PB_s| \leq 1$;
$(b')\ ext_s(Q) \cap PB_s \subseteq ext_s(P)$

Man beachte, dass **Peters** nach (45) konservativ ist; denn in der folgenden Reforumlierung spielen die Mengen $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{R}$ i.S.v. (36) keine Rolle:

(45) $|\boldsymbol{A}| \cap PB_S = 0 < |\boldsymbol{B}| \cap PB_S = 1$ **Peters**

(45) entspricht der Konservativitätsbedingung, obwohl hier neben den Extensionen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ auch noch die jeweiligen Besitzverhältnisse eingehen; denn diese werden weder vom Substantiv noch vom Prädikat beigetragen, sondern sind – wie die Existenz- und Einzigkeitsbedingung Bestandteil der Bedeutung des Possessivs selbst.

Das Bemerkenswerte an (45) bzw. (45') ist, dass diese Bedeutung offenbar über ein reines Zahlenverhältnis zwischen Substantiv- und Prädikatsextension hinausgeht: der Determinator **Peters** ist nicht invariant; denn neben den in (45) angeführten Abschnitten des Individuenbereichs spielt offenbar auch noch der Umfang von Peters Besitztümern eine Rolle. Dennoch ist die in (41) beobachtete Gemeinsamkeit zwischen den Determinatoren wohl kein Zufall. Denn während das Possessiv **Peters** das Ergebnis eines grammatischen Prozesses ist, handelt es sich – mit der möglichen Ausnahme von **die meisten** – bei diesen um *lexikalische* Determinatoren. Und für diese scheinen nicht nur im Deutschen, sondern universell, invariant zu sein.

---

ausgedrückt werden – wie in **Peters Vater**, wo sich keine angemessene Paraphrase der Art **der Vater, der** [**zu**] **Peter gehört** finden lässt. Auch auf diese Komplikationen kommen wir in Kapitel 6 zurück.

3.4 Quantifizierende Objekte

Wie Eigennamen kommen auch quantifizierende Nominalphrasen nicht nur an Subjektstelle vor. Doch anders als bei ersteren überträgt sich die Deutung der letzteren nicht ohne weiteres von der Subjekt- auf die Objektposition. In Abschnitt 2.4 hatten wir bei der Interpretation des Prädikats **küsst Eike** den Eigennamen interpretiert, als stünde er an Subjektstelle, und daraufhin die Bedeutung des transitiven Verbs per Differenzbildung gewonnen. Die Ausgangssituation war also:

(46) ⟦**küsst Eike**⟧ ✓

⟦**küsst**⟧ **?** ⟦**Eike**⟧ ✓

Dieses Vorgehen verbietet sich jetzt für die Analyse eines Prädikats wie **küsst niemanden**; denn die Ausgangslage ist eine andere. Inzwischen kennen wir ja – gerade durch die Auflösung von (46) – die Bedeutung des transiviven Verbs. Wenn wir wieder davon ausgehen, dass für die Bedeutung der Nominalphrase **niemand** ihre Rolle als Subjekt oder Objekt keinen Unterschied macht, lässt sich die Differenzmethode nicht anwenden:

(47) ⟦**küsst niemanden**⟧ ✓

⟦**küsst**⟧ ✓ ⟦**niemanden**⟧ ✓

(47) zeigt, dass bei quantfizierenden Nominalphrasen im Objekt die Bestandteile der Bedeutungskombination ebenso bekannt sind wie das Resultat. Was wir dagegen nicht kennen, ist die Kombination selbst, also die Operation, die Verbbedeutung und Quantor miteinander zur Prädikatsbedeutung verschmilzt. Die bisher immer verwendete Funktionalapplikation tut es hier jedenfalls nicht, wie schon ein flüchtiger Blick auf die zu kombinierenden Bedeutungen zeigt:

(48a) ⟦**küsst**⟧ $= \lambda y.\ \lambda x.$ die Situationen, in denen y von x geküsst wird
(b) ⟦**niemand**⟧ $= \lambda P.$ die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_s(P)$

Um sich per Applikation kombinieren zu lassen, müssten die beiden Bedeutungen in dem Sinn zueinander passen, dass die eine als Argument der anderen fungierten kann. Doch einerseits lässt sich die in (48a) angegebene Bedeutung des Verbs nur auf Individuen anwenden, nicht auf Quantoren wie ⟦**niemand**⟧. Andererseits erwartet letzterer als Argument eine Prädikatsbedeutung, also eine Funktion, die sich auf ein Individuum anwenden lässt, dem sie als Wert eine Proposition zuordnet; aber die Werte von ⟦**küsst**⟧ sind keine Propositionen, sondern Funktionen. Die Funktionalapplikation scheidet also als Bedeutungskombination in (47) aus.

Um die gesuchte Bedeutungskombination zu finden, sehen wir uns zunächst an, was diese im vorliegenden Fall leisten muss:

(49) $\lambda y.\ \lambda x.$ die Situationen, in denen y von x geküsst wird % = ⟦**küsst**⟧ % ⟦**niemand**⟧
$\lambda P.$ die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_s(P)$
= $\lambda x.$ die Situationen, in denen x niemanden küsst = ⟦**küsst niemanden**⟧

Das Problem ist, die Proposition rechts vom Gleichheitszeichen so zu darzustellen, dass klar wird, wie sie sich aus den beiden links vom Gleichheitszeichen kombinierten Bedeutungen ergibt. Dazu werden wir diese Beschreibung so lange umformulieren, bis die beiden Bedeutungen als eigene Bestandteile isoliert sind. Ist das erst einmal geschafft, lässt sich das Ergebnis auf beliebige quantifizierende Objekte verallgemeinern.

Im ersten Schritt können wir das Ergebnis der Bedeutungskombination so beschreiben, dass es eine vom Objekt beizusteuernde Disjunktheitsbedingung enthält. Das ist nicht schwer: die

Situationen, in denen ein Individuum x niemanden küsst, sind ja gerade die, in denen die Personen sich nicht überlappen mit der Menge K_s^x der von x (in s) Geküssten:

(50) λx. die Situationen, in denen x niemanden küsst

= λx. die Situationen, in denen Per_s disjunkt ist von K_s^x

Da der Quantor an Objektstelle eine Prädikatsbedeutung als Argument erwartet, empfiehlt es sich als nächstes, K_s^x als Extension einer solchen darzustellen, also ein P zu finden, für das $ext_s(P) = K_s^x$. $P = \lambda z$. die Situationen, in denen z von x geküsst wird erfüllt genau diesen Anspruch:

(51) $ext_x(\lambda z$. die Situationen, in denen z von x geküsst wird)

= die Individuen y, für die $s \in [\lambda z$. die Situationen, in denen z von x geküsst wird$]$ (y)

= die Individuen y, für die $s \in$ die Situationen, in denen y von x geküsst wird

= die Individuen y, so dass y in s von x geküsst wird

= K_s^x

Diese Prädikatsbedeutung lässt sich nun aus der Bedeutung des transitiven Verbs **küsst** konstruieren. Denn die Situationen s, in denen z von x geküsst wird, sind gerade die Situationen in der Proposition $[\![\textbf{küsst}]\!](z)\,(x)$: x küsst z in s, wenn $s \in [\![\textbf{küsst}]\!](z)\,(x)$. Es gilt also:

(52) K_s^x

= $ext_x(\lambda z$. die Situationen, in denen z von x geküsst wird)

= $ext_x(\lambda z.\ [\![\textbf{küsst}]\!](z)(x))$

Wenn wir jetzt (52) in (50) einsetzen, stellen wir fest, dass wir unserem Ziel, die Bedeutung des Prädikats aus denen seiner Bestandteile zu ermitteln, schon erheblich näher gekommen sind; denn wir können jetzt innerhalb der Prädikatsbedeutung den Beitrag des Verbs isolieren:

(53) λx. die Situationen, in denen x niemanden küsst

= λx. die Situationen, in denen Per_s disjunkt ist von K_s^x

= λx. die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_s(\lambda z.\ [\![\textbf{küsst}]\!](z)(x))$

Um nun auch noch den Beitrag des Objekts auszumachen, blicken wir kurz zurück auf eine typische Anwendung des Quantors $[\![\textbf{niemand}]\!]$ in *Subjektposition*:

(54) $[\![\textbf{niemandschläft}]\!]$

= $[\![\textbf{niemand}]\!]([\![\textbf{schläft}]\!])$

= die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_s([\![\textbf{schläft}]\!])$

In (53) spielt $\lambda z.\ [\![\textbf{küsst}]\!](z)(x)$ dieselbe Rolle wie $[\![\textbf{schläft}]\!]$ in (54). Entsprechend lässt sich die letzte Zeile von (53) umformulieren, womit auch der Beitrag des Objekts isoliert wäre:

(55) λx. die Situationen, in denen x niemanden küsst

= λx. die Situationen, in denen Per_s disjunkt ist von K_s^x

= λx. die Situationen s, in denen Per_s disjunkt ist von $ext_s(\lambda z.\ [\![\textbf{küsst}]\!](z)(x))$

= $\lambda x.\ [\![\textbf{niemand}]\!](\lambda z.\ [\![\textbf{küsst}]\!](z)(x))$

Die Zerlegung (55) der Bedeutung des Prädikats (47) in die Bedeutungen seiner unmittelbaren Teile legt nahe, dass auch im allgemeinen von dieser Bedeutungskombination Gebrauch gemacht wird:

(56) *Semantik der Anbindung quantifizierender Nominalphrasen als Objekte*[65]
Wenn P ein Prädikat ist, bestehend aus einem Verb V und einer quantifizierenden Nominalphrase QN als Objekt, dann gilt:

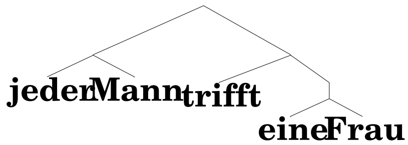
$$[\![P]\!] = \lambda x.\ [\![QN]\!](\lambda z.\ [\![V]\!](z)(x))\ .$$

Die in (56) angegebene Kombination ist deutlich komplizierter als die bisher für solche Zwecke bemühte Funktionalapplikation; sie hat auch keinen eigenen Namen, sondern ist Teil einer Familie semantischer Operationen, die wir ab dem nächsten Kapitel näher kennenlernen werden. Fürs erste begnügen wir uns damit, (56) zu überprüfen, indem wir die Kombination auf ein anderes Beispiel anwenden:

(57) **Jeder Mann trifft eine Frau.**

Wir gehen von der folgenden Konstituentenstruktur aus:

(57')



Die unmittelbaren Teile von (57) sind nach der Zerlegung (57') das quantifizierende Subjekt **jeder Mann** und das Prädikat **eine Frau**. Nach der Semantik der Quantifikation – also der Kombinationsregel (12) für quantifizierende Subjekte aus Abschnitt 3.1 – gilt demnach:

(58) $[\![(57)]\!] = [\![\textbf{jeder Mann}]\!]([\![\textbf{trifft eine Frau}]\!])$

Die Subjektbedeutung bestimmt sich ebenfalls per Funktionalapplikation – das ist klar, weil wir die Bedeutungen der Determinatoren durch Differenzbildung ermittelt hatten. Es gilt also:

(59) $[\![\textbf{jeder Mann}]\!] = [\![\textbf{jeder}]\!]([\![\textbf{Mann}]\!])$

Beide (unmittelbaren) Bestandteile des Subjekts sind unzusammengesetzte Ausdrücke; ihre Bedeutung muss demnach im Lexikon aufgelistet sein. Die Bedeutungsfestlegung (25) für den Determinator **jeder** wiederholen wir in (60a); für das Substantiv **Mann** gehen wir wie schon (implizit) zuvor von der Gleichung (60b) aus.

(60a) $[\![\textbf{jeder}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s(Q) \subseteq ext_s(P)$
(b) $[\![\textbf{Mann}]\!] = \lambda x.$ die Situationen, in denen x ein Mann ist

(58) lässt sich jetzt wie folgt weiterentwickeln, wobei wir die Extension von **Mann** in einer Situation s – also die Menge der Männer in s – mit 'M_s' abkürzen:

(61) $[\![(57)]\!] = [\![\textbf{jeder Mann}]\!]\ ([\![\textbf{trifft eine Frau}]\!])$
= $[\![\textbf{jeder}]\!]\ ([\![\textbf{Mann}]\!])\ ([\![\textbf{trifft eine Frau}]\!])$ nach (59)
= $[\lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s(Q) \subseteq ext_s(P)]([\![\textbf{Mann}]\!])([\![\textbf{trifft eine Frau}]\!])$ (60a)
= $[\lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s([\![\textbf{Mann}]\!]) \subseteq ext_s(P)]([\![\textbf{trifft eine Frau}]\!])$ λ-Konversion
= $[\lambda P.$ die s, so dass $ext_s(\lambda x.$ die Situationen, in denen x Mann ist$) \subseteq ext_s(P)]$
$([\![\textbf{trifft eine Frau}]\!])$ mit (60b)
= $[\lambda P.$ die s, so dass $M_s \subseteq ext_s(P)]\ ([\![\textbf{trifft eine Frau}]\!])$ Abkürzung

65 Wir halten uns bei der Bezeichnung der Variablen an das obige Beispiel, anstatt (wie in der semantischen Literatur üblich) das 'z' in 'y' umzubenennen. Das spielt natürlich für die Operation selbst keine Rolle – Variablennamen sind ja beliebig.

= die Situationen s, so dass $M_s \subseteq ext_s(\llbracket \textbf{trifft eine Frau} \rrbracket)$ λ-Konversion

Bevor wir in die Analyse des Prädikats einsteigen, vergegenwärtigen wir uns ein paar Details der Ableitung (61). Wir haben in (61) zwei λ-Konversionen durchgeführt, um die Formeln kürzer und durchsichtiger zu halten (soweit das überhaupt geht). Die genauen Stellen, an denen wir sie durchgeführt haben, spielen dabei keine Rolle: solange man immer alle λ-Konversionen ausführt, die sich überhaupt ausführen lassen, läuft das Ergebnis der Berechnung immer – also nicht nur in diesem Fall – auf dasselbe hinaus.[66] Wir hätten also auch z.B. zuerst die lexikalische Einsetzung nach (60b) vornehmen und dann erst das 'λQ' abbauen können:

(61') …

= $[\lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s(Q) \subseteq ext_s(P)](\llbracket \textbf{Mann} \rrbracket)(\llbracket \textbf{trifft eine Frau} \rrbracket)$ (60a)

= $[\lambda Q.\ \lambda P.$ die s, so dass $ext_s(Q) \subseteq ext_s(P)]$
$(\lambda x.$ die Situationen, in denen x Mann ist$)\ (\llbracket \textbf{trifft eine Frau} \rrbracket)$ (60b)

= $[\ \lambda P.$ die s, so dass $ext_s(\lambda x.$ die Situationen, in denen x Mann ist$) \subseteq ext_s(P)]$
$(\llbracket \textbf{trifft eine Frau} \rrbracket)$ λ-Konversion

= …

Was wir dagegen *nicht* hätten machen können, ist das 'λP' vor dem 'λQ' abbauen; denn die λ-Konversion setzt eine Konstellation der Gestalt

(62) $[\lambda x\ldots]\,(A)$

voraus, wobei A das Argument ist, dessen Stelle im λ-Ausdruck durch die Variable 'x' vertreten wird. In (61) finden wir etwas von der folgenden Gestalt vor:

(63) $\underline{[\lambda Q\ \lambda P\ \ldots]\,(A_1})\ (A_2)$

In (63) ist der unterstrichene Teil von der Form (62); dass die Variable anders heißt, spielt dafür natürlich keine Rolle. Daher lässt sich das 'λQ' wie oben in der Tat per λ-Konversion abbauen, indem man das Argument 'A_1' für 'Q' in dem durch die drei Punkte angedeuteten Teil einsetzt. Woher weiß man, dass A_1 das Argument ist und nicht z.B. A_2? Ganz einfach: 'A_1' steht unmittelbar rechts von '$[\lambda Q\ \lambda P\ \ldots]$'. Aus demselben Grund geht es auch nicht an, dass man per λ-Konversion in (63) zuerst das 'λP' abbaut. Denn die Konstellation (62) liegt in (63) *nur im unterstrichenen Teil* vor; insbesondere steht unmittelbar rechts von dem mit 'λP' beginnenden Ausdruck weder 'A_1' (das steht rechts vom 'λQ'-Ausdruck) noch 'A_2' (das steht rechts vom unterstrichenen Ausdruck). Zwar ist (63) insgesamt auch von der Form '$F(A)$', aber die Funktion(sbezeichnung) 'F' hat nicht die Form (62), sondern ist selbst wieder aus '$[\lambda Q\ \lambda P\ \ldots]$' und '$A_1$' zusammengesetzt. Die Reihenfolge der Elimination der Lambdas liegt also in diesem Fall eindeutig fest. So viel zu zur Berechnung (61), die ja von der in diesem Abschnitt eingeführten Technik noch gar keinen Gebrauch macht. Das geschieht erst im nächsten Schritt. Denn um die Extension des Prädikats **kauft ein Heft** (in einer Situation s) zu bestimmen, müssen wir erst seine Bedeutung ermitteln; und das geschieht zunächst nach der in (56) gegebenen Interpretation quantifizierender Objekte:

(63) $\llbracket \textbf{trifft eine Frau} \rrbracket$

= $\lambda x.\ \llbracket \textbf{eine Frau} \rrbracket\ (\lambda z.\ \llbracket \textbf{trifft} \rrbracket(z)(x))$ mit (56)

= $\lambda x.\ \llbracket \textbf{eine} \rrbracket\ (\llbracket \textbf{Frau} \rrbracket)\ (\lambda z.\ \llbracket \textbf{trifft} \rrbracket(z)(x))$ wie gehabt

66 Dieser Sachverhalt ist nicht unmittelbar einsichtig, lässt sich aber mit mathematischer Präzision beweisen. Es handelt sich um eine Variante des sog. *Church-Rosser-Satzes* – benannt nach dem Church aus Fn. 45 und seinem Schüler John Barkley Rosser, die das 1936 herausgefunden haben.

$=$ $\lambda x.$ [$\lambda Q.$ $\lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s(Q) \cap ext_s(P) \neq \emptyset$]
($[\![$**Frau**$]\!]$) ($\lambda z.$ $[\![$**trifft**$]\!](z)(x)$) s. (33b)
$=$ $\lambda x.$ [$\lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s([\![$**Frau**$]\!]) \cap ext_s(P) \neq \emptyset$] λ-Kv.
$=$ $\lambda x.$ die Situationen s, so dass $ext_s([\![$**Frau**$]\!]) \cap ext_s(\lambda z.$ $[\![$**trifft**$]\!]$ (z) $(x)) \neq \emptyset$ λ-Kv.

Jetzt benötigen wir wieder zwei offensichtliche lexikalische Gleichungen:

(64a) $[\![$**Frau**$]\!]$ $= \lambda x.$ die Situationen s, in denen x eine Frau ist
(64b) $[\![$**trifft**$]\!]$ $= \lambda y.$ $\lambda x.$ die Situationen s, in denen [der] x [den] y trifft

Anstatt diese Bedeutungen direkt in (63) einzusetzen, bestimmen wir gleich die Extensionen, von denen dort die Rede ist. $ext_s([\![$**Frau**$]\!])$ ist (für beliebige Situationen s) die Menge der Individuen y, für die gilt: $s \in [\![$**Frau**$]\!]$ (y) , was nach (64a) darauf hinausläuft, dass y in s eine Frau ist. Die andere Extension hängt außer von der Situation s auch noch von dem Argument x der Prädikatsbedeutung ab:[67]

(65a) $ext_s([\![$**Frau**$]\!])$ = die Menge der Frauen in s
(b) $ext_s(\lambda z.$ $[\![$**trifft**$]\!]$ (z) $(x))$
$=$ die Menge der y, für die gilt: $s \in$ ($\lambda z.$ $[\![$**trifft**$]\!]$ (z) $(x))$ (y) Def. von *ext*
$=$ die Menge der y, für die gilt: $s \in$ $[\![$**trifft**$]\!]$ (y) (x) λ-Konversion
$=$ die Menge der y, für die gilt:
$s \in$ [$\lambda u.$ $\lambda v.$ die Situationen, in denen [der] v [den] u trifft] (y) (x) (64b)
$=$ die Menge der y, für die gilt:
$s \in$ [$\lambda v.$ die Situationen, in denen [der] v [den] y trifft] (x) λ-Konversion
$=$ die Menge der y, für die gilt:
$s \in$ die [Menge der] Situationen, in denen [der] x [den] y trifft λ-Konversion
$=$ die Menge der y, für die gilt: in s trifft [der] x [den] y

Der letzte Übergang gilt, weil – ganz allgemein gesprochen – etwas gerade dann Element der Menge aller Objekte ist, die eine bestimmte Bedingung erfüllen, wenn es selbst diese Bedingung erfüllt: Fritz ist in der Menge der Deutschen, wenn Fritz Deutscher ist (und umgekehrt), 2 ist in der Menge der ungeraden Zahlen, wenn 2 ungerade ist (…), eine Situation s ist in der Menge der Situationen, in denen der x den y trifft, wenn in s der x den y trifft (und umgekehrt trifft der x in s den y, wenn s in dieser Menge ist).
Mit den beiden Gleichungen in (65) reduziert sich (63) auf:
(63') $[\![$**trifft eine Frau**$]\!]$
$=$ …
$=$ $\lambda x.$ die Situationen s, so dass $ext_s([\![$**Frau**$]\!]) \cap ext_s(\lambda z.$ $[\![$**trifft**$]\!]$ (z) $(x)) \neq \emptyset$
$=$ $\lambda x.$ die Situationen s, so dass gilt: die Menge der Frauen in s überlappt sich mit der
Menge der y, für die gilt: in s trifft [der] x [den] y
$=$ $\lambda x.$ die Situationen s, so dass gilt: es gibt mindestens ein Individuum,
das [der] x in y trifft und das in s eine Frau ist
$=$ $\lambda x.$ die Situationen s, so dass gilt: x trifft in s mindestens eine Frau
$=$ $\lambda x.$ die Situationen, in denen x mindestens eine Frau trifft

---

67 Hier wie anderswo benennen wir Variablen immer dann um, wenn Verwechslungsgefahr besteht: sowohl die lexikalischen Regeln als auch die Kombinationsregeln führen Variablen ein, und wir verhindern auf diese Weise, dass wir uns mit derseblen Variablen zweimal auf verschiedene Argumente beziehen. Die genauen Regeln für die Umbenennung lernen wir im nächsten Kapitel kennen.

Die Übergänge in (63') sind allesamt intuitive, auf dem Verständnis der deutschen (Meta-) Sprache basierende Paraphrasen. Bevor wir jetzt endlich die Bedeutung von Satz (57) nach unseren Interpretationsprinzipien bestimmen, ermitteln wir noch die Extension des Prädikats für eine beliebige Situation s; denn die können wir dafür gebrauchen:

(66) ext_s(⟦**trifft eine Frau**⟧)
= die Menge der x, für die gilt: $s \in$ ⟦**trifft eine Frau**⟧ (x) — Def. von *ext*
= die Menge der x, für die gilt:
$s \in$ [λz. die Situationen, in denen z mindestens eine Frau trifft] (x) — (63')
= die Menge der x, für die gilt:
$s \in$ die Situationen, in denen x mindestens eine Frau trifft — λ-Konversion
= die Menge der x, für die gilt: in s trifft x mindestens eine Frau

Jetzt können wir das Ergebnis von (66) in (61) einsetzen und erhalten die Proposition, die (57) tatsächlich ausdrückt:

(61") ⟦(57)⟧ = ⟦**jeder Mann**⟧(⟦**trifft eine Frau**⟧)
= …
= die Situationen s, so dass $M_s \subseteq ext_s$(⟦**trifft eine Frau**⟧)
= die Situationen s, so dass gilt: — mit (66)
$M_s \subseteq$ die Menge der x, für die gilt: in s trifft x mindestens eine Frau
= die Situationen, in denen die Menge der Männer Teilmenge der Individuen ist, die mindestens eine Frau treffen — Def. von M_s und Paraphrase
= die Situationen, in denen es keinen Mann gibt, der nicht mindestens eine Frau trifft — Def. von *Teilmenge*
= die Situationen, in denen es keinen Mann gibt, der keine Frau trifft — Paraphrase

Die in (56) gegebene Bedeutungskombination für quantifizierende Objekte funktioniert also auch in diesem Fall. Man beachte, dass nach der Deutung (61") der Satz (57) auf eine Situation zutreffen kann, wenn jeder Mann eine andere Frau trifft. Das ist insofern unzweifelhaft korrekt, als man den Satz in der Tat so verstehen kann. Doch könnte mit (57) nicht auch gemeint sein, dass jeder Mann dieselbe Frau getroffen hat? Dieser Eindruck verstärkt sich, wenn wir das Beispiel leicht variieren:

(67a) **Jeder Mann verehrt eine Schauspielerin.**
(b) **Sie hat in unzähligen Filmen mitgespielt.**

Wird (67a) mit (67b) fortgeführt, dann wird offenbar von einer Situation berichtet, in der es eine bestimmte Schauspielerin gibt, die von jedem Mann verehrt wird. Allerdings beweist das noch nicht, dass damit wirklich eine eigene Lesart des (Oberflächen-) Satzes (67a) vorliegt. Denn auch nach einer zu (61") analogen Analyse träfe der Satz auf eine solche Situation zu: wenn eine Schauspielerin von jedem Mann verehrt wird, dann gibt es insbesondere keinen Mann, der gar keine Schauspielerin verehrt. Um zu sehen, dass wirklich eine Ambiguität vorliegt, muss man diese durch einen eigenen Test belegen, was in den Übungsaufgaben versucht werden soll. Im folgenden Kapitel kommen wir noch einmal auf die Frage zurück und lernen eine Technik kennen, mit der sich prinzipiell Sätze wie (57) oder der erste (67a) als ambig beschreiben lassen; pronominale Anschlüsse wie in (67b) werden wir allerdings erst im neunten Kapitel deuten.

In Kapitel 2 hatten wir die Deutung der Eigennamen von der Subjektstelle auf direkte Objekte und dann auf indirekte Objekte übertragen. Angesichts der Schwierigkeiten, den ersten Schritt für quantifizierende Nominalphrasen zu gehen, mag es nicht überraschen, dass der zweite Schritt sich auch nicht ganz automatisch ergibt. Wir werden ihn auch nicht vollziehen, bevor wir im nächsten Kapitel einige grundsätzliche Techniken zur systematischen Darstellung von Bedeutungskombinationen kennen gelernt haben.

3.5 Varianten

Wir beenden das Kapitel mit zwei alternativen Analysen quantifizierender Nominalphrasen. Die Motivation dafür ergibt sich aus der überraschenden Komplexität der semantischen Operation (56) und der daraus resultierenden Frage, ob man dasselbe Resultat nicht auf einfachere Weise erreichen kann. Insbesondere kann man sich fragen, ob man nicht doch – bei geeigneter Modifikation der Ausgangslage – mit einer Kombination per Funktionalapplikation auskommen kann. Die Ausgangslage zu Beginn des vorangehenden Abschnitts war die folgende:

(68)

⟦**küsst niemanden**⟧
= λx. die Situationen, in denen x niemanden küsst

⟦**küsst**⟧
= λy. λx. die Situationen, in denen y von x geküsst wird

⟦**niemanden**⟧
= λP. die Situationen s, in denen $Per_s \cap ext_s(P) = \varnothing$

Wir hatten aufgrund dieser Ausgangslage eine semantische Operation gesucht, die die nach (68) bekannten Bedeutungen der Teile so kombiniert, dass die ebenfalls bekannte Prädikatsbedeutung herauskommt. Das Ergebnis steht in (56). Doch vielleicht war dieses Vorgehen insofern überstürzt, als wir die Lage ebenso als Anlass zur Revision der bisherigen Analysen hätten nehmen können: wenn sich die bisher angenommenen Bedeutungen der Teile nicht auf einfache Weise zur Prädikatsbedeutung kombinieren lassen, dann muss man vielleicht komplexere Bedeutungen ansetzen, als sie für die vorherigen Konstruktionen nötig waren. Konkret gesprochen sollten wir also die Möglichkeit überprüfen, ob die semantische Operation (68) nicht umgangen werden kann, wenn man *(a)* die Prädikatsbedeutung, *(b)* die Verbbedeutung oder *(c)* die Objektbedeutung in (68) revidiert. Die Revision *(a)* wäre die folgenreichste, weil sie sich auch auf andere vorher analysierte Konstruktionen und Ausdrücke auswirken würde; die Deutung von quantifizierenden Nominalphrasen an Subjektstelle (und damit indirekt die Deutung der Determinatoren) sowie die Semantik der Prädikation hingen von der in (68) angenommenen Prädikatsbedeutung ab. Wir werden der Möglichkeit, diese zu modifizieren, deshalb nicht nachgehen. Ebenso wenig werden wir darüber spekulieren, ob sich *(b)* und *(c)* zugleich modifizieren lassen, so dass eine einfachere Kombination zur erwünschten Prädikatsbedeutung führt. Aber der Möglichkeit einer jeweiligen Modifikation von *(b)* und *(c)* werden wir nachgehen.

Wir beginnen mit *(c)*, indem wir uns fragen, ob man das Objekt so (um-) deuten kann, dass sich die Bedeutung des Prädikats **küsst niemanden** aus der des Verbs **küsst** per Funktionalapplikation ergibt. Da **niemand**[**en**] auch an Objektstelle offenbar kein bestimmtes Individuum benennt, ist die Möglichkeit, es als Argument der Verbbedeutung zu interpretieren, blockiert. Also müsste seine Bedeutung eine Funktion sein, die ⟦**küsst**⟧ als Argument nimmt. Welche Funktion soll das sein? Die Antwort ergibt sich wieder aus der Differenzmethode:

(69) ⟦**küsst niemanden**⟧ ✓

⟦**küsst**⟧ ✓ ⟦**niemanden**⟧ **?**

Anstatt die Lösung von (69) im Detail vorzuführen, notieren wir hier nur das Ergebnis, das sich auf die nun schon bekannte Art und Weise herleiten lässt:

(70) $[\![\textbf{niemanden}]\!] = \lambda R.\ \lambda x.$ die Situationen s, in denen $Per_s \cap ext_s(\lambda z.\ R(z)(x)) = \varnothing$

Das Unbefriedigende an der Analyse (70) ist, dass sie uns zu der Annahme zwingt, dass **niemand** an Subjektstelle eine andere Bedeutung (70') hat als **niemanden** an Objektstelle:

(70') $[\![\textbf{niemand}]\!] = \lambda P.\ \lambda x.$ die Situationen s, in denen $Per_s \cap ext_s(P) = \varnothing$

Schlimmer noch: *jede* quantifizierende Nominalphrase müsste nach dieser Strategie an Subjekt- und Objektstelle verschiedene Bedeutungen haben. Und im Fall von komplexen Nominalphrasen wie **kein Mensch** würde sich diese Bedeutungsverdopplung auf die Determinatoren übertragen; denn nach unseren bisherigen Analysen kombiniert sich die Bedeutung von **kein** mit der von **Mensch** zu der Subjektsbedeutung (70') und nicht zu der Objektsbedeutung (70). Um diese Komplikationen in systematische Bahnen zu lenken, liegt es nahe, den Bedeutungsunterschied zwischen akkusativischen und nominativischen Nominalphrasen auf den Unterschied in der Kasusmorphologie zurückzuführen und die Bedeutung (70) aus der von (70') herzuleiten:

(71) $[\![\textbf{niemanden}]\!] = [\![\textbf{niemand}]\!]\ \%\ [\![\textit{Akkusativ}]\!]$

In (71) ist **niemand**- ein unflektiertes Morphem, das die Bedeutung (70') aus dem Lexikon erhält und mit einem *Akkusativ*-Morphem verschmolzen werden kann; die Oberflächenform ist dann **niemanden**, dessen Bedeutung sich aus denen der zwei kombinierten Morpheme ergibt. Diese Verschmelzung ist sub-syntaktisch (flexionsmorphologisch), lässt sich aber kompositionell deuten, wenn man die Bedeutung des *Akkusativ*-Morphems per Differenzbildung ermittelt und folglich das '%' in (71) als Funktionalapplikation versteht. Wir lassen die Details wieder weg und zeigen nur das Endergebnis:[68]

(72a) $[\![\textit{Akkusativ}]\!] = \lambda Q.\ \lambda R.\ \lambda x.\ Q(\lambda z.\ R(z)(x))$
(b) $[\![\textbf{niemanden}]\!] = [\![\textit{Akkusativ}]\!]\ ([\![\textbf{niemand}]\!])$
$=$ $\lambda R.$ die s, in denen Per_s disjunkt ist von der Menge der x, so dass $ext_s(\lambda z.\ R(z)(x)))$

Die so gewonnenen Bedeutung des *Akkusativ*-Morphems erinnert stark an die von uns benutzte komplexe Operation (56) zur Anbindung quantifizierender Objekte, die es zu umgehen galt. Hier taucht sie im Gewande einer *lexikalischen* Bedeutung eines Funktionsmorphems wieder auf. Aber für die Bedeutungsverschmelzung kommt dieser Ansatz, dem wir ansonsten nicht weiter nachgehen werden, mit der Funktionalapplikation als einziger Operation aus.[69]
Eine andere Möglichkeit, die Operation (56) zu vermeiden, besteht in der Revision *(b)* der Verbbedeutung in (68). Auf diese Weise entsteht die zu (69) spiegelbildliche Ausgangslage:

(73) $[\![\textbf{küsst niemanden}]\!]$ ✓

$[\![\textbf{küsst}]\!]$ **?** $[\![\textbf{niemanden}]\!]$ ✓

Wenden wir auf (73) die Differenzbildung an, erhalten wir – wieder unter Auslassung der Details – die folgende alternative Analyse des Verbs:

---

68 Aus systematischen Gründen würde man jetzt erwarten, dass auch der *Nominativ* eine Bedeutung hat, aus der sich per Applikation auf $[\![\textbf{niemand}]\!]$ der in (70) genannte Quantor ergibt. Die folgende 'leere' Kasusbedeutung leistet dies: $[\![\textit{Nominativ}]\!] = \lambda Q.\ Q$; denn $\lambda Q.\ Q\ ([\![\textbf{niemand}]\!]) = [\![\textbf{niemand}]\!]$!

69 Analysen in diesem Stil waren um 1980 herum in der sog. *kategorialgrammatischen* Tradition populär, sind dann aber aus der Mode gekommen, weil sie sich mit vorherrschenden syntaktischen Auffassungen schlecht vertrugen.

(74) $[\![\textbf{küsst}]\!] = \lambda Q.\ \lambda x.\ Q(\lambda z.$ die Situationen, in denen z von x geküsst wird)

Auch bei dieser Vorgehensweise kombinieren sich Verbbedeutung und Quantor per Funktionalapplikation, aber diesmal ist die Objektbedeutung das Argument. Ähnlich wie eben bei letzterer stellt sich jetzt die Frage, wie die bisher angenommene Verbbedeutung (74') sich zu der in (74) verhält:

(74') $\lambda y.\ \lambda x.$ die Situationen, in denen y von x geküsst wird

Auch in diesem Fall könnte man prinzipiell von einem systematischen Prozess ausgehen, der gewöhnliche Verbbedeutungen wie in (74') zu komplizierteren Bedeutungen wie der in (74) ‘anhebt’. Allerdings lässt sich der Prozess nicht flexionsmorphologisch motivieren, sondern nur durch den Umstand, dass sich die Normalbedeutung (74') nicht einfach – also per Applikation – mit einem Quantor kombinieren lässt. Es ist also die syntaktische Umgebung, die diesen Prozess auslösen muss.[70] Wir werden auf diesen Prozess nicht weiter eingehen, sondern stattdessen eine Analyse betrachten, die Bedeutung (74) einzusetzen, ohne sie auf (74') zurückzuführen. Denn anders als bei der Revision *(c)* der Objektbedeutung gibt es für eine Verdoppelung der Verbbedeutung keinen zwingenden Grund: denn die einzige Konstruktion, die transitive Verben bisher eingingen, war die Anbindung von Eigennamen als Objekten; und die lässt sich auch bewerkstelligen, wenn man das transitive Verb im Stil von (74) deutet. Dazu muss man noch nicht einmal eine neue semantische Operation bemühen (könnte man aber); stattdessen kann man die Bedeutung der Eigennamen selbst einer Revision unterziehen. Unterstellen wir nach wie vor die Korrektheit unserer Analyse von Prädikaten, können wir die Namensbedeutung per Differenzbildung aus der Prädikation ziehen:

(75) $[\![\textbf{Olaf hat Husten}]\!]$
= die Situationen, in denen Olaf Husten hat

$[\![\textbf{Olaf}]\!]$ = **?**

$[\![\textbf{hat Husten}]\!]$ = $\lambda x.$ die Situationen, in denen x Husten hat

(75) mag paradox anmuten: hatten wir nicht die dort angegebene Bedeutung des Prädikats überhaupt erst auf Grundlage der Namensbedeutung per Differenzbildung gewonnen? Da können wir doch jetzt so nicht tun, als wüssten wir nicht, was der Name bedeutet. Wir können schon. Denn bei der Differenzmethode handelt es sich um eine Heuristik, die dazu dient, in Fällen, in denen unklar ist, was Ausdrücke eines bestimmten Typs (oder einer bestimmten Kategorie) bedeuten, eine Hypothese darüber aufzustellen, was die Bedeutungen dieser Ausdrücke sein könnten. Wenn sich diese Hypothese in der Anwendung auf verschiedene Konstruktionen als haltbar erweist, ist es letztlich gleichgültig, wie sie gewonnen wurde. In diesem Sinne sind alle Analysen offen für Revisionen, solange letztere zu einem stimmigen System der kompositionellen Bedeutungsbestimmung führen.

Die Details der Auflösung der Situation (75) verlagern wir in eine Übungsaufgabe. Das Ergebnis ist jedenfalls, dass $[\![\textbf{Olaf}]\!]$ ein Quantor ist, der sich mit Verbbedeutungen wie (74) direkt per Funktionalapplikation kombinieren lässt. Auf diese Weise kann die leicht barock wirkende lexikalische Gleichung (74) dazu dienen die komplizierte semantische Operation (56) zu umgehen; die Komplexität wird dann offensichtlich von der kompositionellen Deutung in die

70 In der Semantik bezeichnet man diese Art von Prozess als *Typenverschiebung* und die Strategie, sie von der syntaktischen Umgebung auslösen zu lassen, als *typengesteuerte Interpretation*. Den dafür zentralen Begriff des semantischen *Typs* lernen wir im nächsten Kapitel kennen.

lexikalische Semantik verlagert.[71]

Übungsaufgaben

A2 Zeigen Sie anhand der einschlägigen Definitionen, dass für jedes Prädikat V gilt:

$[\![V]\!] = \lambda x.$ die Situationen s, so dass $x \in ext_s$.

A3 Zeigen Sie, dass für beliebige Situationen, in denen *(a)* gilt, *(b)* und *(b')* auf dasselbe hinauslaufen:

$(a)\ |ext_s([\![\textbf{türkischeKursteilnehmerin}]\!])| = 1;$

$(b)\ ext_s([\![\textbf{türkischeKursteilnehmerin}]\!]) \cap ext_s([\![\textbf{sitzt in der 2. Reihe}]\!] \neq \emptyset$
$(b')\ ext_s([\![\textbf{türkischeKursteilnehmerin}]\!]) \subseteq ext_s([\![\textbf{sitzt in der 2. Reihe}]\!])$

A4 Zeigen Sie, dass die in diesem Kapitel erarbeitete Semantik der Quantifikation für den folgenden Satz ein korrektes Ergebnis liefert:

Kein Mann trifft jede Frau

A5 Versuchen Sie anhand von Tests zu entscheiden, ob der folgende Satz ambig ist:

Jeder Mann verehrt eine Schauspielerin.

A6 Welche Bedeutung ergibt sich für den Eigennamen **Olaf**, wenn man diese, ausgehend von der Situation (75) per Differenzbildung ermittelt?

71 Die Deutung (74) transitiver Verben und die dazugehörige Quantorensemantik der Eigennamen hat der amerikanische Semantiker Richard Montague um 1968 herum entwickelt.

4. Typen und indirekte Deutung

In diesem Kapitel werden wir eine Methode kennen lernen, die es ermöglicht, Bedeutungen systematisch darzustellen, und uns damit in den folgenden Kapiteln die Beschreibung komplexerer semantischer Operationen erleichtern wird: die *typenbasierte indirekte Deutung*. 'Indirekt' heißt dabei, dass die zu interpretierenden sprachlichen Ausdrücke und Konstruktionen systematisch in eine Kunstsprache, die sog. *Typenlogik*, übersetzt werden. Die Typenlogik ist eine aus der mathematischen Logik stammende Formelsprache, die sich in der Semantik als eine Art Hilfssprache etabliert hat.

4.1 Typen

Bevor wir zu den Formeln der Typenlogik kommen, führen wir eine Klassifikation sprachlicher Bedeutungen ein, auf der diese Formeln Bezug nehmen: die (*semantischen*) *Typen*. Im wesentlichen geht es darum, Bedeutungen nach ihrer Komplexität zu sortieren – also danach, ob es sich um einfache Individuen oder um verschachtelte Funktionen handelt, und wenn letzteres, welcher Art die Verschachtelung ist. Sehen wir uns zu-nächst an, welche Arten von Bedeutungen wir bisher kennen gelernt haben:

(1)

Art von Ausdruck	*Beispiel*	*Art von Bedeutung*
Satz	**Fritz schläft**	Proposition
Eigenname	**Fritz**	Individuum
intransitives Verb	**schläft**	Funktion von Individuen in Propositionen (= Prädikatsbedeutung)
transitives Verb	**küsst**	Funktion von Individuen in Prädikatsbedeutungen
ditransitives Verb	**übergibt**	Funktion von Individuen in Fuktionen von Individuen in Prädikatsbedeutungen
quantifizierende Nominalphrase	**kein Kind**	Quantor (= Funktion von Prädikatsbedeutungen in Propositionen)
Substantiv	**Kind**	Prädikatsbedeutung
Determinator	**kein**	Funktion von Prädikatsbedeutungen in Quantoren

Mit Ausnahme der ersten beiden Arten – Propositionen und Individuen – handelt es sich bei den Bedeutungen immer um Funktionen. Unter einer Funktion *von* As *in* Bs ist dabei natürlich eine solche zu verstehen, deren Argumente die As bilden und deren Funktionswerte Bs sind; dabei sind A und B auch wieder Arten von Bedeutungen oder, wie wir ab jetzt sagen werden: *Typen*. Um nun die obigen und weitere, noch einzuführende Typen systematisch zu erfassen, schreiben wir für den Bedeutungstyp 'Funktionen von A nach B' ab jetzt kürzer '(AB)' und kürzen die nicht-funktionalen (oder *primitiven*) Typen *Individuum* und *Proposition* mit 'e' bzw. 'π' ab.[72] Die Tabellle (1) lässt sich mit dieser Notation in (2) umschreiben (wobei wir die äußersten Klammern um die Typen weglassen):

[72] Das 'e' erinnert an *Entität* (engl. *entity*), was im philosophischen Jargon so viel heißt wie 'Gegenstand'. Diese Bezeichnung hat der in der vorangehenden Fußnote genannte Semantiker eingeführt.

(2)

Art von Ausdruck	*Beispiel*	*(semantischer) Typ*
Satz	**Fritz schläft**	π
Eigenname	**Fritz**	e
intransitives Verb	**schläft**	$e\pi$
transitives Verb	**küsst**	$e(e\pi)$
ditransitives Verb	**übergibt**	$e(e(e\pi))$
quantifizierende Nominalphrase	**kein Kind**	$(e\pi)\pi$
Substantiv	**Kind**	$e\pi$
Determinator	**kein**	$(e\pi)((e\pi)\pi)$

Die einzigen bisher betrachteten Bedeutungen, die sich nicht ohne weiteres in dieses Schema einpassen, sind die Interpretationen der koordinierenden Konjunktionen, die wir in Abschnitt 1.5 als Funktionen von Paaren von Propositionen in Propositionen analysiert hatten: *Paare* von Bedeutungen sind in der Typen-Notation nicht vorgesehen. Wir könnten dafür eine eigene Notation einführen. Stattdessen werden wir die Analyse der koordinierenden Kojunktionen so umformulieren, dass sie sich in das Schema (2) einfügen lässt. Abgesehen von einer gewissen Vereinheitlichung wird sich die Methode der Umformulierung im folgenden als sehr nützlich erweisen. Rekapitulieren wir zunächst die Analyse der Koordination aus Kapitel 1:

(3) *Lexikalische Semantik von Konjunktion und Disjunktion* [= (21) aus 1.5]
$[\![$**und**$]\!] = \cap$; $[\![$**oder**$]\!] = \cup$

(4) *Semantik der Satzkoordination* [= (22) aus 1.5]
Wenn S und S' (Aussage-) Sätze sind und K eine koordinierende Konjunktion ist, gilt:
$[\![S\ K\ S']\!] = [\![S]\!]\ [\![K]\!]\ [\![S']\!]$.

Nach dieser Analyse sind die Bedeutungen von **und** und **oder** Funktionen, die jeweils zwei Propositionen *auf einmal* als Argumente nehmen und ihnen dann als Wert wieder eine Proposition zuweisen. Diese Funktionen lassen sich in Tabellenform darstellen:

(5)

$[\![$**und**$]\!]$ =

(Weihnachten, Schnee)	wei˚e Weihnacht
(Weihnachten, Regen)	nasse Weihnacht
…	…
(p,q)	$p\cap q$
…	…

(6)

$[\![$**oder**$]\!]$ =

(Samstag, Sonntag)	Wochenende
(USA, Kanada)	Nordamerika
…	…
(p,q)	$p \cup q$
…	…

In (5) und (6) haben wir der Kürze halber Mengen von Situationen mit entsprechenden Substantiven gekennzeichnet: 'Regen' steht also für die Menge der möglichen Situationen, in denen es regnet, 'USA' für die Situationen, die sich in den USA abspielen etc. *Paare* von Propositionen p und q – als Argumente der Konjunktionsbedeutungen – haben wir in runde Klammern (p,q) gesetzt.

Wenn man nun keine Paare von Propositionen als Argumente von Funktionen zulassen möchte, muss man die *simultane* Anwendung durch eine *sukzessive* Anwendung ersetzen.[73] Dementsprechend ist die Bedeutung der Konjunktion so zu modifizieren, dass sie zunächst das erste und dann das zweite Argument nehmen kann, womit das Ergebnis der ersten Anwendung selbst wieder eine Funktion sein muss – eine Verschachtelung, wie wir sie schon bei der Analyse transitiver Verben kennen gelernt haben. Die Bedeutung von **und** sähe nach dieser Idee so aus:

(7)

$[\![$**und**$]\!]$ =

<table>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>Weihnachten</td><td><table>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>Schnee</td><td>wei˚e Weihnacht</td></tr>
<tr><td>Regen</td><td>nasse Weihnacht</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>q</td><td>Weihnachten $\cap q$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Ostern</td><td><table>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>Schnee</td><td>wei˚e Ostern</td></tr>
<tr><td>Regen</td><td>nasse Ostern</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>q</td><td>Ostern $\cap q$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>(p,q)</td><td><table>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>Schnee</td><td>$p \cap$ Schnee</td></tr>
<tr><td>Regen</td><td>$p \cap$ Regen</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>q</td><td>$p \cap q$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>

(Auf die entsprechende tabellarische Darstellung von $[\![$**oder**$]\!]$ verzichten wir aus Platzgrün-

[73] Das allgemeine Verfahren wird in der Literatur als *Schönfinkeln* (nach dem russischen Mathematiker Moses Schönfinkel [1889 – ca. 1942)]) oder *Currying* (nach dem amerikanischen Mathermatiker Haskell Curry [1900 – 1982]) bezeichnet.

den.) (7) lässt sich wieder auf gewohnte Weise mit einem λ-Term abkürzen:

(8) $[\![\textbf{und}]\!] = \lambda p.\ \lambda q.\ p \cap q$

Und für die Disjunktion ergibt sich entsprechend:

(9) $[\![\textbf{oder}]\!] = \lambda p.\ \lambda q.\ p \cup q$

Für die Bedeutungen in (8) und (9) lässt sich jetzt zwar ein semantischer Typ im Stil von Tabelle (2) angeben, aber die Kompositionsregel (4) funktioniert natürlich nicht mehr; denn was dort rechts vom Gleichheitszeichen steht ('$[\![S]\!]\ [\![K]\!]\ [\![S']\!]$'), setzt ja voraus, das die Konjunktionsbedeutung simultan auf zwei Argumente angewandt werden kann. Doch lässt sich (4) leicht an die in (8) und (9) gegebenen Bedeutungen anpassen, wie in einer Übungsaufgabe gezeigt wird.

Fassen wir zusammen. Bedeutungen lassen sich nach ihrem semantischen Typ klassifizieren. Dabei gibt es zwei Arten von Typen: *primitive* und *funktionale* Typen. Die primitiven Typen sind (bis auf weiteres) der Typ e der Individuen und der Typ π der Propositionen. Funktionale Typen haben die Gestalt (ab), wobei a und b selbst wieder (primitive oder funktionale) Typen sind; die Bedeutungen eines funktionalen Typs (ab) sind die Funktionen, deren Argumente Bedeutungen des Typs a und deren Werte Bedeutungen vom Typ b sind.

4.2 Typenlogische Formeln

Wie die Bedeutungen teilen sich auch die Formeln der Typenlogik in Typen ein, wobei der Typ der Formel angibt, von welchem Typ die Bedeutung ist, die sie bezeichnet. Formeln des Typs e bezeichnen also Individuen; Formeln des Typs $(e\pi)$ stehen für Prädikatsbedeutungen; usw. Dementsprechend werden bei der indirekten Deutung Eigennamen in Formeln des Typs e übersetzt, intransitive Verben in Formeln des Typs $(e\pi)$; etc. Die Übersetzungen komplexer Ausdrücke setzen sich dabei aus den Übersetzungen ihrer unmittelbaren Teile zusammen – was (wie wir noch sehen werden) garantiert, dass das Kompositionalitätsprinzip im Rahmen der indirekten Deutung quasi automatisch erfüllt wird. Ein Satz wie (10) wird zum Beispiel übersetzt, indem man nach einer festen Regel aus der Übersetzung des Subjekts **Fritz** und der des Prädikats **schläft** eine neue Formel konstruiert:

(10) **Fritz schläft.**

Beide Teile sind lexikalische Ausdrücke, die sich syntaktisch sich nicht weiter zerlegen lassen. Ihre Übersetzungen werden – ganz wie die entsprechenden Bedeutungen – durch *lexikalische Gleichungen* angegeben. Für Subjekt und Prädikat von (10) hatten wir die folgenden lexikalischen Bedeutungen angesetzt:

(11a) $[\![\textbf{Fritz}]\!]$ = Fritz [= (16b) aus 2.4]]

(b) $[\![\textbf{schläft}]\!] = \lambda x.$ die Situationen, in denen x schläft [= (3') aus 3.1]]

Die meisten lexikalischen Bedeutungen (aber nicht alle!) werden in der Typenlogik durch einfache (fett gedruckte) Buchstaben abgekürzt, die an das zu interpretierende Wort erinnern: **f** für Fritz und **S** für die Bedeutung des Verbs **schläft**. Solche unzusammengesetzten Formeln nennt man *Konstanten*. Obwohl es sich bei beiden genannten Formeln um Konstanten handelt, gibt es einen wichtigen Unterschied zwischen ihnen: den im Typ. Denn während die Konstante **f** für ein Individuum steht, bezeichnet **S** eine Prädikatsbedeutung. Konstanten können also verschiedene Typen haben: **f** ist eine Konstante des Typs e, **S** ist vom Typ $(e\pi)$. Bei der indirekten Deutung geht man davon aus, dass die Sprache der Typenlogik für jeden Typ genügend Konstanten enthält, die in der Regel (aber nicht immer!) als Übersetzungen lexikalischer Ausdrücke dienen. Wie viele es sind und wie sie genau aussehen, kann dabei weitgehend offen bleiben – solange sich zwei Konstanten verschiedenen Typs immer von einander unterscheiden. Eine Konstante ist also immer nur von *einem* Typ; das wird für alle typenlogischen Formeln gelten.

Auf den Vorgang der indirekten Deutung werden wir in Abschnitt 4.5 detailliert eingehen. Aber schon jetzt kann man sich überlegen, dass die Formelsprache der intensionalen Typenlogik über die Möglichkeit verfügen muss, die Übersetzungen der beiden Teile von (10) miteinander zu einer größeren Formel zu kombinieren. Das geschieht vermittels der folgenden Konstruktionsregel:

(App) Wenn α eine (typenlogische) Formel eines Typs (ab) ist und β eine Formel des Typs a, dann ist $\alpha(\beta)$ eine Formel des Typs b.

$\alpha(\beta)$ ist dabei die Formel, die sich ergibt, wenn man die Formel β mit (fett gedruckten) runden Klammern umgibt und vor das Ganze die Formel α schreibt; a und b sind beliebige Typen, die komplex sein können, aber nicht müssen; und α und β sind beliebige Ausdrücke, die ihrerseits wieder komplex sein können, aber nicht müssen. Insbesondere lässt sich *(App)* also auf die Konstanten **S** [für α] und **f** [für β] anwenden, die ja Ausdrücke des Typs $(e\pi)$ [= (ab)] bzw. e [= a] sind. Die Regel besagt für diesen Fall, dass die folgende Formel vom Typ π ist:

(12) **S(f)**

Die Bezeichnung '*(App)*' soll natürlich an [*Funktional-*] *Applikation* erinnern, denn in diesem Sinn sollen die nach dieser Regel kombinierten Formeln zu verstehen sein. Streng genommen betrifft *(App)* allerdings nur die *Bildung* typenlogischer Formeln und weder ihre Interpretation noch ihren Einsatz in der indirekten Deutung. Es ist zwar klar, dass eine Formel wie (12) für die Menge der Situationen steht, in denen Fritz schläft – und Formeln der Gestalt $\alpha(\beta)$ im allgemeinen für den Wert der durch α bezeichneten Funktion für das durch β bezeichnete Argument; aber das folgt nicht aus *(App)*, sondern erst aus der im folgenden Abschnitt anzugebenden *Deutung* der typenlogischen Formeln. Ebenso ist zwar klar, dass bei der typenlogischen Übersetzung von Sätzen wie (10) die Übersetzungen der Bestandteile per *(App)* kombiniert werden; aber auch das folgt nicht aus *(App)*, sondern ergibt sich erst aus der im Rahmen der indirekten Deutung in Abschnitt 4.5 gegebenen *Übersetzung* der natürlichen Sprache in die Typenlogik.

Die mit *(App)* aus Konstanten gebildeten Formeln reichen für die indirekte Deutung vieler Konstruktionen aus – wie z.B. der Objekt-Anbindung in (13):

(13) **trifft Fritz**

Wenn eine lexikalische Regel sichert, dass **trifft** durch eine Konstante des Typs $e(e\pi)$ übersetzt wird, dann lassen sich die Übersetzungen von Verb und Objekt in (13) wieder mit *(App)* kombinieren. Der gesamte Satz (14) lässt sich dementsprechend mit (15) in die Typenlogik übersetzen (wobei wir unterstellen, dass **e** die Übersetzung des Namens **Eike** ist):

(14) **Eike trifft Fritz.**
(15) $\underline{\mathbf{S(f)}}\mathbf{(e)}$

Der unterstrichene Teil in (15) ist die Übersetzung des Prädikats, die durch Anwendung von *(App)* auf **T** [für α] und **f** [für β] entsteht; und die gesamte Formel (15) erhält man, wenn man die unterstrichene Prädikatsübersetzung wie schon in (12) per *(App)* mit der Übersetzung des Subjekts kombiniert. Der Aufbau der Formel (15) lässt sich mit einem Baumdiagramm veranschaulichen:

(15') **T(f)(e)**
π

T(f) $e\pi$ — **e** e

T $e(e\pi)$ — **f** e

Die untere Zeile gibt jeweils den Typ der Formel in der oberen Zeile an. Der Baum verdeutlicht, dass *(App)* in dem Sinne eine *Kürzungsregel* ist, als der Typ einer nach dieser Regel gebildeten Formel immer kürzer ist als der der linken Teilformel.[74]

Als Mittel zum Ausdruck von Bedeutungskombinationen stößt die Regel *(App)* genau dort auf ihre Grenzen, wo auch schon die direkte Deutung mit Funktionalapplikation nicht weiter kam. In Abschnitt 3.4 haben wir gesehen, dass dies bei der Anbindung *quantifizierender Objekte* der Fall war. Nach der dafür einschlägigen Bedeutungskombination ermittelt sich die Bedeutung des Prädikats von (16) wie in (17):

(16) **Eike trifft niemanden.**
(17) $[\![\textbf{trifft niemanden}]\!] = \lambda x.\ [\![\textbf{niemand}]\!](\lambda z.\ [\![\textbf{trifft}]\!](z)(x))$

Um diese Kombination durch eine typentheoretische Formel auszudrücken, benötigt man neben der Möglichkeit *(App)*, Funktionswerte zu benennen, offenbar auch noch eine Möglichkeit, Funktionen per Abstraktion zu definieren. Genau diese bietet die zweite Konstruktionsregel:[75]

(Abs) Wenn $\boldsymbol{x}$ eine Variable eines Typs a ist und α eine Formel des Typs b, dann ist $(\boldsymbol{\lambda x.}\ \alpha)$ eine Formel des Typs (ab).

Die Formel $(\boldsymbol{\lambda x.}\ \alpha)$ entsteht, indem man die Variable $\boldsymbol{x}$ von einem (fett gedruckten) λ und einem (fett gedruckten) Punkt umschließt, darauf die Formel α folgen lässt und das Ganze (fett) einklammert; a und b sind wieder beliebige Typen; α ist ein beliebiger Ausdruck, der komplex sein kann, aber nicht muss. Die Regel *(Abs)* setzt voraus, dass es in der typenlogischen Sprache Variablen gibt, die wie die Konstanten Grundausdrücke sind. Auch für Variablen gilt, dass sie jeweils Ausdrücke eines – und nur eines – Typen sind. Aber im Unterschied zu den Konstanten nehmen wir es im Fall der Variablen mit ihrer Anzahl genauer und setzen voraus, dass es *für jeden Typ unendlich viele Variablen* dieses Typs gibt.[76] Diese Voraussetzung wird in der Anwendung der Typenlogik wichtig werden.

74 Die Analogie zur arithmetischen Kürzung könnte man noch weiter treiben, wenn man Typen (ab) als $\frac{b}{a}$ notieren würde. *(FA)* kombiniert dann $\frac{b}{a}$ und a zu b – analog zur Multiplikation $\frac{b}{a} \cdot a = b$.

75 Um sie von den in der Metasprache benutzten Variablen zu unterscheiden, beziehen wir uns auf Variablen der Typenlogik immer mit fett und kursiv gesetzten lateinischen Buchstaben. Man beachte, dass diese Buchstaben nicht selbst die Variablen sind, sondern metasprachliche Variablen für sie: in *(Abs)* steht ja '$\boldsymbol{x}$' nicht für eine bestimmte typenlogische Variable, sondern für *beliebige* Variablen eines ebenso beliebigen Typs a. Wie die Variablen 'wirklich' aussehen, bleibt dabei offen. Im Bezug auf typenlogische Variablen verfolgen wir die übliche, wenn auch nicht immer explizit gemachte Konvention, dass – solange nichts Gegenteiliges gesagt wird – innerhalb einer Formel (wie $\mathbf{T}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})$) verschiedene Variablennamen ($\boldsymbol{x}$ vs. $\boldsymbol{y}$) für verschiedene Variablen (wie immer sie aussehen) stehen; das schließt nicht aus, dass sich verschiedene Variablen auf ein und dasselbe Objekt (z.B. Fritz) beziehen.

76 Anmerkung für HobbymathematikerInnen: 'Unendlich viele' ist keine genaue Angabe. Vielmehr unterscheidet man in der Mathematik verschiedene Größenordnungen der Unendlichkeit. Für Variablen nimmt man gemeinhin an, dass es (pro Typ und insgesamt) *abzählbar* viele von ihnen gibt – was innerhalb des Unendlichen relativ wenig ist. (Zum Vergleich: die natürliche Zahlen sind abzählbar, die reellen Zahlen nicht.)

Nach *(Abs)* und *(App)* sind die Ausdrücke (18) – (20) typenlogische Formeln; dabei haben wir die Konvention befolgt, dass eine Variable ihren Typ als Index mit sich führt, wenn sie das erste Mal in der Formel erscheint:

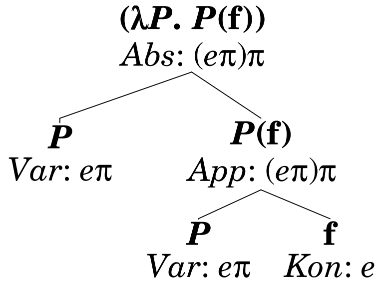
(18) $(\lambda \boldsymbol{P}_{e\pi}.\ \boldsymbol{P}(\mathbf{f}))$

(19) $(\lambda \boldsymbol{x}_{e}.\ \mathbf{T}(\mathbf{f})(\boldsymbol{x}))$

(20) $(\lambda \boldsymbol{p}_{\pi}.\ (\lambda \boldsymbol{q}_{\pi}.\ (\lambda \boldsymbol{R}_{\pi(\pi\pi)}.\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{q}))))$

Die Formel (18) ist z.B. vom Typ $(e\pi)\pi$; denn nach *(App)* ist $\boldsymbol{P}(\mathbf{f})$ vom Typ π. Die Struktur der Formel lässt sich wieder in Baumform darstellen:

(18')



Der Baum gibt jetzt auch noch an, nach welcher Konstruktionsregel die einzelnen Teilformeln zusammengesetzt sind; diese Information geht jeweils dem Typ voran. Die zweite Zeile des obersten Knotens besagt also: nach *(Abs)* ist die Formel in der darüber stehenden Zeile vom Typ $(e\pi)\pi$. Bei unzusammengesetzten Formeln wird anstelle der Konstruktionsregel angegeben, um welche Art von Formel – Variable oder Konstante – es sich handelt. Nach dem Vorbild von (18') kann nun jede(r) die Typen der Formeln (19) und (20) in einer Übungsaufgabe selbst bestimmen.

(App) und *(Abs)* sind die einzigen Konstruktionsregeln der Typenlogik: alle Formeln werden aus Konstanten und Variablen mit Hilfe dieser beiden Operationen zusammen gesetzt. Damit ergibt sich die folgende:

(21) *Syntax der Typenlogik*
Für alle Typen a und b gilt:
(Var) Variablen des Typs a sind Formeln des Typs a.
(Kon) Konstanten des Typs a sind Formeln des Typs a.
(App) Wenn α eine (typenlogische) Formel eines Typs (ab) ist und β eine Formel des Typs a, dann ist $\alpha(\beta)$ eine Formel des Typs b.
(Abs) Wenn $\boldsymbol{x}$ eine Variable eines Typs a ist und β eine Formel des Typs b, dann ist $(\lambda \boldsymbol{x}.\ \beta)$ eine Formel des Typs (ab).

(21) ist so zu verstehen, dass etwas nur dann als typenlogische Formel eines Typs a gilt, wenn es nach einer dieser Regeln hergeleitet wurde. Mit (21) ist die Definition der typenlogischen Formeln eigentlich abgeschlossen. Doch bevor wir zu ihrer Deutung kommen – denn (21) gibt ja nur an, wie die Formeln aufgebaut sind, nicht wofür sie stehen – führen wir noch vier sog. *logische* Konstanten ein, die eine zentrale Rolle in der Praxis der indirekten Deutung spielen werden, weil sie bestimmten *Rechengesetzen* unterliegen, die eine quasi mechanische Reduktion langer und unübersichtlicher Formeln gestatten werden.

Die erste logische Konstante ist ein spezielles Symbol für die Satz-Konjunktion (im semantischen Sinn), die sich, wie wir im vorangehenden Abschnitt gesehen haben, durch eine Funktion des Typs $\pi(\pi\pi)$ simulieren lässt. In der Typenlogik wird diese Funktion durch eine Konstante des Typs $\pi(\pi\pi)$ bezeichnet, für die wir das aus der Aussagenlogik stammenden Symbol $\wedge$

verwenden.[77] In Analogie zur natürlichen Sprache setzt man dieses Symbol zwischen die konjugierten Formeln; wenn also φ und ψ Formeln des Typs π sind, schreiben wir $[\varphi \wedge \psi]$ statt $\wedge (\varphi) (\psi)$ und lesen die Formel 'φ und ψ'.

Die Konstante $\wedge$ wird nicht nur für die Deutung des Wortes **und** benötigt, sie spielt überhaupt eine wichtige Rolle in der indirekten Deutung und in der Typenlogik im allgemeinen. So bildet sie den Kern der Semantik der in Kapitel 6 betrachteten Modifikations-Konstruktionen (Relativsätze, Adjektive) und kommt bereits in diesem Kapitel in mehreren lexikalischen Gleichungen zum Einsatz – wie z.B. bei der Übersetzung des indefiniten Artikels, den wir im vorangehenden Kapitel wie folgt analysiert hatten:

(22) $[\![\textbf{ein-}_{indef}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s(Q) \cap ext_s(P) \neq \varnothing$ [= (22) aus 3.2]

Die Konjunktion $\wedge$ wird uns – gemeinsam mit einer weiteren Konstanten – helfen, die rechts vom Gleichheitszeichen in (22) angegebene Bedeutung typenlogisch darzustellen. Um zu sehen, wie das geht, formulieren wir die Gleichung zunächst etwas um:

(22') $[\![\textbf{ein-}_{indef}]\!] = \lambda Q.\ \lambda P.$ die Situationen s, so dass $ext_s(\lambda x\ Q(x) \cap P(x)) \neq \varnothing$

Dass (22') dasselbe besagt wie (22), liegt daran, dass der Schnitt der Extensionen von P und Q dieselben Elemente enthält wie die Extension der Prädikatsbedeutung $\lambda x\ Q(x) \cap P(x)$; denn wenn irgendein y in der einen Menge ist, muss es auch in der anderen Menge sein, wie der folgende kleine Beweis zeigt:[78]

(23)	$y \in ext_s(Q) \cap ext_s(P)$	
gdw.	$y \in ext_s(Q)$ und $y \in ext_s(P)$	Def. $\cap$
gdw.	$s \in Q(y)$ und $s \in P(y)$	Def. *ext*
gdw.	$s \in Q(y) \cap P(y)$	Def. $\cap$
gdw.	$s \in [\lambda x.\ Q(x) \cap P(x)]\ (y)$	λ-Kv.
gdw.	$y \in ext_s(\lambda x.\ Q(x) \cap P(x))$	Def. *ext*

Um nun die rechte Seite von (22') in der Typenlogik auszudrücken, verwendet man eine Konstante von Typ $(e\pi)\pi$, die zum Ausdruck bringt, dass die Extension einer (als Argument) gegebenen Prädikatsbedeutung nicht leer ist. Aus der Prädikatenlogik übernehmen wir für diese Konstante das Symbol $\exists$ und bezeichnen sie als *Existenzquantor*.[79] In Anlehnung an die dort übliche Notation lassen wir das Lambda-Präfix weg und klammern um, wenn $\exists$ mit einem (typenlogischen) Lambda-Term kombiniert wird: wenn φ eine Formel des Typs π ist, schreiben wir $\boldsymbol{(\exists x)}\ \varphi$ für $\exists\boldsymbol{(\lambda x.}\ \varphi\boldsymbol{)}$ und lesen 'es gibt ein x, so dass φ gilt'.

Obwohl wir die indirekte Deutung der Determinatoren ausführlich und im Zusammenhang einführen werden, nachdem wir die Deutung der typenlogischen Formeln kennen gelernt haben, geben wir hier schon einmal die Übersetzung des indefiniten Artikels an:

(24) $\boldsymbol{(\lambda Q_{e\pi}.\ (\lambda P_{e\pi}.\ (\exists x)\ [Q(x) \wedge P(x)]))}$

Expandiert man (24) im Sinne der Abkürzungskonventionen für Konjunktion und Existenz-

77 Die Aussagenlogik ist der Bereich der formalen Logik, der die Zusammenhänge zwischen der Konjunktion und der sogleich einzuführenden Negation betrifft.

78 'gdw.' ist eine gängige und ab jetzt öfters gebrauchte Abkürzung für 'genau dann, wenn' – was heißt, dass das Eine gilt, wenn das Andere gilt, und umgekehrt.

79 Die Prädikatenlogik (die auf Freges *Begriffsschrift* aus dem Jahre 1879 zurückgeht) ist der Kernbereich der formalen Logik; sie umfasst die in Fn. 77 genannte Aussagenlogik, ist aber weniger ausdrucksstark und flexibel als die Typenlogik.

quantor, kann man leicht zeigen (Übungsaufgabe), dass es sich dabei um eine Formel des Typs $(e\pi)((e\pi)\pi)$ handelt.

Die dritte logische Konstante ist die aussagenlogische *Negation*, die als **¬** symbolisiert wird. Die Negation ist vom Typ ππ und dient dazu, eine Proposition in ihr Gegenteil zu verkehren: wenn φ eine Formel des Typs π ist, steht **¬ (**φ**)** für die möglichen Situationen, die nicht in der durch φ benannten Proposition sind. Wie in der Aussagenlogik lassen wir die Klammern um das Argument von **¬** für gewöhnlich weg und schreiben statt **¬ (**φ**)** auch **¬** φ, was als ‘es ist nicht der Fall, dass φ’ gelesen werden kann. Mit dieser Konvention sieht die typenlogische Übersetzung des Determinators **kein-** folgendermaßen aus:

(25) $\boldsymbol{(\lambda Q_{e\pi}.\ (\lambda P_{e\pi}.\ \neg\ (\exists x)\ [Q(x) \wedge P(x)]))}$

Die vierte und letzte logische Konstante werden wir hier nicht eigens motivieren; ihre Interpretation bereitet keinerlei Schwierigkeiten, und wir werden später ihren Nutzen für die indirekte Deutung kennen lernen. Es handelt sich um die *Identität* zwischen Individuen, einer Konstanten vom Typ $e(e\pi)$, die wir mit einem fetten Gleichheitszeichen notieren, das wir für gewöhnlich zwischen die Terme schreiben und einklammern: (α **=** β) steht also für **=**(α)(β), wenn α und β vom Typ *e* sind.

Die Konstruktionsregeln (21) und die logischen Konstanten ∧, ∃, **¬** und **=** (samt ihren Typen und den Notationskonventionen) machen die syntaktische Seite der Typenlogik aus, d.h. die Definition der typenlogischen Formeln. Jetzt geht es an die Interpretation dieser Formeln.

4.3 Die Deutung der Typenlogik

Wir haben zwar schon gesehen, wie die typenlogischen Formeln zu verstehen sind, doch eine *systematische* Deutung steht noch aus. Ganz wie bei der (direkten) Deutung der natürlichen Sprache werden wir dabei kompositionell vorgehen: für jede unzusammengesetzte Formel geben wir eine lexikalische Gleichung an, die sagt, was ihre Bedeutung ist; und für jede syntaktische Konstruktion geben wir an, wie sich die Bedeutung einer nach dieser Konstruktion gebildeten Formel aus den Bedeutungen ihrer unmittelbaren Teilformeln bestimmt.

Es gibt zwei Arten von unzusammengesetzten Formeln in der Typenlogik: Variablen und Konstanten. Die Deutung der Konstanten ist, wie wir gleich sehen werden, eine verhältnismäßig einfache Angelegenheit. Die Variablen dagegen bereiten ernsthafte Schwierigkeiten für eine kompositionelle Deutung. Grob gesprochen ist das Problem, dass eine Variable für sich genommen gar keine feste Bedeutung hat. Aber im Zusammenhang einer komplexen Formel kann eine Variable durchaus zu deren Bedeutung beitragen. Eine Formel der Gestalt $\lambda\boldsymbol{x}.$ … bezeichnet eine Funktion, die *beliebigen* Objekte eines bestimmten Typs irgendwelche Werte zuordnet – aber was sind dabei *beliebige* Objekte? Wie man in (25) sieht, kann $\boldsymbol{\neg\ (\exists x)\ [Q(x) \wedge \neg\ P(x)]}$ zum Ausdruck bringen, <u>dass die Extensionen</u> (von irgendwelchen durch $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ gegebenen Prädikatsbedeutungen) <u>disjunkt sind</u>, aber worauf bezieht sich dabei das $\boldsymbol{x}$? Auf beliebige Objekte im Schnitt der genannten Extensionen – also auf nichts (wenn sie wirklich disjunkt sind)? Worauf immer sich das $\boldsymbol{x}$ beziehen mag: es scheint also für die mit der Formel gemachte (Disjunktheits-) Aussage letztlich entbehrlich zu sein; denn in der unterstrichenen Formulierung kommt man ohne Bezugnahme auf diese ‘beliebigen’ Objekte aus.

Die Probleme mit der Funktion von Variablen und ihrer kompositionellen Deutung weisen weit über die Typenlogik hinaus und sind ohne einen gewissen Aufwand nicht lösbar. Die Lösung, der wir uns hier anschließen werden, basiert auf der Idee, dass eine Variable simultan für alle Objekte ihres Typs steht.[80] Eine Variable $\boldsymbol{x}$ des Typs *e* kann sich danach auf jedes

Individuum beziehen, d.h. jedes Individuum kann semantischer Wert von $\boldsymbol{x}$ sein; ebenso kann jede Prädikatsbedeutung Wert einer Variablen $\boldsymbol{P}$ des Typs $e\pi$ sein. Variablen haben danach mehr als einen semantischen Wert. Dasselbe gilt für komplexe Formeln, in denen Variablen vorkommen:

(26) $\boldsymbol{P(x)}$

Die Formel (26) kann sich auf jede Proposition beziehen, die sich ergibt, wenn man den – beliebigen – semantischen Wert von $\boldsymbol{P}$ auf den – beliebigen – semantischen Wert von $\boldsymbol{x}$ anwendet.[81] Wenn also (Fall 1) $\boldsymbol{P}$ für die Prädikatsbedeutung P_1 steht und $\boldsymbol{x}$ für das Individuum x_1, dann steht (26) für $P_1(x_1)$; stehen dagegen (Fall 2) $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{x}$ für P_2 bzw. x_2, ist $P_2(x_2)$ der semantische Wert von (26); aber $\boldsymbol{P}$ kann ebensogut (Fall 3) für P_1 stehen, während $\boldsymbol{x}$ für x_2 steht, womit der semantische Wert von (26) natürlich $P_2(x_2)$ wäre; etc. pp. Die Fälle, von denen es abhängt, wofür die einzelnen Variablen stehen können, bezeichnet man in der logischen Semantik als *Variablenbelegungen* oder einfach *Belegungen* (engl. [*variable*] *assignments*). Da eine Belegung für jede Variable jedes Typs sagt, worauf sie sich bezieht, kann man sie als eine Funktion verstehen, die Variablen ihre semantischen Werte zuordnet:

(27) *Definition*
Eine *Belegung* ist eine Funktion g, deren Argumente die Variablen sind und für die gilt: wenn $\boldsymbol{x}$ eine Variable eines Typs a ist, dann ist $g(\boldsymbol{x})$ ein Objekt des Typs a.

Die Fälle 1 – 3 entsprechen demnach jeweils ganz vielen Belegungen: Fall 1 liegt z. B. mit jeder Belegung g vor, nach der $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{x}$ die semantischen Werte P_1 und x_1 haben, d.h. sobald $g(\boldsymbol{P}) = P_1$ und $g(\boldsymbol{x}) = x_1$, egal welchen Wert g den anderen Variablen zuweist.

Wie die Betrachtung zu (26) gezeigt hat, genügt es nicht, nur für Variablen anzunehmen, dass sie mehrere semantische Werte haben; auch der Wert eines komplexen Ausdrucks kann von einer Belegung abhängen. In der Semantik der Typenlogik muss man also jedem Ausdruck α nicht nur *einen* semantischen Wert zuordnen, sondern einen Wert $[\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^g$ für jede Belegung g. Liegt etwa Fall 2 vor – d.h.: haben wir es mit einer Belegung h zu tun, bei der $h(\boldsymbol{P}) = P_2$ und $h(\boldsymbol{x}) = x_2$ –, dann ermittelt sich der Wert von (26) so: $[\![\boldsymbol{P(x)}]\!]^h = P_2(x_2)$. Allgemein gesprochen müssen wir also bei der Bestimmung der Bedeutung typenlogischer Formeln für jede Belegung g angeben, was der semantische Wert *bei der Belegung g* ist. Anders als bei der direkten Deutung der natürlichen Sprache in den voran gehenden Kapiteln werden wir also für die Typenlogik eine ganze 'Familie' semantischer Werte kompositionell definieren; und diese Familie von Werten macht dann die eigentliche Bedeutung der Formel aus. Dennoch werden in der Praxis nur die einzelnen Werte eine Rolle spielen. Warum das so ist, werden wir gleich sehen.

Nach diesen grundsätzlichen Erläuterungen zur Architektur der Deutung typenlogischer Formeln erklären sich die lexikalischen Gleichungen für Variablen von selbst:

(28) *Deutung der Variablen (Var)*
Wenn g eine Belegung ist und $\boldsymbol{x}$ eine Variable, dann gilt:
$[\![\boldsymbol{x}]\!]^g = g(\boldsymbol{x})$.

---

80 Diese Methode der Deutung von Variablen – die sog. *Belegungssemantik* – geht auf den polnisch-amerikanischen Logiker Alfred Tarski (1901–1983) zurück und ist in der logischen Semantik sehr beliebt.

81 Wir setzen bei dieser Betrachtung voraus, dass die Konstruktion *(App)* im Sinne der Funktionalapplikation gedeutet wird – wie wir es gleich festlegen werden.

Kommen wir nun zu den Konstanten. Da wir offen gelassen haben, wie viele und welche Konstanten es genau gibt, müssen wir auch ihre Deutung weitgehend offen lassen. Die meisten Konstanten werden wir im Rahmen der indirekten Deutung bei Bedarf einführen und dann an Ort und Stelle interpretieren. Allerdings gibt es zwei Einschränkungen, denen die dann anzugebenden lexikalischen Gleichungen genügen müssen. Zum einen hat jede Konstante einen (und nur einen) Typ, der den Typ der Bedeutung dieser Konstanten festlegt; das ist analog zu der in (27) gegebenen Beschränkung für Variablenbelegungen. Zum anderen hängt der semantische Wert einer Konstanten natürlich nicht von den semantischen Werten irgendwelcher Variablen ab; bei zwei verschiedenen Belegungen erhält die Konstante m.a.W. denselben Wert. Wir halten diese Einschränkungen fest als:

(29) *Konstantenprinzipien (Kon)*

(i) Wenn g eine Belegung und **c** eine Konstante eines Typs a ist, dann gilt:
$[\![\mathbf{c}]\!]^{g}$ ist ein Objekt des Typs a.

(ii) Wenn g und h Belegungen sind und **c** eine Konstante (irgendeines Typs), dann ist
$[\![\mathbf{c}]\!]^{g} = [\![\mathbf{c}]\!]^{h}$.

Lexikalische Gleichungen müssen im folgenden stets den Prinzipien in (29) genügen. Zur Illustration geben wir ein beliebig gewähltes Beispiel:

(30) Wenn g eine Belegung ist, ist $[\![\mathbf{f}]\!]^{g}$ = Fritz.

Unter der (syntaktischen) Voraussetzung, dass es sich bei **f** um eine Konstante des Typs e handelt, erfüllt (3) die Bedingung (29i); denn Fritz ist ein Individuum. Auch in den später anzugebenden Gleichungen wird (29i) stets erfüllt sein, ohne dass wir eigens darauf hinweisen. (29ii) gilt ebenfalls; denn (30) ist so zu verstehen, dass die Gleichung für alle Belegungen g gilt.

Setzt man (29ii) voraus, ist der Index an den semantischen Klammern in den lexikalischen Gleichungen für Konstanten redundant und wird deswegen in Zukunft weggelassen. (30) kann man nach dieser Konvention umschreiben in:

(30') $[\![\mathbf{f}]\!]$ = Fritz

Abgesehen von diesem illustrativen Beispiel sind die einzigen spezifischen lexikalischen Gleichungen für Konstanten diejenigen für die vier logischen Konstanten, die wie folgt lauten:

(31) $[\![\wedge]\!] = \lambda p.\ \lambda q.\ p \cap q$

(32) $[\![\exists]\!] = \lambda P.$ die Menge der Situationen s, so dass gilt: $ext_s(P) \neq$ È

(33) $[\![\neg]\!] = \lambda p.$ die Menge der Situationen s, so dass gilt: $s \notin p$

(34) $[\![=]\!] = \lambda x.\ \lambda y.$ die Menge der Situationen, so dass gilt: $x = y$

In (31) – (34) haben wir von der obigen Konvention Gebrauch gemacht und die Belegungs-Indizes weggelassen; es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass dies deshalb geht, weil es sich um Konstanten handelt, für deren Bewertung die Belegung keine Rolle spielt.

Rechts von den Gleichheitszeichen in (31) – (34) stehen jeweils Lamda-Terme. Diese Terme sind keine typenlogischen Formeln, sondern Abkürzungen für Beschreibungen von Funktionen, wie wir sie auch schon in den voran gehenden Kapiteln verwendet haben. Auch die in (31) – (34) benutzten Variablen sind keine typenlogischen Variablen, sondern Variablen der Metasprache, die für beliebige Propositionen (‘p’, ‘q’), Prädikatsbedeutungen (‘P’) bzw. Individuen (‘x’, ‘y’) stehen. Dass diese Meta-Variablen für Objekte der Typen π, $e\pi$ bzw. e stehen, geht aus diesen Gleichungen nicht explizit hervor, folgt aber aus dem Konstantenprinzip (29i). Danach muss z.B. $[\![\wedge]\!]$ eine Funktion des Typs $\pi\pi$ sein und somit als Propositionen Argumente nehmen; und da die Variable 'p' nach dem Lambda sich auf die Argumente von $[\![\wedge]\!]$ bezieht, kann sie nur für Propositionen stehen. Umständlicher, aber eindeutiger hätten wir die Gleichungen so formulieren können:

(31') $[\![\wedge]\!]$ = diejenige Funktion des Typs $\pi(\pi\pi)$, die jeder Proposition q diejenige Fuktion des Typs $\pi\pi$ zuordnet, deren Wert für jede Proposition q der Schnitt $p \cap q$ ist

(32') $[\![\exists]\!]$ = diejenige Funktion des Typs $(e\pi)\pi$, die jeder Prädikatsbedeutung P die Menge der Situationen zuordnet, in denen die Extension von P nicht leer ist

(33') $[\![\neg]\!]$ = diejenige Funktion des Typs $\pi\pi$, die jeder Proposition p die Menge der Situationen zuordnet, die nicht Element von p sind

(34') $[\![=]\!]$ = diejenige Funktion des Typs $e(e\pi)$, die jedem Individuum x diejenige Fuktion des Typs $e\pi$ zuordnet, deren Wert für jedes Individuum y die Menge der Situationen ist, in denen x mit y identisch ist

Bevor wir zur Deutung komplexer Formeln kommen, sei noch eine Bemerkung zu (34) und (34') angebracht. Wir gehen davon aus, dass es sich bei der Identität in dem Sinne um eine 'wesenshafte' Beziehung handelt, dass ein Individuum nur mit *einem* Individuum – sich selbst – identisch sein kann und es mit diesem einen Individuum auch identisch sein muss. Das soll heißen, dass es z.B. keine mögliche Situation gibt, in der Fritz mit jemand anderem identisch ist als mit sich selbst, Fritz, und dass er in jeder möglichen Situation mit sich selbst, mit Fritz, identisch ist. Diese Verständnisweise der Identität wird im folgenden zugrunde gelegt, auch wenn andere Auffassungen denkbar wären. Eine Konsequenz aus dieser Entscheidung ist, dass Formeln der Gestalt $(\alpha{=}\beta)$ immer triviale Propositionen ausdrücken; denn entweder bezeichnen α und β dasselbe Individuum und die Formel trifft auf alle Situationen zu – oder sie bezeichnen verschiedene Individuen und sie trifft auf keine Situation zu. Dementsprechend lässt sich (34') wie folgt umformulieren:

(34") $[\![=]\!]$ = diejenige Funktion f des Typs $e(e\pi)$, so dass für beliebige Individuen y und x gilt:

$$¶(y)(x) = \begin{cases} LR, \text{ falls } x = y \\ È, \text{ falls } x \neq y \end{cases}$$

Wir kommen nun zur Interpretation komplexer Formeln. Wie schon angekündigt werden diese kompositionell gedeutet, d.h. wir setzen jeweils die Bedeutungen der unmittelbaren Teilformeln voraus und geben an, wie sich diese zur Bedeutung der Gesamtformel kombinieren. Entsprechend den zwei Konstruktionsregeln für typenlogische Formeln müssen wir dabei zwei Fälle unterscheiden. Wir beginnen mit dem deutlich einfacheren Fall, in dem zwei Ausdrücke α und β zu $\alpha(\beta)$ kombiniert werden. Nach (21*App*) geht das nur, wenn α eine Formel eines Typs ab ist und β vom Typ a. Wir können dann voraussetzen, dass die semantischen Werte $[\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^g$ und $[\![\boldsymbol{\beta}]\!]^g$ immer (also bei jeder Belegung g) Objekte der Typen ab bzw. a sind. $[\![\boldsymbol{\beta}]\!]^g$ ist dann insbesondere ein Argument, dem $[\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^g$ einen Wert zuweist – und dieser Wert ist der Wert der Gesamtformel:

(35) *Deutung der Applikation (App)*
Wenn g eine Belegung ist, und α und β Formeln des Typs ab und b, dann gilt:
$$[\![\boldsymbol{\alpha(\beta)}]\!]^g = [\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^g([\![\boldsymbol{\beta}]\!]^g) .$$

Die zweite Art komplexer Formeln sind nach (21*Abs*) gebildet und haben die Form $(\boldsymbol{\lambda x.\ \alpha})$ mit einer Variablen $\boldsymbol{x}$ eines Typs a und irgendeiner Formel α eines Typs b. Um zu sehen, wie sich diese Formeln kompositionell deuten lassen, betrachten wir zunächst ein Beispiel:

(36) $(\boldsymbol{\lambda y_e.\ (\lambda x_e.\ S(x)(y))})$

Dabei soll **S** eine Konstante des Typs $e(e\pi)$ sein, die die Beziehung des Sehens bezeichnen soll, also die Bedeutung von **sieht**:

(37) $[\![\mathbf{S}]\!] = \lambda y.\ \lambda x.$ die Situationen, in denen y von x gesehen wird

Zunächst machen wir uns klar, dass der Wert der Formel (36) eine Funktion sein sollte, die angewandt auf Eike die Prädikatsbedeutung von **wird von Eike gesehen** liefert, also die Funktion, die jedem Individuum x die Situationen zuweist, in denen Eike x sieht; denn wenn man die durch **S** bezeichnete Funktion auf x anwendet und dann das Ergebnis auf Eike, erhält man gerade diese Situationen. (36) kehrt also sozusagen die durch **S** bezeichnete Beziehung des Sehens in die des Gesehen-Werdens um.[82] Um (36) kompositionell zu deuten, muss der Wert dieser Formel aus den Bedeutungen ihrer beiden unmittelbaren Bestandteile ermittelt werden – der Variablen $\boldsymbol{y}$ und der komplexen Formel (38):

(38) $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{x}_e.\ S(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}))}$

Der Wert von (38) muss sich wiederum systematisch aus der Bedeutung der Variablen $\boldsymbol{x}$ und dem der Formel (39) ergeben:

(39) $\mathbf{S(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})}$

Der Wert von (39) lässt sich mit Hilfe der obigen Deutung (35) der Applikation ermitteln. Danach gilt für beliebige Belegungen g:

(40) $[\![\mathbf{S(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})}]\!]^g$
$= [\![\mathbf{S(\boldsymbol{x})}]\!]^g([\![\boldsymbol{y}]\!]^g)$
$= [\![\mathbf{S}]\!]^g([\![\boldsymbol{x}]\!]^g)([\![\boldsymbol{y}]\!]^g)$
$= \wedge\ [\![\mathbf{S}]\!]^g(g(\boldsymbol{x}))\ (g(\boldsymbol{y}))$

Der letzte Übergang in (40) macht von der Variablendeutung (28) Gebrauch, wonach der Wert einer Variablen von der jeweiligen Belegung abhängt. Diese Belegungsabhängigkeit überträgt sich nach (40) auf die komplexe Formel (39). Wenn also g_1 den Variablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ die Werte Fritz und Eike zuweist – d.h. $g_1(\boldsymbol{x})$ = Fritz und $g_1(\boldsymbol{y})$ = Eike – ist der Wert von (39) bei dieser Belegung die Menge der Situationen, in denen Fritz Eike sieht; bei einer Belegung g_2, nach der $g_2(\boldsymbol{x})$ = Fritz = $g_2(\boldsymbol{y})$, besteht hingegen der Wert $[\![(38)]\!]^{g_2}$ aus den Situationen, in denen Fritz sich selbst sieht; usw.:

[82] Aus Eindeutigkeitsgründen wird in (37) die Beziehung des Sehens passivisch beschrieben; aber es handelt sich um die durch **sieht** ausgedrückte Beziehung, nicht ihre *Konverse*. – Man beachte, dass die Formeln $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{x}.\ (\lambda \boldsymbol{y}.\ S(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})))}$ und $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{y}.\ (\lambda \boldsymbol{x}.\ S(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})))}$ dieselbe Bedeutung haben wie die Konstante **S** – was in einer Übungsaufgabe nachzuweisen sein wird.

(41)

Belegung	Wert von $\boldsymbol{y}$	Wert von $\boldsymbol{x}$	Wert von $\mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})$
g_1	Eike	Fritz	die Situationen, in denen Eike Fritz sieht
g_2	Fritz	Fritz	die Situationen, in denen Fritz sich sieht
g_3	Eike	Eike	die Situationen, in denen Eike sich sieht
g_4	Fritz	Eike	die Situationen, in denen Fritz Eike sieht
…	…	…	…
g	$g(\boldsymbol{y})$	$g(\boldsymbol{x})$	die Situationen, in denen $g(\boldsymbol{x})$ von $g(\boldsymbol{y})$ gesehen wird

Beim Übergang von (39) zu (38) wird nun diese Belegungsabhängigkeit durch den Lambda-Operator reduziert. Denn (38) bezieht sich auf eine Funktion, die beliebigen Individuen x die Situationen zuordnet, in denen x das durch die Variable $\boldsymbol{y}$ bezeichnete Individuum sieht:

(42)

Belegung	Wert von $\boldsymbol{y}$	Wert von $\boldsymbol{x}$	Wert von $(\lambda\boldsymbol{x}.\ \mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}))$
g_1	Eike	Fritz	λx.die Situationen, in denen Eike x sieht
g_2	Fritz	Fritz	λx.die Situationen, in denen Fritz x sieht
g_3	Eike	Eike	λx.die Situationen, in denen Eike x sieht
g_4	Fritz	Eike	λx.die Situationen, in denen Fritz x sieht
…	…	…	…
g	$g(\boldsymbol{y})$	$g(\boldsymbol{x})$	λx.die Situationen, in denen x von $g(\boldsymbol{y})$ gesehen wird

Obwohl also der Wert von (39) davon abhängt, auf wen sich die Variablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ beziehen, kommt es in (38) nur noch auf den Wert von $\boldsymbol{y}$ an: sobald zwei Belegungen in diesem Variablen-Wert übereinstimmen (was in der Tabelle durch gleiche Färbung angedeutet ist), stimmen sie auch im Wert der Gesamtformel überein. Gegenüber der in (41) dargestellten Deutung von (39) wird in (38) der Wert von $\boldsymbol{x}$ durch das Lambda also ‘neutralisiert’. In der Logik bezeichnet man diese Form der Neutralisierung von Variablenwerten als *Bindung*: die zunächst *freie* Variable im *Skopus*(= Bereich) des Lambda-Operators wird bei der Abstraktion von diesem *gebunden*. Der Skopus (manchmal auch als *Matrix* bezeichnet) ist dabei gerade der Teil der Formel, auf den sich der Operator bezieht – zwischen Punkt und Klammer zu. Man beachte, dass der *Status* einer Variablen – ob sie frei oder gebunden ist – etwas Relatives ist; denn eine Variable ist niemals ‘an sich’ frei oder gebunden, sondern nur in Bezug auf eine Formel: $\boldsymbol{x}$ ist z.B. frei in (39), aber nicht in (38).

Die Bindung ist ein sehr allgemeinen Vorgang, der immer dort stattfindet, wo man Variablen scheinbar dazu benutzt, um sich auf beliebige Objekte zu beziehen. Um zu sehen, wie dieser Prozess funktioniert, sehen wir uns den Übergang von (41) zu (42) im Detail an. Dabei konzentrieren wir uns zunächst auf die Belegung g_1 . Der Wert, den die Formel (38) bei dieser Belegung nach (42) erhält, ist eine Funktion, die sich selbst wieder in Tabellenform darstellen lässt:

(42_1) $[\![(\boldsymbol{\lambda x}.\ \mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}))]\!]^{g_1}$ =

Argument	*Funktionswert*
Fritz	die Situationen, in denen Eike Fritz sieht
Eike	die Situationen, in denen Eike sich sieht
…	…
NN	die Situationen, in denen *NN* von Eike gesehen wird

(42_1) gibt den Wert in der ersten Zeile von (42) an. Da es das Ziel der gegenwärtigen Betrachtungen ist, eine allgemeine Bedeutungskombination zu finden, die die Werte von Formeln der Gestalt $(\lambda \boldsymbol{z}.\ \boldsymbol{\alpha})$ aus denen der gebundenen Variablen $\boldsymbol{z}$ und der Matrix-Formel α zusammen setzt, gilt es herauszufinden, wie man die in (42_1) dargestellte Funktion aus der in (41) dargestellten Bedeutung der Matrix $\mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})$ erhalten kann. Doch das ist ganz offensichtlich. Denn (42_1) ergibt sich, wenn man in den beiden rechten Spalten von (41) die Zeilen herausnimmt, die anders gefärbt sind als die erste, der Belegung g_1 entsprechende Zeile – wobei wir die Färbung aus (42) übernehmen.

(41_2)

Belegung	Wert von $\boldsymbol{y}$	Wert von $\boldsymbol{x}$	Wert von $\mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})$
g_1	Eike	Fritz	die Situationen, in denen Eike Fritz sieht
g_2	~~Fritz~~	~~Fritz~~	~~die Situationen, in denen Fritz sich sieht~~
g_3	Eike	Eike	die Situationen, in denen Eike sich sieht
g_4	~~Fritz~~	~~Eike~~	~~die Situationen, in denen Fritz Eike sieht~~
…	…	…	…
g	Eike	*NN*	die Situationen, in denen *NN* von Eike gesehen wird
g'	~~*MM*~~ ~~(≠ Eike)~~	~~*NN*~~	~~die Situationen, in denen *NN* von *MM* gesehen wird~~

Dasselbe Vorgehen führt auch von (41) zum Wert von $(\boldsymbol{\lambda x}_e.\ \mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}))$ an der Belegung g_3; denn diese Belegung hat dieselbe Farbe – bei Ausschluss aller andersfarbigen Zeilen kommt also wieder (41_2) heraus, und nach (42) ist ja tatsächlich $[\![(\boldsymbol{\lambda x}.\ \mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}))]\!]^{g_1} = [\![(\boldsymbol{\lambda x}.\ \mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}))]\!]^{g_2}$. Und ganz analog ergibt sich der Wert von $(\lambda \boldsymbol{x}.\ \mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}))$ an den Belegungen g_2 und g_4, wenn man in (41) nur die dunklen Belegungen betrachtet und dann die Zuordnung in den rechten beiden Zeilen nimmt. Das Malen entsprechender Tabellen ist Gegenstand einer Hausaufgabe.

Insgesamt ergibt sich damit das folgende allgemeine Muster: der Wert einer Formel der Gestalt $(\lambda \boldsymbol{z}.\ \boldsymbol{\alpha})$ an einer Belegung g ist eine Funktion f, die den Werten von $\boldsymbol{z}$ an den zu g gleichfarbigen Belegungen den dortigen Wert von α zuordnet. Wenn also h eine solche gleichfarbige Belegung ist, dann ordnet f einem Objekt $u = h(\boldsymbol{z})$ den Wert von α an h zu:

(43) $[\![(\boldsymbol{\lambda z}_a.\ \boldsymbol{\alpha})]\!]^{g}\,(h(\boldsymbol{z})) = [\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^{h}$

(43) erfasst bereits im wesentlichen die gesuchte, der Lambda-Abstraktion entsprechende Be-

deutungskombination. Allerdings muss man dafür die Gleichung auf *beliebige* einander *gleichfarbige* Belegungen g und h beziehen. Doch worin besteht eigentlich *Gleichfarbigkeit* im allgemeinen? In den obigen Tabellen erhielten zwei Belegungen immer dann die gleiche Schattierung, wenn sie im $\boldsymbol{y}$-Wert übereinstimmten – oder besser (weil leichter verallgemeinerbar): *wenn sie sich allenfalls im* $\boldsymbol{x}$*-Wert unterschieden*. Die durch den Lambda-Term bezeichnete Funktion ließ sich gerade deswegen aus den gleichfarbigen Belegungen konstruieren, weil jedes Individuum irgendwann einmal als $\boldsymbol{x}$-Wert auftaucht, ohne dass die anderen Variablenwerte davon berührt werden. In der Logik nennt man zwei Belegungen, die sich – wenn überhaupt – nur im Wert einer einzigen Variablen $\boldsymbol{x}$ unterscheiden $\boldsymbol{x}$-*Alternativen* voneinander. Mit Hilfe dieses Begriffs lässt sich (43) in die folgende allgemeine Bedeutungsregel für Lambda-Formeln umschreiben:

(44) *Deutung der Abstraktion (Abs)*
Wenn g eine Belegung ist, $\boldsymbol{x}$ eine Variable eines Typs a und α eine Formel eines Typs b, dann ist $[\![(\boldsymbol{\lambda x.\alpha})]\!]^g$ diejenige Funktion von Typ (ab), so dass für jede $\boldsymbol{x}$-Alternative h *von* g gilt:
$[\![(\boldsymbol{\lambda x_a.\ \alpha})]\!]^g\ (h(\boldsymbol{x})) = [\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^h$.

Nach (44) ist der Wert des Lambda-Terms wirklich eine Funktion, die jedem Objekt des Typs a ein Objekt des Typs b zuordnet. Denn jedes Objekt u vom Typ a ist der Wert einer $\boldsymbol{x}$-Alternative zu g, nämlich *der Funktion, die wie g ist, außer dass sie der Variablen* $\boldsymbol{x}$ *das Objekt u zuordnet*. Wie man sich leicht überlegen kann, gibt es *eine einzige* $\boldsymbol{x}$-Alternative, die dies tut.[83] Wir werden sie als sie ‘$g[x/u]$’ nennen und als *die an der Stelle* $\boldsymbol{x}$ *um u modizierte Belegung* bezeichnen. Mit dieser Notation lässt sich (44) wie folgt reformulieren:

(44') *Deutung der Abstraktion (Abs)*
Wenn g eine Belegung ist, $\boldsymbol{x}$ eine Variable eines Typs a und α eine Formel eines Typs b, dann ist $[\![(\boldsymbol{\lambda x.\alpha})]\!]^g$ diejenige Funktion von Typ (ab), so dass für jedes Objekt u vom Typ a gilt:
$[\![(\boldsymbol{\lambda x_a.\ \alpha})]\!]^g\ (u) = [\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^{g[x/u]}$.

Man mache sich klar, dass (44') genau dasselbe besagt wie (44); aber aus der Reformulierung geht klarer hervor, dass es sich bei $[\![(\boldsymbol{\lambda x.\alpha})]\!]^g$ in der Tat um ein Objekt des Typs (ab) handelt, also eine Funktion von Objekten des Typs a in Objekte des Typs b. (44') ist deswegen die in Lehrbüchern übliche Formulierung.

Sind (44) und (44') kompositionell? Ja und nein. Denn der jeweilige *Wert* einer Lambda-Formel (bei einer gegebenen Belegung g) setzt sich danach nicht aus den Werten ihrer unmittelbaren Teile zusammen. Vielmehr benötigt man zu seiner Konstruktion die Werte der Teila bei anderen Belegungen, den x-Alternativen oder Modifikationen. Andererseits lässt sich nach (44) und (44') die *Gesamtheit aller Werte* einer Lambda-Formel aus der Gesamtheit aller Werte ihrer Teile ermitteln – und diese Gesamtheit, die sich wieder als Funktion auffassen lässt, die Belegungen Werte zuweise, ist gerade die *Bedeutung*.

Nicht die semantischen Werte der Teilformeln kombinieren sich bei der Variablenbindung, sondern die gesamten Bedeutungen. (44) und (44') zeigen allerdings nur an, wie die Bedeutung des rechten Teils, also der Matrix α, bei der Bestimmung der semantischen Werte des Lambda-Terms eingeht. Welche Rolle dabei die diversen Werte von $\boldsymbol{x}$ spielen, wird in dieser (durchaus gängigen) Formulierung verschwiegen. In (44') ist von ihnen zumindest explizit nicht die Rede; in (44) kommen sie zwar in der entscheidenden Gleichung (43) vor, aber dennoch wird nicht

83 Wir setzen hier voraus, dass h und h' dieselbe Funktion sind, wenn sie auf allen Variablen übereinstimmen. Diese Voraussetzung wird in der Mengenlehre als *Extensionalitätsprinzip* bezeichnet und akzeptiert.

deutlich inwiefern der Wert der Gesamtformel sich *nur* aus ihnen und den Werten der Variablen ermittelt. Um die Kompositionalität der Deutung der Variablenbindung mit letzter Sicherheit nachzuweisen, müsste man (44) und (44') daher noch einmal reformulieren. Genauer gesagt müsste man dafür die Begriffe '$\boldsymbol{x}$-Alternative' bzw. 'an der Stelle $\boldsymbol{x}$ modifizierte Belegung' durch einen Begriff ersetzen, der allein auf die Bedeutung, die Gesamtheit der semantischen Werte, der Variablen $\boldsymbol{x}$, nicht aber auf die Variable selbst, Bezug nimmt. Das dies möglich ist, wird in einer Übungsaufgabe nachgewiesen.

Die in (44) bzw. (44') definierte Bedeutungskombination lässt sich nun auch anwenden, um den Wert der hier noch einmal wiederholten Ausgangsformel (36) aus den in der Tabelle (42) gegebenen Werten der Teilformel $(\lambda \boldsymbol{x}.\ \mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}))$ zu ermitteln:

(36) $(\lambda \boldsymbol{y}_e.\ (\lambda \boldsymbol{x}_e.\ \mathbf{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})))$

Dabei stellt sich dann heraus, dass dieser Wert bei jeder Belegung derselbe ist. Kein Wunder: die Formel in (36) enthält keine freien Variablen – sie ist, wie man in der Logik sagt, *geschlossen*. Die Darstellung des Übergangs von (42) zu den Werten von (36) überlassen wir wieder einer Übungsaufgabe. Die systematische Deutung der typenlogischen Formeln ist damit abgeschlossen.

4.4 Rechenregeln

Wie eingangs des Kapitels bereits angedeutet wurde, besteht ein immenser Vorteil der indirekten Deutung in einer gewissen Übersichtlichkeit. Je komplexer die zu bestimmenden und zu manipulierenden Bedeutungen werden, desto mehr wird sich diese Übersichtlichkeit in ihrer Darstellung als wünschenswert oder sogar notwendig erweisen. Die Übersichtlichkeit verdankt die Methode nicht zuletzt dem Umstand. dass die typenlogischen Formeln gewissen logischen Gesetzen unterliegen, die es erlauben, komplexe Formeln auf quasi mechanische Weise zu reduzieren, um dadurch ihre Lesbarkeit zu erhöhen. Um diese Reduktionen geht es im vorliegenden Abschnitt. Bei den genannten Gesetzen handelt es sich dabei keineswegs um zusätzliche oder gar willkürliche Festlegungen. Ganz im Gegenteil: sie ergeben sich zwingend aus der im vorangehenden Abschnitt gegebenen Deutung der Formeln. Denn aus ihr folgt in vielen Fällen, dass zwei gegebene Formeln in dem Sinne *(logisch) äquivalent* sind[84], als sie stets – d.h. bei beliebigen Belegungen – denselben Wert besitzen. Hier ist ein einfaches Beispiel:

(45) Wenn φ und ψ Formeln des Typs π sind, dann gilt:

$$[\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi}] \equiv [\boldsymbol{\psi} \wedge \boldsymbol{\varphi}]$$

Das Symbol '$\equiv$' steht für die genannte logische Äquivalenz. Man beachte, dass es sich dabei nicht um ein Symbol der Typenlogik handelt, sondern um eine metasprachliche Abkürzung. Insbesondere ist also die in (45) herausgestellte Zeile selbst keine typenlogische Formel, sondern steht für die folgenden metasprachliche Aussage:

(45') Für alle Belegungen g gilt: $[\![[\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi}]]\!]^g = [\![[\boldsymbol{\psi} \wedge \boldsymbol{\varphi}]]\!]^g$.

Inwiefern folgt (45) aus der obigen Deutung der typenlogischen Formeln? Ganz einfach: man kann die Behauptung mit ihrer Hilfe *beweisen*, es handelt sich also (etwas pompös gesprochen) um einen mathematischen *Satz*. Um einen Eindruck zu vermitteln, wie man Rechenregeln – denn um eine solche handelt es sich in (45) – prinzipiell rechtfertigt, und dass sie sich dabei insbesondere einzig und allein auf die kompositionelle Deutung der Formeln verlässt, führen wir den Beweis von (45) exemplarisch vor; später werden wir detaillierte Nachweise verzichten.

Nehmen wir also einmal an, wir hätten es mit irgendwelchen Formeln φ und ψ des Typs π zu

84 Die Verwendung dieses Begriffs weicht von der üblichen Praxis in der Logik ab, wo er etwas enger gefasst ist.

tun. Um die in (45) behauptete Äquivalenz zu zeigen, müssen wir dann eine beliebige Belegung g betrachten und die Werte von $\boldsymbol{[\varphi \wedge \psi]}$ und $\boldsymbol{[\psi \wedge \varphi]}$ an g – also $\llbracket \boldsymbol{[\varphi \wedge \psi]} \rrbracket^g$ und $\llbracket \boldsymbol{[\psi \wedge \varphi]} \rrbracket^g$ – miteinander vergleichen. Zunächst einmal sollten wir dazu die notationellen Vereinfachungen rückgängig machen; denn '$\boldsymbol{[\varphi \wedge \psi]}$' steht ja für die typenlogische Formel $\boldsymbol{\wedge(\psi)(\varphi)}$, die mit Hilfe der logischen Konstanten $\boldsymbol{\wedge}$ von Typ $\pi(\pi\pi)$ gebildet wurde, deren Bedeutung in der Gleichung (31) gegeben wurde, die wir hier noch einmal wiederholen:

(31) $\llbracket \wedge \rrbracket = \lambda p.\, \lambda q.\, p \cap q$

Des weiteren nehmen wir zur Kenntnis, dass es sich bei $\boldsymbol{\wedge(\psi)(\varphi)}$ um das Ergebnis einer zweifachen Anwendung der syntaktischen Regel *(App)* handelt: zunächst wird aus der Konstanten $\boldsymbol{\wedge}$ – die ja nach *(Kon)* insbesondere eine Formel des Typs $\pi(\pi\pi)$ ist – und der Formel $\boldsymbol{\psi}$ die Formel $\boldsymbol{\wedge(\psi)}$ von Typ $\pi\pi$ gebildet; dann entsteht aus letzterer und der Formel $\boldsymbol{\varphi}$ das Endergebnis. (Malen Sie sich einen syntaktischen Baum, wenn Sie Probleme haben, das nachzuvollziehen!) Und beide Male ist dafür, wie gesagt, die Konstruktionsregel *(App)* verantwortlich. Da dies so ist, lässt sich der Wert von $\boldsymbol{\wedge(\psi)(\varphi)}$ schrittweise mit Hilfe der im vorangehenden Abschnitt eingeführten und hier wiederholten Deutung (35) von nach *(App)* gebildeten Formeln ermitteln:

(35) *Deutung der Applikation (App)*
Wenn g eine Belegung ist, und α und β Formeln des Typs ab und b, dann gilt:

$$\llbracket \boldsymbol{\alpha(\beta)} \rrbracket^g = \llbracket \boldsymbol{\alpha} \rrbracket^g(\llbracket \boldsymbol{\beta} \rrbracket^g) .$$

Und das geht so:[85]

(46)	$\llbracket \boldsymbol{\wedge(\psi)(\varphi)} \rrbracket^g$	
=	$\llbracket \boldsymbol{\wedge(\psi)} \rrbracket^g(\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g)$	nach *(App)*: **(y)** für **a** , **j** für **b**
=	$\llbracket \boldsymbol{\wedge} \rrbracket^g(\llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g)(\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g)$	nach *(App)*: für **a** , **y** für **b**
=	$[\lambda p.\, \lambda q.\, p \cap q](\llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g)(\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g)$	nach (31)
=	$[\lambda q.\, \llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g \cap q](\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g)$	λ-Konversion
=	$\llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g \cap \llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g$	λ-Konversion

Ganz analog lässt sich nun mit Hilfe derselben Regeln und Festlegungen der semantische Wert von $\boldsymbol{[\psi \wedge \varphi]}$ bei der Belegung g bestimmen. Das Ergebnis ist:

(47) $\llbracket \boldsymbol{\wedge(\varphi)(\psi)} \rrbracket^g = \llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g \cap \llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g$

Aber natürlich handelt es sich dabei um denselben Wert wie den in (46) ermittelten – nämlich den Schnitt der Propositionen $\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g$ und $\llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g$, also die Menge derjenigen Situationen, die sowohl in $\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g$ als auch in $\llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g$ liegen – oder eben sowohl in $\llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g$ als auch in $\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g$. Damit ist die in (45) behauptete Äquivalenz – die sog. *Kommutativität der Konjunktion* – in der Tat nachgewiesen.

85 Wir machen bei diesem Nachweis zweimal von der λ-Konversion Gebrauch. Sicherheitshalber sei darauf hingewiesen, dass dies nicht notwendig ist. Stattdessen kann man sich darauf besinnen, dass es sich bei den metasprachlichen Lambda-Termen um Abkürzungen für Beschreibungen von Funktionen handelt, und dann diese Beschreibungen selbst einsetzen. So steht z.B. der λ-Term '$[\lambda q.\, \llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g \cap q]$' für 'diejenige Funktion f, die jeder Proposition q als Wert $\llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g \cap q$ zuweist', und $[\lambda q.\, \llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g \cap q](\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g)$ ' benennt den Wert der so beschriebenen Funktion für das spezielle Argument (q =) $\llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g$ – also $\llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket^g \cap \llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket^g$.

Die Rechenregel (45) ist gänzlich trivial; man sieht sie auch ohne einen umständlichen Beweis ein. Und unter dem Aspekt der Übersichtlichkeit ist sie nicht einmal besonders interessant; denn die in ihr gleichgesetzten Formeln sind gleich lang. Der Zweck des obigen expliziten Äquivalenznachweises lag ja auch nicht im Ergebnis, sondern im Weg: wir sehen, dass sich logische Äquivalenzen im Prinzip aufgrund der Festlegungen im vorangehenden Abschnitt beweisen lassen.

Viele der wichtigsten Rechenregeln nehmen auf den bereits angesprochenen Unterschied zwischen freien und gebundenen Variablen Bezug. Ein wesentliches Charakteristikum der Bindung ist es, dass der Wert der Variablen durch sie unabhängig von der Belegung gemacht wird. Diese Beobachtung ist Inhalt eines grundlegenden Hilfssatzes (oder *Lemmas*):[86]

(48) *Koinzidenzlemma*
Es sei α eine typenlogische Formel. Dann gilt für alle Belegungen g und h, die auf den in α freien Variablen übereinstimmen:

$$[\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^g = [\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^h .$$

Dass zwei Belegungen g und h auf einer Variablen $\boldsymbol{x}$ *übereinstimmen*, heißt dabei natürlich, dass $g(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x})$. Das Koinzidenzlemma besagt danach, dass sich die Übereinstimmung im Wert von den freien Variablen auf die gesamte Formel überträgt. Im Klartext bedeutet das, dass der Wert der Formel α nur von der Belegung der in α freien Variablen abhängt – also weder von den Variablen, die gar nicht in α vorkommen, noch von denen, die (in α) nur gebunden vorkommen. Und genau letzteres ist die Folge der oben beobachten Neutralisierung der Belegungsabhängigkeit durch Bindung.

Der Beweis von (48) erfolgt schrittweise, indem man ihn zunächst für einfache, unzusammengesetzte Formeln führt, und dann bei komplexen Formeln zeigt, wie sich die im Koinzidenzlemma behauptete Belegungsunabhängigkeit gebundener Variablen von den unmittelbaren Teilen auf die Gesamtformel vererbt. Die Strategie ist also das aus der Arithmetik bekannte Prinzip der *vollständigen Induktion*.[87] Wir ersparen uns diesen Beweis, machen uns aber klar, dass er nur gegeben werden kann auf dem Hintergrund einer präzisen Definition des Begriffs der *freien Variablen*. Dieser Begriff lässt sich ebenfalls schrittweise definieren, indem man für jede Formel α eine Menge $Fr(\alpha)$ angibt:

(49) *Definition der in einer Formel* α *frei vorkommenden Variablen*

Formel α	*Bildungsregel*	$Fr(\alpha)$
c	*Kon*	Ø
$\boldsymbol{x}$	*Var*	$\{\boldsymbol{x}\}$
$\boldsymbol{\beta(\gamma)}$	*App*	$Fr(\beta) \cup Fr(\gamma)$
$\boldsymbol{(\lambda x.\beta)}$	*Abs*	$Fr(\beta) \setminus \{\boldsymbol{x}\}$

Der Tabelle (49) kann man entnehmen, welche Variablen in einer gegebenen typenlogischen Formel α frei vorkommen. Handelt es sich bei α um eine Konstante (Zeile 1), ist die Menge der in α frei vorkommenden Variablen leer – denn in einer Konstanten kommt keine Variable vor. Ist dagegen α selbst eine Variable (Zeile 2), kommt diese natürlich auch in α vor – und zwar

86 Statt vom Koinzidenz*lemma* spricht man auch vom Koinzidenz*theorem*. In den meisten Logiklehrbüchern findet man eine etwas allgemeinere (‘modelltheoretische’) Version dieses Hilfssatzes.

87 Das ist das Prinzip, nach dem jede Zahl eine gegebene Eigenschaft E hat, sobald die 0 E hat und sich E von einer Zahl (n) auf die nächste (n+1) überträgt.

frei, denn es gibt in α kein λ, das die Variable binden könnte. In einer Applikation **β(γ)** kommt eine Variable frei vor, wenn sie in (mindestens) einem der Teile frei vorkommt; die Menge der in **β(γ)** freien Variablen ergibt sich somit durch Vereinigung von *Fr*(β) mit *Fr*(γ). Und die freien Variablen einer Abstraktion **(λ*x*.β)** sind dieselben wie die in der Matrix β – außer natürlich dem vom λ gebundenen ***x***.

Dass eine Variable in einer Formel α frei ist, heißt nicht, dass sie nicht gleichzeitig auch in α gebunden sein kann; denn die Variable kann ja an mehreren Stellen vorkommen. Umgekehrt kommen Variablen, die nicht in *Fr*(α) auftauchen, entweder in α gar nicht vor oder nur als gebundene Variablen. Eine Formel, die überhaupt keine freien Variablen enthält, nennt man *geschlossen*; entsprechend sind *offene* Formeln solche mit freien Variablen. Aus dem Koinzidenzlemma folgt unmittelbar, dass die semantischen Werte geschlossener Formeln immer belegungsunabhängig sind; denn wenn *g* und *h* irgendwelche Belegungen sind und α eine geschlossene Formel ist, dann stimmen *g* und *h* trivialerweise auf allen freien Variablen von α überein – *Fr*(α) ist ja leer. Bei geschlossenen Formeln kann man also den Wert einfach als '$[\![\boldsymbol{\alpha}]\!]$' notieren, wie wir das schon bei Konstanten gemacht haben (die ja auch geschlossene Formeln sind). Wir werden reichhaltig Gelegenheit haben, von dieser Notationskonvention Gebrauch zu machen; denn die typenlogischen Übersetzungen natürlichsprachlicher Ausdrücke sind in aller Regel geschlossene Formeln. Ausnahmen lernen wir erst im nächsten Kapitel kennen.

Variablenbindung schafft Belegungsunabhängigkeit. Das ist die erste von zwei zentralen Eigenschaften dieses Vorgangs. Die zweite ist der ebenfalls aus dem vortheoretischen Umgang mit Variablen vertraute Sachverhalt, dass die Identität einer gebundenen Variablen keine Rolle spielt: ob man von einem beliebigen *x* spricht oder einem beliebigen *y*, ist egal – gebundene Variablen kann man ohne Änderung der Gesamtaussage (einigermaßen) beliebig umbenennen. Diese Einsicht werden in einer Rechenregel festhalten, die auf einem Prinzip beruht, das ebenso fundamental ist für das Verständnis der Variablenbindung wie das Koinzidenzlemma. Das Prinzip betrifft die Ersetzung *freier* Variablen durch beliebige Formeln gleichen Typs und besagt, dass das Ergebnis einer solchen Ersetzung den Wert der Gesamtformel (in der die Ersetzung vorgenommen wurde) nicht verändert, wenn die ersetzte Variable denselben Wert hat wie die Formel, die für sie eingesetzt wird. Das klingt komplizierter, als es ist. Betrachten wir lieber ein Beispiel:

(50) $\mathbf{T}(\boldsymbol{x}_e)(\mathbf{e})$

In (50) ist **T** die schon weiter oben benutzte Konstante des Typs *e*(*e*π), die als Übersetzung des transitiven Verbs **trifft** fungiert, und **e** ist eine Konstante des Typs *e*, deren (belegungsunabhängiger) Wert Eike ist. (50) ist also eine offene Formel vom Typ π – ***x*** kommt frei vor – und der Wert dieser Proposition bei einer Belegung hängt offenbar davon ab, welches Individuum diese Belegung der Variablen ***x*** zuweist: wenn *g*(***x***) = Eike, ist $[\![\mathbf{T}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e})]\!]^g$ die Menge der Situationen, in denen Eike sich selbst trifft (also eine kleine Menge abstruser Situationen);[88] wenn *h*(***x***) = Fritz, ist $[\![\mathbf{T}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e})]\!]^g$ die Menge der Situationen, in denen Eike Fritz trifft; etc. Wenn nun **f** eine Konstante des Typs *e* ist, deren Wert Fritz ist, dann ist klar, dass die Formel (50) bei der soeben betrachteten Belegung *h* denselben Wert hat wie:

(51) $\mathbf{T}(\mathbf{f})(\mathbf{e})$

[88] Dabei ist die (wörtliche) Lesart von **treffen** gemeint, die nahezu synonym ist mit **begegnen**: treffen in dem Sinn kann sich jemand selbst wohl nur im Rahmen von Zeitreisen (– oder?). Bei einer anderen Lesart von [**jemanden mit etwas**] **treffen** werden die Situationen weniger abstrus, dafür aber teilweise makaber.

(51) geht aus (50) hervor, indem die freie Variable $\boldsymbol{x}$ durch die Konstante **f** ersetzt wurde. Da die beiden an der Belegung *h* denselben Wert – Fritz – haben, überträgt sich diese Wertgleichheit auf die Gesamtformeln. Dahinter steckt ein allgemeines Prinzip, das *Substitutionslemma*. Um es zu formulieren, greift man auf einen allgemeinen Begriff der Substitution freier Variablen zurück: wenn α irgendeine Formel ist, bezeichnet man mit '$\boldsymbol{\alpha}[{}^{\boldsymbol{x}}\!/\!_{\delta}]$' die Formel, die entsteht, indem man alle freien Vorkommen der Variablen $\boldsymbol{x}$ durch die Formel δ (des gleichen Typs) ersetzt. Mit dieser Notation lässt sich der Übergang von (50) zu (51) beschreiben als: $\mathbf{T}(\boldsymbol{x}_e)(\mathbf{e})\,[{}^{\boldsymbol{x}}\!/\!_{\mathbf{f}}] = \mathbf{T}(\mathbf{f})(\mathbf{e})$. Auch die Substitution kann man schrittweise, also induktiv, definieren:

(52) *Definition der Ersetzung der freien* $\boldsymbol{x}$ *in einer Formel* α *durch* δ

Formel α	*Bildungsregel*	$\boldsymbol{\alpha}[{}^{\boldsymbol{x}}\!/\!_{\beta}]$
c	*Kon*	**c**
$\boldsymbol{x}$	*Var*	δ
$\boldsymbol{y}$ [≠ $\boldsymbol{x}$]	*Var*	$\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{\beta(\gamma)}$	*App*	$\boldsymbol{\alpha}[{}^{\boldsymbol{x}}\!/\!_{\delta}](\boldsymbol{\beta}[{}^{\boldsymbol{x}}\!/\!_{\delta}])$
$(\boldsymbol{\lambda x.\beta})$	*Abs*	$(\boldsymbol{\lambda x.\beta})$
$(\boldsymbol{\lambda y.\beta})$ [$\boldsymbol{y}$ ≠ $\boldsymbol{x}$]	*Abs*	$(\boldsymbol{\lambda y.\beta}[{}^{\boldsymbol{x}}\!/\!_{\delta}])$

Die Tabelle (52) zeigt, was passiert, wenn man alle freien Vorkommen einer Variablen $\boldsymbol{x}$ in einer gegebenen typenlogischen Formel α durch eine Formel δ ersetzt. Damit das Ergebnis $\boldsymbol{\alpha}[{}^{\boldsymbol{x}}\!/\!_{\beta}]$ dieser Ersetzung überhaupt eine typenlogische Formel ist, wird dabei vorausgesetzt, dass $\boldsymbol{x}$ und δ Formeln desselben Typs sind; α kann dagegen von einem anderen Typ sein, wie das Beispiel (51) zeigt, wo in der Gesamtformel (50) vom Typ π das freie $\boldsymbol{x}$ vom Typ *e* durch die Konstante **f** (vom selben Typ) ersetzt wurde. Handelt es sich bei α um eine Konstante (Zeile 1), passiert bei der Ersetzung der freien $\boldsymbol{x}$ in α gar nichts – denn weder $\boldsymbol{x}$ noch sonst eine Variable kommt in α frei vor; das Ergebnis der Ersetzung is also α selbst. Ist dagegen α selbst die Variable $\boldsymbol{x}$ (Zeile 2a), kommt diese natürlich auch in α vor, und wenn man dieses eine Vorkommen durch δ ersetzt, ist δ eben das Ergebnis $\boldsymbol{x}[{}^{\boldsymbol{x}}\!/\!_{\delta}]$ dieser Ersetzung. Handelt es sich bei α dagegen um eine andere, von $\boldsymbol{x}$ verschiedene Variable, passiert bei der Substitution das Gleiche wie im ersten Fall (Zeile 1) – nämlich gar nichts. Will man in einer Applikation $\boldsymbol{\beta(\gamma)}$ (Zeile 3) die Variable $\boldsymbol{x}$ überall, wo sie frei vorkommt, durch δ ersetzen, muss man dies in den beiden unmittelbaren Teilen der Formel – dem Funktor β und dem Argumentterm γ – tun und die Ergebnisse dieser Ersetzung wieder per Funktionalapplikation kombinieren. Analog verfährt man bei Abstraktionen $(\boldsymbol{\lambda y.\beta})$ (Zeile 4b), in denen die gebundene Variable nicht das $\boldsymbol{x}$ ist: hier muss man die Ersetzung in der Matrix β vornehmen und dann die (von $\boldsymbol{x}$ verschiedene) Variable abstrahieren. Wird dagegen $\boldsymbol{x}$ selbst vom λ gebunden (Zeile 4a), passiert bei der Substitution gar nichts; denn das λ lässt keine zu ersetzenden freien Vorkommen von $\boldsymbol{x}$ übrig.

Man mache sich klar, dass nach der in Tabelle (52) gegebenen Definition der Ersetzung in der Tat gilt: $\mathbf{T}(\boldsymbol{x}_e)(\mathbf{e})\,[{}^{\boldsymbol{x}}\!/\!_{\mathbf{f}}] = \mathbf{T}(\mathbf{f})(\mathbf{e})$. Wenn die zu ersetzende Variable bei einer gegebenen Belegung denselben Wert hat wie die sie ersetzende Konstante, sollte sich diese Wertgleichheit also auf die beiden Gesamtformeln (vor und nach der Substitution) übertragen. Allerdings gilt diese Übertragung der Wertgleichheit nicht immer; d.h. das folgende Prinzip wäre in seiner Allgemeinheit falsch:

(53) Wenn $[\![\boldsymbol{x}]\!]^g = [\![\boldsymbol{\delta}]\!]^g$, dann ist $[\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^g = [\![\boldsymbol{\alpha}[^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{\delta}}]]\!]^g$

Hier ist ein simples Gegenbeispiel. Man wähle als α die Formel $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{y}_e.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}$ und betrachte eine Belegung g, nach der $g(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{y})$ = Eike. Insbesondere ist also $[\![\boldsymbol{x}]\!]^g = [\![\boldsymbol{y}]\!]^g$, und nach (53) – mit $\boldsymbol{y}$ für δ – würde jetzt folgen: $[\![\mathbf{(\lambda \boldsymbol{y}_e.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}]\!]^g = [\![\mathbf{(\lambda \boldsymbol{y}_e.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}[^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{y}}]]\!]^g$. Aber $\mathbf{\lambda \boldsymbol{y}_e.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}[^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{y}}] = \mathbf{(\lambda \boldsymbol{y}_e.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}))}$ – was trotz der Gleichbelegung von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sicher nicht denselben Wert hat wie $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{y}_e.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}$: wendet man etwa $[\![\mathbf{(\lambda \boldsymbol{y}_e.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}]\!]^g$ auf Fritz an, erhält man die Situationen, in denen Eike (= $g(\boldsymbol{x})$) Fritz trifft; $[\![\mathbf{(\lambda \boldsymbol{y}_e.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}))}]\!]^g$ liefert dagegen für das Argument Fritz die absurden Situationen, in denen Fritz sich selbst begegnet. Und bereits ein oberflächlicher Blick auf die Ausgangsformel und das Ergebnis der Ersetzung bestätigt, dass hier irgendetwas nicht stimmt. Denn während in $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{y}_e.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}$ die Variable $\boldsymbol{x}$ frei vorkommt, ist $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{y}_e.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}))}$ eine geschlossene Formel.

Das Gegenbeispiel lebt davon, dass die Variable $\boldsymbol{y}$ bei der Einsetzung für $\boldsymbol{x}$ in den Skopus eines 'λ$\boldsymbol{y}$' gerät und somit gebunden wird: da Bindung Belegungsunabhängigkeit schafft, wird damit die Tatsache, dass $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ bei der betrachteten Belegung g wertgleich sind, unerheblich; das gebundene $\boldsymbol{y}$hat ja gar keinen eigenständigen Wert. Insbesondere kann sich also in diesem Fall keine Wertgleichheit von Teilausdrücken $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ auf die Gesamtformel übertragen. Das Prinzip (53) muss also dahingehend eingeschränkt werden, dass ganz allgemein keine ehemals freien Variablen $\boldsymbol{z}$ 'versehentlich' gebunden werden – also in den Skopus des bindenden 'λ$\boldsymbol{z}$' geraten – wenn man sie für die Variable $\boldsymbol{x}$ einsetzt. Die Gefahr der versehentlichen Bindung besteht dabei nicht nur in den Fällen, wo die einzusetzende Formel δ selber eine Variable ist, sondern auch dann, wenn δ eine komplexe Formel ist, die eine freie Variable enthält, welche beim Einsetzen gebunden würde; ein entsprechendes Beispiel wird in den Übungsaufgaben betrachtet. Um das in (53) angestrebte allgemeinen Prinzip einigermaßen griffig formulieren zu können, empfiehlt sich eine eigene Benennung für den Sachverhalt, dass eine Variable versehentlich gebunden würde:

(54) *Definition*
Es seien α und δ typenlogische Formeln und $\boldsymbol{x}$ eine Variable desselben Typs wie δ. Dann ist $\boldsymbol{x}$ *frei für [die Einsetzung von]* δ *in* α, falls α für kein $\boldsymbol{z} \in Fr(\delta)$ einen Teil der Gestalt '$(\lambda \boldsymbol{z}.\ \beta)$' enthält, in dem $\boldsymbol{x}$ frei vorkommt.

Diese Definition wird leichter verständlich, wenn man sich klar macht, unter welchen Umständen eine Variable $\boldsymbol{x}$ für eine Formel δ *nicht* frei ist in einer Formel α. Nach (54) liegt ein solcher Fall gerade dann vor, wenn δ eine freie Variable $\boldsymbol{z}$ enthält und es in α einen Teil der Gestalt '$(\lambda \boldsymbol{z}.\ \beta)$' gibt, in dem $\boldsymbol{x}$ frei vorkommt. Wenn man dann (die freien Vorkommen von) $\boldsymbol{x}$ in α durch δs ersetzt, müsste man insbesondere das $\boldsymbol{x}$ in '$(\lambda \boldsymbol{z}.\ \beta)$' ersetzen. Aber dann geriete das eingesetzte δ in den Skopus des 'λ$\boldsymbol{z}$' – und mit ihm die in δ freien $\boldsymbol{z}$, die somit versehentlich gebunden würden. Genau das passiert, wenn $\boldsymbol{x}$ *nicht* frei ist für δ in α; und genau das muss verhindert werden. Wir gelangen damit zu der folgenden eingeschränkten, aber korrekten Version von (53):

(55) *Substitutionslemma*
Es seien α und δ typenlogische Formeln und $\boldsymbol{x}$ eine Variable (desselben Typs wie δ), die frei ist für δ in α. Dann gilt für alle Belegungen g:
Wenn $[\![\boldsymbol{x}]\!]^g = [\![\boldsymbol{\delta}]\!]^g$, dann ist $[\![\boldsymbol{\alpha}]\!]^g = [\![\boldsymbol{\alpha}[^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{\delta}}]]\!]^g$.

Auch in diesem Fall ersparen wir uns den Beweis, der sich wieder schrittweise von einfachen zu immer komplexeren Formel führen lässt. Stattdessen sehen wir uns an, wie das Substitutionslemma gemeinsam mit dem Koinzidenzlemma die oben erwähnte Beliebigkeit der Variablenbenennung impliziert. Unter dieser Beliebigkeit ist zu verstehen, dass man eine Bindung der Gestalt $(\lambda \boldsymbol{x}.\ \ldots)$ umschreiben kann in $(\lambda \boldsymbol{y}.\ \ldots)$, wenn man gleichzeitig in '…' alle durch das Lambda gebundenen $\boldsymbol{x}$ durch $\boldsymbol{y}$ ersetzt. Allerdings darf diese Variable $\boldsymbol{y}$ nicht schon in '…' frei vorkommen; sonst würde ja das $(\lambda \boldsymbol{y}.\ \ldots)$ diese(s) Vorkommen binden. (In einer Übungsaufgabe kann man sich dies an dem Beispiel $(\lambda \boldsymbol{x}.\ \boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{y})$ klar machen.) Außerdem muss wieder verhindert werden, dass das $\boldsymbol{y}$ beim Einsetzen für $\boldsymbol{x}$ durch ein '$\lambda \boldsymbol{y}$' gebunden wird; $\boldsymbol{x}$ muss also frei für $\boldsymbol{y}$ sein.

(56) *Prinzip der gebundenen Umbenennung*
Es seien α und β typenlogische Formeln und $\boldsymbol{x}$ eine Variable. Wenn dann $\boldsymbol{y}$ eine Variable (desselben Typs wie $\boldsymbol{x}$) ist, die nicht frei ist in α und für die $\boldsymbol{x}$ frei ist in α, dann gilt:

$$(\lambda \boldsymbol{x}.\alpha) \equiv (\lambda \boldsymbol{y}.\alpha[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y}])\ .$$

Um einzusehen, dass (56) im Rahmen der in Abschnitt 4.3 gegebenen Deutung der Lambda-Abstraktion korrekt ist, kann man eine beliebige Belegung g betrachten und zeigen, dass die Werte der beiden in (56) angegebenen Formeln unter den dort genannten Voraussetzungen gleich sind. Da die Lambda-Abstraktion immer zu Formeln eines Typs der Gestalt ab führt, handelt es sich bei diesen Werten um Funktionen von Objekten des Typs a der Variablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ in Objekte des Typs b von α. Und diese Funktionen sind gleich, wenn sie für alle Objekte u des Typs a denselben Wert liefern. Es muss also gelten, dass $[\![(\lambda \boldsymbol{x}.\alpha)]\!]^{g}(u) = [\![(\lambda \boldsymbol{y}.\alpha[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y}])]\!]^{g}(u)$. Und das ist in der Tat so:

(57) $[\![(\lambda \boldsymbol{x}.\alpha)]\!]^{g}(u)$

nach der Deutung (44') der Abstraktion

$= [\![\alpha]\!]^{g[\boldsymbol{x}/u]}$

nach dem Koinzidenzlemma; denn $\boldsymbol{y} \notin Fr(\alpha)$

$= [\![\alpha]\!]^{g[\boldsymbol{x}/u][\boldsymbol{y}/u]}$

nach dem Substitutionslemma; denn $\boldsymbol{x}$ ist frei für $\boldsymbol{y}$ in α, und $[\![\boldsymbol{x}]\!]^{g[\boldsymbol{x}/u][\boldsymbol{y}/u]} = u = [\![\boldsymbol{y}]\!]^{g[\boldsymbol{x}/u][\boldsymbol{y}/u]}$

$= [\![\alpha[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y}]]\!]^{g[\boldsymbol{x}/u][\boldsymbol{y}/u]}$

nach dem Koinzidenzlemma; denn $\boldsymbol{x} \notin Fr(\alpha[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y}])$

$= [\![\alpha[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y}]]\!]^{g[\boldsymbol{y}/u]}$

nach der Deutung (44') der Abstraktion

$= [\![(\lambda \boldsymbol{y}.\alpha[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y}])]\!]^{g}(u)$

Die in (56) angegebene logische Äquivalenz ist eine Rechenregel, die wir bei der indirekten Deutung häufig anwenden werden. Dabei wird wichtig sein, dass es immer genügend Variablen $\boldsymbol{y}$ gibt, die die dort gestellte Bedingung erfüllen – für die also das zu ersetzende $\boldsymbol{x}$ frei ist und die auch im Skopus des '$\lambda \boldsymbol{x}$' nicht frei vorkommen; denn es gibt unendlich viele Variablen jedes Typs.

Die für die indirekte Deutung wichtigste Rechenregel ist zweifellos die Lambda-Konversion, die wir bereits in der Metasprache kennen gelernt haben. Als typenlogische Äquivalenz können wir sie jetzt allerdings wesentlich genauer fassen:

(58) *Prinzip der Lambda-Konversion*
Es seien α und β typenlogische Formeln und $\boldsymbol{x}$ eine Variable (desselben Typs wie β), die frei ist für β in α. Dann gilt:

$$(\lambda \boldsymbol{x}.\alpha)(\beta) \equiv \alpha[\boldsymbol{x}/\beta]\ .$$

Natürlich muss man auch bei der Lambda-Konversion vermeiden, dass versehentlich Variablen gebunden werden, die vorher frei waren. So ist z.B. $(\lambda \boldsymbol{x}.(\exists \boldsymbol{y})\ \mathbf{T}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}))\ (\boldsymbol{y})$ nicht äquivalent zu $(\lambda \boldsymbol{x}.(\exists \boldsymbol{y})\ \mathbf{T}(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}))$, wie man sich leicht überlegen kann (und soll – in einer Übungsaufgabe). Die Nebenbedingung über die Variable schließt diesen Fall gerade aus.

(58) basiert im wesentlichen auf Koinzidenz- und Substitutionslemma, wobei auch das Prinzip (56) der gebundenen Umbenennung seine Rolle spielt. Sehen wir uns den Nachweis der in (58) behaupteten Äquivalenz (unter den dort genannten Bedingungen) genauer an! Zunächst gilt aufgrund der Deutung (35) der Applikation für beliebige Belegungen g:

(59) $[\![(\lambda \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta})]\!]^g = [\![(\lambda \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha})]\!]^g([\![\boldsymbol{\beta}]\!]^g)$

Um den rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Wert zu bestimmen, empfiehlt sich eine gebundene Umbenennung. Dazu betrachtet man eine Variable $\boldsymbol{z}$ des gemeinsamen Typs von $\boldsymbol{x}$ und β, die weder in α noch in β vorkommt, und zwar weder frei noch gebunden noch in einem Lambda-Präfix. So ein $\boldsymbol{z}$ muss es geben; schließlich gibt es unendlich viele Variablen jedes Typs. Da $\boldsymbol{z}$ in β nicht vorkommt, kann es beim Substituieren für $\boldsymbol{x}$ auch nicht versehentlich gebunden werden, d.h. $\boldsymbol{x}$ ist frei für $\boldsymbol{z}$ in α; da $\boldsymbol{z}$ außerdem nicht in α vorkommt, sind die Bedingungen für die gebundene Umbenennung (56) erfüllt, d.h. die Gleichung (59) lässt sich wie folgt verlängern:

(60) $[\![(\lambda \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta})]\!]^g = [\![(\lambda \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha})]\!]^g([\![\boldsymbol{\beta}]\!]^g) = [\![(\lambda \boldsymbol{z}.\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z}])]\!]^g([\![\boldsymbol{\beta}]\!]^g) = [\![\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z}]]\!]^{g[\boldsymbol{z}/[\![\beta]\!]^g]}$

Der letzte Übergang ist eine einfache Anwendung der Deutung (44') der Abstraktion. Um jetzt das Substitutionslemma anzuwenden, müssen wir garantieren, dass einerseits (i) $\boldsymbol{z}$ frei ist für β in $\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z}]$ und andererseits (ii) $\boldsymbol{z}$ und β bei der Belegung $g[\boldsymbol{z}/[\![\beta]\!]^g]$ denselben Wert haben. (i) ist der Fall, weil $\boldsymbol{z}$ in $\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z}]$ gerade die Stellen besetzt, an denen in α das $\boldsymbol{x}$ stand; und an diesen Stellen wird keine der Variablen von β versehentlich gebunden – denn wir setzen bei der Lambda-Konversion (58) voraus, dass $\boldsymbol{x}$ frei ist für β in α. Aber auch (ii) gilt, denn $[\![\boldsymbol{z}]\!]^{g[\boldsymbol{z}/[\![\beta]\!]^g]} = g[\boldsymbol{z}/[\![\beta]\!]^g](\boldsymbol{z}) = [\![\boldsymbol{\beta}]\!]^g = [\![\boldsymbol{\beta}]\!]^{g[\boldsymbol{z}/[\![\beta]\!]^g]}$ – letzteres aufgrund des Koinzidenzlemmas und weil ja $\boldsymbol{z} \notin Fr(\boldsymbol{\beta})$. Wir erhalten also aus (60) durch Anwendung des Substitutionslemmas:

(60') $[\![(\lambda \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta})]\!]^g = \ldots = [\![\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z}]]\!]^{g[\boldsymbol{z}/[\![\beta]\!]^g]} = [\![\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z}][\boldsymbol{z}/\beta]]\!]^{g[\boldsymbol{z}/[\![\beta]\!]^g]}$

Aber offenbar ist $\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z}][\boldsymbol{z}/\beta] = \boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\beta]$: die zwischendurch eingesetzten $\boldsymbol{z}$ stehen genau dort, wo ursprünglich ein $\boldsymbol{x}$ stand – andere $\boldsymbol{z}$ kommen ja in α nicht vor.[89] (60') reduziert sich somit auf:

(60") $[\![(\lambda \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta})]\!]^g = \ldots [\![\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\beta]]\!]^{g[\boldsymbol{z}/[\![\beta]\!]^g]}$

Da nun aber $\boldsymbol{z}$ weder in α noch in β vorkam, kann es auch nicht in $\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\beta]$ vorkommen; und da sich g und $g[\boldsymbol{z}/[\![\beta]\!]^g]$ nur im Wert für dieses $\boldsymbol{z}$ unterscheiden, erhält $\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\beta]$ an diesen beiden Belegungen laut Koinzidenzlemma denselben Wert. (60") läuft also auf die nachzuweisende Äquivalenz im Prinzip (58) der Lambda-Konversion hinaus:

(61) $[\![(\lambda \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta})]\!]^g = \ldots [\![\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\beta]]\!]^{g[\boldsymbol{z}/[\![\beta]\!]^g]} = [\![\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\beta]]\!]^g$

Die Lambda-Konversion wird in der Praxis vor allem von links nach rechts angewandt, also um eine Formel der Gestalt $(\lambda \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta})$ zu *reduzieren*. In der Regel ist die reduzierte Formel kürzer

89 Allgemeiner und genauer gilt für beliebige Formeln β und Variablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{z}$ desselben Typs: wenn $\boldsymbol{x}$ frei ist für $\boldsymbol{z}$ in einer (beliebigen) Formel α und $\boldsymbol{z} \notin Fr(\alpha)$, dann ist: $\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z}][\boldsymbol{z}/\beta] = \boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{x}/\beta]$. Das lässt sich wieder schrittweise (induktiv) zeigen.

und vor allem leichter lesbar. Da sich die genannte Konstellation bei der indirekten Deutung ausgesprochen häufig ergibt, dabei aber nicht immer die Variablenbedingung erfüllt ist, ist es wichtig zu sehen, dass man letztere durch Anwendung des Prinzips (56) der gebundenen Umbenennung immer umgehen kann. Denn sollte das Argument β eine Variable $\boldsymbol{y}$ enthalten, die beim Einsetzen für $\boldsymbol{x}$ in α versehentlich gebunden würde, kann man *die gebundenen* $\boldsymbol{y}$ *in* α einfach umbenennen – und zwar durch eine Variable, die weder in α noch in β vorkommt und so keinerlei Gefahren birgt. Da es unendlich viele Variablen jedes Typs gibt, lässt sich eine solche Umbenennung immer – notfalls auch mehrfach – durchführen. Wir werden das Abwechseln von gebundener Umbenennung und Lambda-Konversion bereits im nächsten Abschnitt anhand an Beispielen studieren.

Der vielleicht etwas kompliziert anmutende Nachweis von (58) sollte deutlich machen, dass es sich bei der Lambda-Konversion keineswegs um eine willkürliche formale Festlegung handelt, sondern um eine Rechenregel, die sich zwingend aus der Deutung der typenlogischen Formeln ergibt, wie wir sie im vorangehenden Abschnitt angegeben haben. Auch wenn es später manchmal den Anschein haben mag: nicht die Reduktion der Formeln gibt ihn ihren Sinn, sondern ihre kompositionelle Deutung; die Reduktion erhält die Bedeutung der Formel und macht sie in der Regel allerdings leichter fassbar.

Ein spezieller, häufiger und wichtiger Fall der Lambda-Konversion liegt vor, wenn es sich bei dem Argument β in der Konstellation $\boldsymbol{(\lambda x.\alpha)(\beta)}$ 'zufällig' um die im Präfix '$\lambda \boldsymbol{x}$' gebundene Variable handelt: $\boldsymbol{(\lambda x.\alpha)(x)}$. Zunächst scheint in diesem Fall die Variablenbedingung nicht ganz offensichtlich erfüllt zu sein; denn das Argument β ist die Variable $\boldsymbol{x}$, was bedeutet, dass *Fr*(β) „ Ø. Um die λ-Konversion anzuwenden, müsste man also zunächst überprüfen, ob eine in β freie Variable beim Einsetzen in α versehentlich gebunden würde. Da *Fr*(β) = {$\boldsymbol{x}$}, genügt es zu überprüfen, ob dies für $\boldsymbol{x}$ der Fall wäre, ob also die durch das λ gebundene Variable $\boldsymbol{x}$ frei ist für $\boldsymbol{x}$ selbst in α. Nun werden aber bei der Ersetzung nur die *freien* Vorkommen von $\boldsymbol{x}$ in α erfasst, und wenn man für diese freien $\boldsymbol{x}$ wieder $\boldsymbol{x}$ einsetzt, ändert sich ganz offensichtlich nichts — $\boldsymbol{\alpha}[{}^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{x}}] = \boldsymbol{\alpha}$; insbesondere bleiben die $\boldsymbol{x}$ frei, d.h. eine versehentliche Bindung ist ausgeschlossen. Die Konversion darf also durchgeführt werden, und weil $\boldsymbol{\alpha}[{}^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{x}}] = \boldsymbol{\alpha}$, läuft sie auf eine Streichung des Präfixes '$\lambda \boldsymbol{x}.$' und des Arguments '$\boldsymbol{(x)}$' hinaus. Wir halten diesen Spezialfall der Lambda-Konversion als eigenes Prinzip fest:

(58*) *Prinzip der Eigen-Konversion*
Es seien α eine typenlogische Formel und $\boldsymbol{x}$ eine Variable. Dann gilt:

$$\boldsymbol{(\lambda x.\alpha)(x)} \equiv \alpha.$$

Neben den bisher eingeführten, grundlegenden Äquivalenzen gibt es noch weitere Rechenregeln, die zwar nicht ganz so oft zum Einsatz kommen, die aber gelegentlich hilfreich sein können und deren Kenntnis auf alle Fälle für das Verständnis des Formalismus unerlässlich ist. Einige von ihnen listen wir hier einfach auf; weitere werden wir erwähnen, wenn wir sie benötigen. Alle lassen sich relativ leicht nachweisen:

(62) *Logische Äquivalenzen*
Für alle Formeln φ, ψ und χ des Typs π und alle Variablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ (beliebigen, nicht notwendigerweise desselben) Typs gilt:

(a) $\neg\neg\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\varphi}$

(b) $[\boldsymbol{\varphi} \wedge [\boldsymbol{\psi} \wedge \boldsymbol{\chi}]] \equiv [[\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi}] \wedge \boldsymbol{\chi}]$

(c) $(\exists \boldsymbol{x})\,(\exists \boldsymbol{y})\,\boldsymbol{\varphi} \equiv (\exists \boldsymbol{y})\,(\exists \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\varphi}$

(d) $(\exists \boldsymbol{x})\,[\boldsymbol{\varphi} \wedge (\exists \boldsymbol{y})\,\boldsymbol{\psi}] \equiv (\exists \boldsymbol{x})\,(\exists \boldsymbol{y})\,[\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi}]$ – *falls* $\boldsymbol{y} \notin Fr(\boldsymbol{\psi})$

4.5 *Indirekte Deutung*

Wir sind jetzt in der Lage, die in den vorangehenden Kapiteln gegebene Interpretation natürlichsprachlicher Konstruktionen im Rahmen der indirekten Deutung zu rekonstruieren. Dabei werden wir für jeden natürlichsprachlichen Ausdruck A eine typenlogische Übersetzung $|A|$ angeben, deren semantischer Wert gerade die Bedeutung ist, die er nach der zuvor gegebenen direkten Deutung hat. Nach den schon geleisteten Vorüberlegungen ist das nicht mehr sonderlich schwierig. Wir gehen kompositionell vor und müssen also zunächst einmal typenlogische Entsprechungen für die lexikalischen Ausdrücke angeben. Wie bereits angekündigt, handelt es sich dabei meistens um (nicht-logische) Konstanten:

(63) $|\textbf{Eike}| = \mathbf{e}$; $|\textbf{Fritz}| = \mathbf{f}$; $|\textbf{Hans}| = \mathbf{h}$; … [Konstanten des Typs e]
$|\textbf{arbeitet}| = \mathbf{A}$; $|\textbf{Mann}| = \mathbf{M}$; $|\textbf{Frau}| = \mathbf{F}$; … [Konstanten des Typs $e\pi$]
$|\textbf{trifft}| = \mathbf{T}$; $|\textbf{sieht}| = \mathbf{S}$; $|\textbf{knutscht}| = \mathbf{K}$;… [Konstantenn des Typs $e(e\pi)$]

Weitere lexikalische Übersetzungen werden wir bei Bedarf einführen. Dabei gehen wir immer davon aus, dass die Konstanten so gedeutet werden wie die entsprechenden lexikalischen Ausdrücke in der direkten Deutung: der (belegungsunabhängige) semantische Wert von **f** ist das Individuum Fritz; der Wert von **A** weist jedem Individuum die Menge der Situationen zu, in denen dieses Individuum arbeitet; etc. Allerdings werden wir – auch darauf wurde bereits hingewiesen – einige Wörter statt durch Konstanten durch komplexe Formeln übersetzen. Das gilt insbesondere für die (Satz-) koordinierenden Konjunktionen **und** und **oder**. Erstere entspricht der *logischen* Konstanten $\wedge$ und wird durch diese übersetzt. Bei letzterer drücken wir stattdessen die Vereinigungsoperation durch eine komplexe Formel aus:

(64a) $|\textbf{und}| = \wedge$
(b) $|\textbf{oder}| = (\lambda \boldsymbol{q}_{\pi}.\ (\lambda \boldsymbol{p}_{\pi}.\ \neg\ [\ \neg\ \boldsymbol{p} \wedge\ \neg\ \boldsymbol{q}]))$

Wendet man den semantischen Wert von (64b) hintereinander auf zwei Propositionen q und p an, ergeben sich diejenigen Situationen, für die nicht gilt, dass sie weder in p noch in q liegen – also diejenigen, auf die mindestens eine der beiden Propositionen zutrifft. Natürlich hätten wir auch für **oder** eine logische Konstante '$\vee$' einführen und diese dann als Vereinigung von Propositionen deuten können. Aber einerseits ist die Tatsache, dass man die Disjunktion auf die Konjunktion (und Negation) zurückführen kann, an sich interessant.[90] Andererseits können wir auch die Notation

$$[\varphi \vee \psi]$$

als Abkürzung für die folgende in (64b) verwendete Formelkombination auffassen – was wir ab jetzt auch tun werden:

$$\neg\ [\ \neg\ \varphi \wedge\ \neg\ \psi]$$

Auch die meisten Determinatoren werden durch komplexe Formeln übersetzt. Zwei Beispiele, die Übersetzungen von **ein** und **kein**, haben wir schon in (24) und (25) kennen gelernt. Die anderen liegen angesichts der direkten Deutung aus Abschnitt 3.2 nahe:

(65a) $|\textbf{kein-}| = (\lambda \boldsymbol{Q}_{e\pi}.\ (\lambda \boldsymbol{P}_{e\pi}.\ \neg\ (\exists \boldsymbol{x}_e)\ [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]))$
(b) $|\textbf{ein-}_{indef}| = (\lambda \boldsymbol{Q}_{e\pi}.\ (\lambda \boldsymbol{P}_{e\pi}.\ \neg\ (\exists \boldsymbol{x}_e)\ [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]))$
(c) $|\textbf{ein-}_{Num}| = (\lambda \boldsymbol{Q}_{e\pi}.\ (\lambda \boldsymbol{P}_{e\pi}.(\exists \boldsymbol{x}_e)\ [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\ (\exists \boldsymbol{y}_e)\ [\neg(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})]]))$
(d) $|\textbf{jed-}| = (\lambda \boldsymbol{Q}_{e\pi}.\ (\lambda \boldsymbol{P}_{e\pi}.\ \neg\ (\exists \boldsymbol{x}_e)\ [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]))$
(e) $|\textbf{die meisten}| = \mathbf{M}$ [Konstante des Typs $(e\pi)\pi$]

[90] Die Rückführung, die auch in der anderen Richtung funktioniert, ist bereits in der Antike bekannt gewesen und wird heute als *de Morgansches Gesetz* bezeichnet.

(f) $|\mathbf{d}\text{-}_{Russell}| = (\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{Q}_{e\pi}. (\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{P}_{e\pi}. (\exists \boldsymbol{x}_e) [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg (\exists \boldsymbol{y}_e) [\neg(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})] \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]))$

Die Übersetzung (65c) von **ein-** als Zahlwort sieht sehr kompliziert aus, bewirkt aber nur, dass nach Kombination mit Substantiv und Prädikat die Menge der Situationen herauskommt, in denen der Schnitt ihrer Extensionen gerade aus einem Individuum x besteht – in denen es also ein x gibt, das sowohl in der Substantiv-Extension Q als auch in der Prädikatsextension P liegt, ohne dass es ein weiteres (= *von x verschiedenes*) Individuum y gibt, das ebenfalls in diesem Schnitt liegt. Auch bei den Übersetzungen (65d) und (65f) überzeugt man sich leicht, dass ihre Werte gerade die in Kapitel 3 gegebenen Deutungen sind. In (65e) dagegen haben wir den Determinator **die meisten** mit einer nicht-logischen Konstanten übersetzt, von deren korrekter Deutung wir wieder ausgehen.

Kommen wir nun zu den komplexen Ausdrücken. Wir folgen in dem Sinne dem Kompositionalitätsprinzip, als wir bei jeder der in den vorangehenden Kapiteln betrachteten grammatischen Konstruktionen angeben, wie sich die typenlogische Übersetzung des Gesamtausdrucks aus den Übersetzungen seiner Teile ergibt. Auf diese Weise ergibt sich dann die auch die Bedeutung des Gesamtausdruck kompositionell aus den Bedeutungen der Übersetzungen seiner Teile. Das erste Beispiel ist die in Kapitel 1 analysierte Satzkoordination, die sich in der indirekten Deutung wie folgt ausnimmt:

(66) *Indirekte Deutung der Satzkoordination*
Wenn S und S' (Aussage-) Sätze sind und K eine koordinierende Konjunktion ist, gilt:
$|S\,K\,S'| = |K|\,\boldsymbol{(}|S'|\boldsymbol{)}\,\boldsymbol{(}|S|\boldsymbol{)}$.

(Der Einfachheit halber haben wir in (66) eine ternäre Verzweigung für Koordinationen unterstellt.) Man mache sich klar, wie die Gleichung in (66) zu verstehen ist. Danach erhält man die Übersetzung zweier durch **und** bzw. **oder** (allgemein: durch eine Konjunktion K) koordinierter Sätze S und S' – also die Übersetzung von ‘ $S\ K\ S'$ ’; also: $|S\ K\ S'|$ – indem man zunächst die Konjunktion selbst in die Typenlogik übersetzt (das ist dann irgendeine Formel $|K|$) und dahinter jeweils in (fette) Klammern die Übersetzungen der Teile – also entsprechende Formeln $|S|$ und $|S'|$ – folgen lässt. Da $|S|$ und $|S'|$ selbst wieder Formeln des Typs π sind und die Konjunktion K durch eine Formel des Typs $\pi(\pi\pi)$ übersetzt wird, erhält man insgesamt nach (66) eine Formel des Typs π. Bevor wir die Regel auf ein konkretes Beispiel anwenden, übersetzen wir noch die Konstruktionen aus Kapitel 2:

(67) *Indirekte Deutung der Prädikation*
Wenn S ein Satz ist, an dessen Subjektstelle ein Eigenname NN steht und dessen Prädikat P ist, dann gilt:
$|S| = |P|\,\boldsymbol{(}|NN|\boldsymbol{)}$.

(68) *Indirekte Deutung der Anbindung von Eigennamen als Objekten*
Wenn P ein Prädikat bestehend aus einem Verb V und einem Eigennamen NN als Objekt ist, dann gilt:
$|P| = |V|\,\boldsymbol{(}|NN|\boldsymbol{)}$.

Testen wir diese Regeln anhand eines Beispiels:

(69) **Eike arbeitet und Fritz trifft Hans.**

Die Übersetzung folgt der offenkundigen Konstituentenstruktur des Satzes:

(70) |**Eike arbeitet und Fritz trifft Hans** | — nach(66)
= |**und**| **(**|**Fritz trifft Hans**|**)** **(**|**Eike arbeitet**|**)** — nach (67) [2 x]
= |**und**| **(**|**trifft Hans**|**(**|**Fritz**|**))** **(**|**arbeitet**|**(**|**Eike**|**))** — nach (68)

$= \quad |\mathbf{und}|\ (|\mathbf{trifft}|(|\mathbf{Hans}|)\ (|\mathbf{Fritz}|))\ (|\mathbf{arbeitet}|\ (|\mathbf{Eike}|))$ nach (63) und (64a)

$= \quad \wedge\ \mathbf{(T\ (h)\ (f))\ (A\ (e))}$

Die resultierende Formel lässt sich mithilfe der für die Konjunktion eingeführten Notation umschreiben als $\mathbf{[A(e) \wedge T(h)(f)]}$; und mit einer ähnlichen Konvention bringt man das rechte Konjunkt in die Oberflächenreihenfolge der natürlichen Sprache und erhält so:

(71) $\mathbf{[A(e) \wedge T(f,h)]}$

Man beachte, dass es sich bei der Reformulierung (71) der in (70) berrechneten Übersetzung von (69) lediglich um eine notationelle Variation handelt. Die typenlogische Formel ist haargenau dieselbe, sie wird nur anders dargestellt. Der Übergang stellt also keine logische Reduktion aufgrund irgendwelcher Rechenregeln dar. In der Tat: diese Formel lässt sich durch logische Umformung allenfalls verschlimmbessern. Bei der folgenden Variante liegt der Fall dagegen anders:

(72) **Eike arbeitet oder Fritz trifft Hans.**

Die Übersetzung funktioniert natürlich genauso wie in (70) – mit Ausnahme der letzten Zeile, wo statt der logischen Konstanten $\wedge$ die in (64b) gegebene komplexe Übersetzung von **oder** hereinkommt:[91]

(73) $|\mathbf{Eike\ arbeitet\ oder\ Fritz\ trifft\ Hans}\ |$ nach (66)

$= \quad |\mathbf{oder}|\ (|\mathbf{Fritz\ trifft\ Hans}|)\ (|\mathbf{Eike\ arbeitet}|)$ nach (67) [2 x]

$= \quad |\mathbf{oder}|\ (|\mathbf{trifft\ Hans}|(|\mathbf{Fritz}|))\ (|\mathbf{arbeitet}|(|\mathbf{Eike}|))$ nach (68)

$= \quad |\mathbf{oder}|\ (|\mathbf{trifft}|(|\mathbf{Hans}|)\ (|\mathbf{Fritz}|))\ (|\mathbf{arbeitet}|\ (|\mathbf{Eike}|))$ nach (63) und (64b)

$= \quad (\lambda \boldsymbol{q}.\ (\lambda \boldsymbol{p}.\ [\ \boldsymbol{p} \vee\ \boldsymbol{q}]))\ \mathbf{(T(h)(f))\ (A(e))}$

Auch hier können wie die soeben eingeführte Konvention anwenden, um die Übersetzung des zweiten Teilsatzes etwas aufzumotzen – aber viel bringt das nicht:

(74) $(\lambda \boldsymbol{q}.\ (\lambda \boldsymbol{p}.\ [\ \boldsymbol{p} \vee\ \boldsymbol{q}]))\ \mathbf{(T(f,h))\ (A\ (e))}$

Doch natürlich lässt sich diese Formel mithilfe einer Rechenregel weiter reduzieren. Zwar ist die Gesamtformel nicht von der in (58) verlangten Gestalt; denn es handelt sich um eine Applikation $\gamma(\delta)$, wobei aber γ kein λ-Term ist, sondern selbst wieder eine Applikation. Aber dieser Teil γ erfüllt ganz offenkundig eine für die Lambda-Konversion einschlägige Konstellation: Er hat die Gestalt '$(\lambda \boldsymbol{x}.\alpha)(\beta)$' – α ist der Teil ab '$(\lambda \boldsymbol{q}\ldots$ ' und bis ausschließlich '$\mathbf{(T(f,h))}$', $\boldsymbol{x}$ ist $\boldsymbol{q}$, und β ist gerade das Argument $\mathbf{T(f,h)}$. Da außerdem dieses β gar keine Variablen enthält – **T**, **h** und **f** sind nicht-logische Konstanten –, ist natürlich $\boldsymbol{q}$ frei für β in α, und die Konversion kann losgehen:

(75) $(\lambda \boldsymbol{p}.\ [\ \boldsymbol{p} \vee\ \mathbf{T(f,h)}])\ \mathbf{(A(e))}$

Und das ist natürlich selbst wieder eine einschlägige Konstellation. Eine weitere Konversion liefert:

(76) $\mathbf{[A(e) \vee\ T(f,h)]}$

(76) ist eine (logisch) *reduzierte* Übersetzung von (72), d.h. eine Formel, die aufgrund irgendwelcher Rechenregeln der eigentlichen Übersetzung in (73) logisch äquivalent ist. Die Reduktion von (74) auf (76) ist aus zwei Gründen relativ einfach. Zum einen gab es hier jeweils nur eine Möglichkeit, das Gesetz der Lambda-Konversion einzusetzen; sowohl in der Übersetzung (74) selbst als auch in der ersten Reduktion (75) lag die einschlägige Konstellation nur

91 Die Typenindizes an den Variablen lassen wir weg, wenn sie sich aus dem Kontext ergeben.

einmal vor. Zum anderen war die Variablenbedingung in beiden Fällen trivialerweise erfüllt, da das einzusetzende Argument ohnehin keine Variablen enthielt. Beide Umstände sind nicht unbedingt der Regelfall, wie wir sehen werden, sobald wir die verbleibenden Konstruktionen übersetzen und miteinander interagieren lassen. Diese Konstruktionen führen quantifizierende Nominale an Subjekt- und Objektstelle ein. Bei der Subjektquantifikation kehren sich gegenüber den in (67) übersetzten Eigennamen lediglich Funktion und Argument um:

(77) *Indirekte Deutung der Quantifikation*
Wenn S ein Satz ist, an dessen Subjektstelle eine quantifizierende Nominalphrase QN steht und dessen Prädikat P ist, dann gilt:
$$|S| = |QN|(P).$$

Und auch im Fall von Quantoren an Objekstelle lässt sich die die in Abschnitt 3.4 gegebene Bedeutungskombination unmittelbar in typenlogische Formeln übertragen:

(78) *Indirekte Deutung der Anbindung quantifizierender Nominalphrasen als Objekte*
Wenn P ein Prädikat ist, bestehend aus einem Verb V und einer quantifizierenden Nominalphrase QN als Objekt, dann gilt:[92]
$$|P| = \lambda \boldsymbol{x}_e.\ |QN|((\lambda \boldsymbol{y}_e.\ |V|(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})))$$

Wir setzen (77) und (78) gleich auf ein Beispiel an, was uns Gelegenheit geben wird, die Zusammenwirkung von gebundener Umbenennung und Lambda-Konversion zu illustrieren. Zuvor müssen wir noch die Übersetzung von nicht-lexikalischen Nominalphrasen angeben. In Kapitel 3 hatten wir nicht eigens eine Regel dafür angegeben, weil sich diese implizit aus dem Umstand ergab, dass die Bedeutungen der Determinatoren per Differenz ermittelt wurden. Als Bedeutungskombination für die Konstruktion der quantifizierenden Nominale kommt damit nur die Funktionalapplikation in Frage, womit wir die folgende Übersetzungsregel erhalten:

(79) *Indirekte Deutung der quantifizierenden Nominalphrasen*
Wenn QN eine quantifizierende Nominalphrase ist, bestehend aus einem Determinator D und Nomen N, dann gilt:
$$|QN| = |D|(|N|)$$

Mit (79) haben wir den gesamten Bestand der in den Kapiteln 1–3 erarbeiteten Interpretation in die Methodologie der indirekten Deutung übertragen. Betrachten wir nun ein etwas komplexeres Beispiel:

(80) **Jeder Mann trifft eine Frau.**

Zunächst liefern die einschlägigen Übersetzungsregeln:

(81)	$|$**Jeder Mann trifft eine Frau**$|$	nach(77)
=	$|$**jeder Mann**$|$ ($|$**trifft eine Frau**$|$)	nach (79)
=	$|$**jeder**$|$($|$**Mann**$|$) ($|$**trifft eine Frau**$|$)	nach (78)
=	$|$**jeder**$|$($|$**Mann**$|$) $(\lambda \boldsymbol{x}.\ |$**eine Frau** $|(\lambda \boldsymbol{y}.\ |$**trifft** $|(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})))$	nach (79)
=	$|$**jeder**$|$($|$**Mann**$|$) $(\lambda \boldsymbol{x}.\ |$ **eine**$|$ ($|$**Frau**$|$) $(\lambda \boldsymbol{y}.\ |$**trifft** $|(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})))$	nach (63) [3x]
=	$|$**jeder**$|$(**M**) $(\lambda \boldsymbol{x}.\ |$ **eine**$|$ (**F**) $(\lambda \boldsymbol{y}.\ \mathbf{T}(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})))$	nach (65d)
=	$(\lambda \boldsymbol{Q}.\ (\lambda \boldsymbol{P}.\ \neg (\exists \boldsymbol{x})\ [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]))$ (**M**) $(\lambda \boldsymbol{x}.\ |$ **eine**$|$ (**F**) $(\lambda \boldsymbol{y}.\ \mathbf{T}(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})))$	nach (65a)

92 Die doppelten Klammern um den mit '$\lambda \boldsymbol{x}$.' beginnende Teil ergeben sich aus der Syntax der Typenlogik: der Lambda-Term beginnt und endet nach (21*Abs*) mit einer Klammer; und als Argument von 'QN' muss er nach (21*App*) noch einmal mit Klammern umschlossen werden. Aber meistens lassen wir diese Doppelklammerungen weg.

$$= \quad (\lambda Q.\ (\lambda P.\ \neg\ (\exists x)\ [Q(x) \wedge \neg\ P(x)]))\ \ (\mathbf{M})$$
$$((\lambda x.\ (\lambda Q.\ (\lambda P.\ (\exists x)\ [Q(x) \wedge P(x)]))\ \ (\mathbf{F})\ \ (\lambda y.\ \mathbf{T}(y)(x))))$$

Die in (81) ermittelte typenlogische Übersetzung von (80) enthält die für die Lambda-Konversion einschlägige Konstellation '$(\lambda x.\alpha)\ (\beta)$' zweimal. Zum einen hat die Gesamtformel die Gestalt '$\underline{(\lambda Q.\alpha)\ (\beta)}\ (\gamma)$'; hier lässt sich die Konversion auf dem unterstrichenen Teil unmittelbar durchführen, denn β ist die Konstante **M**, die keine Variable enthält. Zum anderen ist das Argument γ selbst von der Form '$(\lambda x.\ \underline{\underline{(\lambda Q.\alpha')\ \ (\beta')}}\ (\gamma))$', wobei die Konversionsregel beim doppelt unterstrichenen Teil greift – und wieder unmittelbar anwendbar ist, denn β' ist die Konstante **F**. Reduziert man die einfach unterstrichene Formel, ergibt sich (82a); führt man die Konversion auf dem doppelt unterstrichenen Teil aus, bekommt man (82b):

(82a) $(\lambda P.\ \neg\ (\exists x)\ [\mathbf{M}(x) \wedge \neg\ P(x)])$
$$((\lambda x.\ (\lambda Q_{e\pi}.\ (\lambda P_{e\pi}.\ (\exists x)\ [Q(x) \wedge P(x)]))\ (\mathbf{F})\ \ (\lambda y.\ \mathbf{T}\ (y)(x))))$$

(b) $(\lambda Q.\ (\lambda P.\ \neg\ (\exists x)\ [Q(x) \wedge \neg\ P(x)]))\ \ (\mathbf{M})$
$$((\lambda x.\ (\lambda P.\ (\exists x)\ [\mathbf{F}(x) \wedge P(x)])\ (\lambda y.\ \mathbf{T}\ (y)(x))))$$

(82a) ist insgesamt von der Form '$(\lambda x.\ \alpha)\ (\beta)$'. Des weiteren enthält das Argument keine freie Variable, wie man leicht nachprüft; das Gleiche gilt für die erste Zeile von (82b), bei der das Argument die Konstante **M** ist. Also lässt sich wieder die Lambda-Konversion anwenden, und wir erhalten in beiden Fällen:

(83) $(\lambda P.\ \neg\ (\exists x)\ [\mathbf{M}(x) \wedge \neg\ P(x)])\ ((\lambda x.\ (\lambda P.\ (\exists x)\ [\mathbf{F}(x) \wedge P(x)])\ \ (\lambda y.\ \mathbf{T}\ (y)(x))))$

Dass das Ergebnis jedes Mal dasselbe ist, darf nicht verwundern; die alternativen Konversionen, die auf das Endergebnis von (81) angewandt wurden, spielten sich in zwei separaten Teilen der Formel ab: die Gesamtformel hatte die Gestalt '$\underline{(\lambda x.\ \alpha)\ (\beta)}\ (\gamma)$', und einmal haben wir zuerst den unterstrichenen Teil reduziert und danach das Argument γ, beim anderen Mal sind wir umgekehrt vorgegangen. Am Ergebnis (83) ändert das natürlich nichts.

(83) lässt sich wieder auf zwei alternative Weisen reduzieren. Zunächst hat die Gesamtformel die Gestalt '$(\lambda P.\ \alpha)\ (\beta)$', wobei das Argument β wieder keine freien Variablen enthält. Die Anwendung der Lambda-Konversion ergibt dafür:

(84) $\neg\ (\exists x)\ [\mathbf{M}(x) \wedge \neg\ \underline{(\lambda x.\ (\lambda P.(\exists x)\ [\mathbf{F}(x) \wedge P(x)])(\lambda y.\mathbf{T}(y)(x)))}\ (x)]$

Der Übersichtlichkeit halber haben wir dabei die Stelle, an die das ursprüngliche Argument β für die Variable P eingesetzt wurde, unterstrichen. Man sieht deutlich, dass dieser unterstrichene Teil selbst wieder von der Form '$(\lambda x.\ \alpha)$ ' ist und ihm das Argument x unmittelbar folgt. Es liegt also die für die Eigen-Konversion (58*) einschlägige Konstellation vor, die auf eine Streichung des Präfixes '$\lambda x.$' und des Arguments '(x)' hinausläuft:

(85) $\neg\ (\exists x)\ [\mathbf{M}(x) \wedge \neg\ (\lambda P.\ (\exists x)\ [\mathbf{F}(x) \wedge P(x)])(\lambda y.\mathbf{T}(y)(x))]$

Bevor wir weiter machen, sei darauf hingewiesen, dass die Variablenbedingung nur die Freiheit der Variablen *in* β betrifft. Die Tatsache, dass die Variable x in der Gesamtformel (84) – wie alle Variablen in dieser Formel – gebunden ist, spielt keine Rolle. Denn die-se Bindung geschieht von außen (durch den Existenzquantor ganz links[93]), und durch die Bedingung soll verhindert werden, dass ein anderer Operator interveniert und damit die Bindungsbeziehung zwischen dem Existenzquantor und der Variablen zerstört. Aber diese Bindungsbeziehung besteht gerade,

93 Genauer gesagt bindet das in der Notation '$(\exists x)$ …' versteckte Lambda. Aber wir werden die in der Prädikatenlogik übliche (und dort gerechtfertigte) Redeweise von der Bindung der Variablen durch Quantoren übernehmen.

weil $\boldsymbol{x}$ in β – und bei Bestehen der Bedingung dann auch in $\alpha[^{x}/_{\beta}]$ – frei ist. Der Punkt wird klar, wenn wir versuchen, (85) weiter zu reduzieren. Denn auch diese Formel enthält wieder eine potenziell einschlägige Konstellation, nämlich den Teil:

(86) $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{P}.\ (\exists \boldsymbol{x})\ [F(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})])(\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}$

Das Argument β in (86) enthält diesmal zwei Variablen, von denen eine, nämlich $\boldsymbol{x}$, frei ist. Zu überprüfen ist demnach, ob dieses $\boldsymbol{x}$ gebunden würde, wenn man β für $\boldsymbol{P}$ einsetzt. Das ist aber unglücklicherweise der Fall: $\boldsymbol{P}$ steht im α-Teil von (86) im Skopus von '$(\exists \boldsymbol{x})$' und würde somit von diesem Existenzquantor gebunden. Die Lambda-Konversion ist also auf (86) bzw. (85) nicht anwendbar. Stattdessen müssen wir zuerst eine gebundene Umbenennung vornehmen, um auf diese Weise die Voraussetzung für die Anwendung einer Lambda-Konversion zu schaffen. Da die Variable $\boldsymbol{x}$ die Variablenbedingung verletzt hat, müssen wir also in (86) bzw. (85) die Bindung '$(\exists \boldsymbol{x})$' so ändern, dass die Bedingung erfüllt ist. Wie bereits erwähnt, kann man dies erreichen, indem man durch eine Variable (gleichen Typs) umbenennt, die nirgends in der Gesamtformel vorkommt – sagen wir einmal: $\boldsymbol{z}$. Aus (86) wird dann:

(87) $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{P}.\ (\exists \boldsymbol{z})\ [F(\boldsymbol{z}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})])(\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}$

Jetzt ist offensichtlich die Variablenbedingung erfüllt – das war der Zweck der Übung; denn die in β freie Variable $\boldsymbol{x}$ bleibt nach Anwendung der Lambda-Konversion frei:

(88) $\mathbf{(\exists \boldsymbol{z})\ [F(\boldsymbol{z}) \wedge (\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{z})]}$

Bevor wir (88) in die Gesamtformel (85) einsetzen, reduzieren wir noch einmal, was diesmal ohne Problem möglich ist: die einzige einschlägige Konstellation enthält nämlich im α-Teil keinen bindenen Operator. Wir erhalten so:

(89) $\mathbf{(\exists \boldsymbol{z})\ [F(\boldsymbol{z}) \wedge T(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x})]}$

(86) lässt sich also auf (89) reduzieren, und da (86) ein Teil der reduzierten Übersetzung (85) war, kann man ihn auch dort durch das äquivalente, aber kürzere (90) ersetzen:

(90) $\mathbf{\neg (\exists \boldsymbol{x})\ [M(\boldsymbol{x}) \wedge \neg (\lambda \boldsymbol{P}.\ (\exists \boldsymbol{x})\ [F(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})])(\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))]}$ [= (85)]
$\equiv$ $\mathbf{\neg (\exists \boldsymbol{x})\ [M(\boldsymbol{x}) \wedge \neg (\exists \boldsymbol{z})\ [F(\boldsymbol{z}) \wedge T(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x})]]}$

Beim Übergang von (84) zu (85) hatten wir den hervorgehobenen Lambda-Term reduziert. Doch es gab noch eine weitere potenziell einschlägige Konstellation in dieser Formel, nämlich (86), die ja auch ein Teil von (84) ist. Wir hätten also die soeben vorgeführte Reduktion von (86) ebensogut innerhalb von (85) vornehmen können:

(91) $\mathbf{\neg (\exists \boldsymbol{x})\ [M(\boldsymbol{x}) \wedge \neg (\lambda \boldsymbol{x}.\ (\lambda \boldsymbol{P}.\ (\exists \boldsymbol{x})\ [F(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})])(\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})))\ (\boldsymbol{x})]}$ [= (85)]
$\equiv$ $\mathbf{\neg (\exists \boldsymbol{x})\ [M(\boldsymbol{x}) \wedge \neg (\lambda \boldsymbol{x}.\ (\lambda \boldsymbol{P}.\ (\exists \boldsymbol{z})\ [F(\boldsymbol{z}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})])(\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})))\ (\boldsymbol{x})]}$
$\equiv$ $\mathbf{\neg (\exists \boldsymbol{x})\ [M(\boldsymbol{x}) \wedge \neg (\lambda \boldsymbol{x}.\ (\exists \boldsymbol{z})\ [F(\boldsymbol{z}) \wedge (\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{z})])\ (\boldsymbol{x})]}$
$\equiv$ $\mathbf{\neg (\exists \boldsymbol{x})\ [M(\boldsymbol{x}) \wedge \neg \underline{(\lambda \boldsymbol{x}.\ (\exists \boldsymbol{z})\ [F(\boldsymbol{z}) \wedge T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z})])\ (\boldsymbol{x})}]}$

Ähnlich wie beim Übergang von (84) zu (85) lässt sich an der unterstrichenen Stelle eine Eigen-Konversion durchführen:

(92) $\mathbf{\neg (\exists \boldsymbol{x})\ [M(\boldsymbol{x}) \wedge \neg (\lambda \boldsymbol{x}.\ (\exists \boldsymbol{z})\ [F(\boldsymbol{z}) \wedge T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z})])\ (\boldsymbol{x})]}$
$\equiv$ $\mathbf{\neg (\exists \boldsymbol{x})\ [M(\boldsymbol{x}) \wedge \neg (\exists \boldsymbol{z})\ [F(\boldsymbol{z}) \wedge T(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x})]]}$

Ebensogut hätten wir die letzten beiden Übergänge – Reduktion von '$\lambda \boldsymbol{x}$' und '$\lambda \boldsymbol{y}$' vertauschen können – wieder mit demselben Ergebnis. Interessanterweise führt die für (83) alternative Reduktion auch zu diesem Ziel. Diese Alternative besteht darin, statt der Gesamtformel den Teil (86) zu reduzieren, der ebenfalls in (83) auftritt. Wir überlassen diese Alternative einer Übungsaufgabe und halten nur fest, dass alle Reduktionen auf dasselbe Ergebnis hinauslaufen. Das ist kein Zufall, sondern ergibt sich aus einer allgemeinen Eigenschaft der Typenlogik, auf die wir hier nicht näher eingehen können. Die Eigenschaft heißt *starke Normalisierbarkeit* und besagt, dass zum einen jede typenlogische Formel auf eine sog. *Normalform* reduziert werden kann, und zum anderen jeweils zwei Normalformen *alphabetische Varianten* voneinander sind. Dabei ist eine Normalform eine Formel, die keine für die Lambda-Konversion (potenziell) einschlägige Konstellation '$(\lambda \boldsymbol{x}.\alpha)\ (\beta)$' enthält; und alphabetische Varianten sind Formeln, die durch (eventuell mehrfache) gebundene Umbenennung ineinander überführt werden können. Der Nachweis der starken Normalisierbarkeit ist sehr komplex und würde den Rahmen dieses Skripts sprengen. Für die indirekte Deutung ist sie nur insofern von Interesse, als wir mit ihr sicher gehen können, dass die genaue Vorgehensweise bei der Reduktion typenlogischer Formeln unwichtig ist: solange man keine potenziell einschlägige Konstellation der Form '$(\lambda \boldsymbol{x}.\alpha)\ (\beta)$' außer Acht lässt und nötigenfalls gebunden umbenennt, führen ohnehin alle Wege nach Rom – sprich: zur Normalform.[94]

Bevor wir eine letzte und erhebliche Revision des typenlogischen Formalismus und der indirekten Deutung vornehmen, sei noch auf ein Detail beim Umbenennen gebundener Variablen hingewiesen. Nehmen wir dazu noch einmal den ersten Schritt der obigen Reduktion (90) unter die Lupe

(93) $\neg\, (\exists \boldsymbol{x})\ [\mathbf{M}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\, \underline{(\lambda \boldsymbol{P}.}\ \underline{(\exists \boldsymbol{x})}\ \underline{[\mathbf{F}(\boldsymbol{x})} \wedge \underline{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})])}\ \underline{(\lambda \boldsymbol{y}.\mathbf{T}(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}\ ]$ [= (85)]

$\equiv$ $\neg\, (\exists \boldsymbol{x})\ [\mathbf{M}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\, \underline{(\lambda \boldsymbol{P}.}\ \underline{(\exists \boldsymbol{z})}\ \underline{[\mathbf{F}(\boldsymbol{z})} \wedge \underline{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})])(\lambda \boldsymbol{y}.\mathbf{T}(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}\ ]$

$\equiv$ $\neg\, (\exists \boldsymbol{x})\ [\mathbf{M}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\, (\exists \boldsymbol{z})\ [\mathbf{F}(\boldsymbol{z}) \wedge \mathbf{T}(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x})]]$

Um hier die Lambda-Konversion an der markierten Stelle durchführen zu können, hatten wir zunächst im α-Teil eine gebundene Umbenennung vorgenommen. Stattdessen hätten wir auch wie folgt vorgehen können:

(94) $\neg\, \underline{(\exists \boldsymbol{x})}\ [\mathbf{M}(\underline{\boldsymbol{x}}) \wedge \neg\, (\lambda \boldsymbol{P}.\ (\exists \boldsymbol{x})\ [\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})])\ (\lambda \boldsymbol{y}.\mathbf{T}(\boldsymbol{y})(\underline{\boldsymbol{x}}))\ ]$ [= (85)]

$\equiv$ $\neg\, \underline{(\exists \boldsymbol{z})}\ [\mathbf{M}(\underline{\boldsymbol{z}}) \wedge \neg\, (\lambda \boldsymbol{P}.\ (\exists \boldsymbol{x})\ [\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})])\ (\lambda \boldsymbol{y}.\mathbf{T}(\boldsymbol{y})(\underline{\boldsymbol{z}}))\ ]$

$\equiv$ $\neg\, (\exists \boldsymbol{x})\ [\mathbf{M}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\, (\exists \boldsymbol{z})\ [\mathbf{F}(\boldsymbol{z}) \wedge \mathbf{T}(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x})]]$

Auch in (94) ist der erste Übergang eine gebundene Umbenennung: die in der ersten Zeile markierte Bindung der Variablen $\boldsymbol{x}$ ist durch eine entsprechende $\boldsymbol{z}$-Bindung ersetzt worden; da $\boldsymbol{z}$ nirgendwo in der ursprünglichen Formel (85) vorkam, sind in diesem Fall natürlich auch die Voraussetzungen des Prinzips (56) der gebundenen Umbenennung erfüllt. Und mit diesem Übergang sind auch die Voraussetzungen für eine Anwendung der Lambda-Konversion erfüllt; denn die im β-Teil freie Variable $\boldsymbol{x}$ ist durch die Umbenennung verschwunden, und das dafür eingesetzte $\boldsymbol{z}$ ist ja gerade so gewählt worden, dass es im α-Teil nicht vorkommt. Insofern sind (93) und (94) vollkommen parallel; und die Ergebnisse sind in der Tat alphabetische Varianten voneinander. Es gibt aber einen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Vorgehensweisen. Er besteht darin, dass in (93) im α-Teil umbenannt wurde, in (94) dagegen im β-Teil. Beide Vorgehensweisen sind *in diesem Fall* durchaus legitim. Dennoch ist zu bedenken, dass der zweite, in (94) eingeschlagene Weg nur funktioniert, wenn die fragliche Variable – in diesem Fall $\boldsymbol{x}$ – in der Gesamtformel, also oberhalb des zu reduzierenden Teils, gebunden wird, wie dies in (94) durch den Existenzquantor '$(\exists \boldsymbol{x})$' geschieht. Bleibt dagegen die Variable in der Gesamtformel frei, lässt sich die entsprechende Umbenennung nicht

94 Die weiter unten betrachtete Montaguesche Formelsprache der Intensionalen Logik besitzt diese Eigenschaft nicht, was ein Grund dafür ist, sie nicht zu verwenden.

vornehmen – denn umbenannt werden dürfen immer nur *gebundene* Variablen.[95] Die in (93) eingeschlagene Strategie der Umbenennung im α-Teil ist dagegen immer anwendbar. Das liegt ganz einfach daran, dass ein Verstoß gegen die Variablenbedingung der Lambda-Konversion immer von einem Konflikt zwischen einer freien Variablen im β-Teil und einer Bindung im α-Teil herrührt – und eine Umbenennung ebendieser Bindung den Konflikt löst. Ein Beispiel für eine Formel, bei der die Umbenennung im α-Teil erfolgen *muss*, liefert die weiter oben betrachtete Teilformel (86), innerhalb derer wir die Reduktion vorgenommen hatten. Eine Umbenennung (86*) im β-Teil wäre in diesem Fall falsch gewesen und hätte nach der Einsetzung in (85) zu der offenen Gesamtformel (85*) geführt, die offenkundig nicht zur Ausgangsformel (85) äquivalent ist:

(86) $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{P}.\ (\exists \boldsymbol{x})\ [F(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})])(\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))}$

(86*) $\mathbf{(\lambda \boldsymbol{P}.\ (\exists \boldsymbol{x})\ [F(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})])(\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\underline{\boldsymbol{z}}))}$

(85) $\mathbf{\neg\ (\exists \boldsymbol{x})\ [M(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\ (\lambda \boldsymbol{P}.\ (\exists \boldsymbol{x})\ [F(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})])(\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}))]}$

(85*) $\mathbf{\neg\ (\exists \boldsymbol{x})\ [M(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\ (\exists \boldsymbol{x})\ [F(\boldsymbol{x}) \wedge (\lambda \boldsymbol{y}.T(\boldsymbol{y})(\underline{\boldsymbol{z}}))(\boldsymbol{x})]]}$

In (85*) bleibt die unterstrichene Variable frei, anstatt von dem äußersten Existenzquantor gebunden zu werden. Um ein derartiges Malheur zu vermeiden, wird dringendst dazu geraten, gebundene Umbenennungen zur Vorbereitung von Lambda-Konversionen grundsätzlich nur im α-Teil vorzunehmen.

[95] Das ist kein sinnloses Verbot, sondern wieder ein Reflex der in Abschnitt 4.3 gegebenen Deutung der Typenlogik; denn die Ersetzung freier Variablen erhält im allgemeinen nicht den semantischen Wert.

4.6 Extension und Intension

Im vorangehenden Abschnitt haben wir die zuvor erarbeiteten semantischen Analysen in den Formalismus der indirekten Deutung übersetzt. Man kann sich durchaus fragen, worin der Zweck dieser Übung bestehen soll; jedenfalls ändert die typenlogische Darstellung nichts an der Substanz der Analysen. Die Frage ist insofern müßig, als die soeben gegebene Darstelllung rein illustrativ gemeint war und nur die grundsätzliche Vorgehensweise bei der indirekten Deutung aufzeigen wollte. Im vorliegenden Abschnitt werden wir diese Analysen einer gehörigen Revision unterziehen, die die ursprünglichen Analysen an einigen Stellen vereinfachen wird. Allerdings müssen wir dazu auch den typenlogischen Formalismus etwas modifizieren. Um die Modifikation zu motivieren, gehen wir kurz auf den sprachphilosophischen Hintergrund ein.

Sprachliche Bedeutungen sind nach der in diesem Skript vertretenen Auffassung mengentheoretische Konstruktionen aus Individuen und möglichen Situationen. Auf der Grundlage dieser Bedeutungstheorie lassen sich zwei wesentliche Funktionen der Sprache prinzipiell erklären. Zum einen dienen sprachliche Äußerungen der Verständigung und insbesondere dem *Austausch von Informationen*. Durch die Identifikation von Satzbedeutungen mit Propositionen, wird diesem Aspekt in der semantischen Theorie unmittelbar Rechnung getragen. Wir hatten diesen Zusammenhang bereits weiter oben (in Abschnitt 1.4) kurz angesprochen. Wie wir dort gesehen hatten, ist ein Satz S informativer als (oder genauer: mindestens genauso informativ wie) ein anderer Satz S', wenn S' auf alle Situationen zutrifft, auf die S zutrifft, wenn also die durch S ausgedrückte Proposition eine Teilmenge der durch S' ausgedrückten Proposition ist: $\|S\| \subseteq \|S'\|$. Das in Kapitel 1 betrachtete Beispiel mag den Zusammenhang in Erinnerung rufen:

(95) **Niemand kauft ein Tier.** [= (15) aus Kapitel 1]
(96) **Niemand kauft eine Kuh.** [= (16) aus Kapitel 1]

Jede Situation, auf die (95) zutrifft, ist so, dass auf sie auch (96) zutrifft: $\|(95)\| \subseteq \|(96)\|$. Und in der Tat informiert (95) genauer als (96). Denn in (96) erfährt man nichts, was man nicht schon aus (95) lernen könnte; aber aus (95) lernt man z.B. auch, dass niemand einen Hamster kauft – eine Möglichkeit, die (96) offen lässt. Doch die durch (95) und (96) ausgedrückten Propositionen reflektieren nicht nur ein Mehr oder Weniger an Information, sondern auch, um welche Information es sich genau handelt. Denn Information betrifft immer die Beschaffenheit der Welt, und eine Proposition gibt gerade darüber Auskunft, wie die Situation (= der Weltenteil) beschaffen ist, auf die sie bezogen wird. In einer Situation s gibt die durch (95) ausgedrückte Proposition $\|(95)\|$ insofern Aufschluss über die Beschaffenheit von s, als sie angibt, in welcher Region des Logischen Raums sich s befindet – nämlich unter denjenigen Situationen, in denen niemand ein Tier kauft. Damit schließt $\|(95)\|$ eine ganze Reihe von Möglichkeiten aus – dass etwa Fritz einen Hummer kauft oder Eike eine Schildkröte.

Mit sprachlichen Äußerungen kann man sich auf Gegenstände der Welt beziehen. Auch dieser Aspekt des *Sachbezugs* lässt sich mithilfe des hier entwickelten Bedeutungsbegriffs erklären. Zunächst einmal muss man dafür sehen, dass er überhaupt einer Erklärung bedarf. Betrachtet man etwa einen Eigennamen wie **Fritz**, so liegt die Möglichkeit, sich mit ihm auf eine bestimmte Person[1] zu beziehen, einfach in seiner Bedeutung, die beim Spracherwerb – in diesem Fall: dem Lernen des Eigennamens – mit der Laut- bzw.

[1] Natürlich gibt es mehr als eine Person die **Fritz** heißt. Wir gehen aber stillschweigend davon aus, dass es sich bei solchen Namensgleichheiten immer nur um eine Gleichheit der Oberflächenform handelt und Namen nach ihren Trägern disambiguiert werden müssen.

Schriftform assoziiert wird. Diese Assoziation ist rein konventioneller Natur. Doch Eigennamen sind in diesem Zusammenhang irreführend einfach. Betrachtet man andere Typen von Ausdrücken, wird klar, dass die Herstellung des Sachbezugs nicht allein eine Sache der Sprachkonventionen sein kann. Quantifizierende Nominalphrasen sind ein gutes Beispiel. Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, stellt ein Satz wie (97) ein Verhältnis zwischen zwei Mengen von Individuen her:

(97) **Kein Mensch schläft.** [= (15a) aus Kapitel 3]

Bezogen auf eine gegebene Situation *s*, bringt (97) zum Ausdruck, dass die Menge der Menschen *in s* sich nicht mit der Menge der *in s* schlafenden Individuen überlappt. Aber anders als im Fall der Eigennamen kann der Bezug auf diese (Mengen von) Individuen nicht *allein* aufgrund sprachlicher Konventionen hergestellt werden. Denn der Bezug kann sich ändern, ohne dass sich damit die sprachlichen Konventionen ändern. Vielmehr kommt der Bezug durch ein Zusammenspiel von sprachlicher Konvention zum einen und situativ gegebenen Tatsachen zum anderen zustande; denn die Bedeutungen von Subjekt (genauer: dem Substantiv) und Prädikat liefern Kriterien, nach denen – je nach Situation – die beiden Mengen identifiziert werden, von denen die Disjunktheit ausgesagt wird. Und gerade in diesen Kriterien liegt, allgemein gesprochen, der Beitrag der Bedeutung zum Sachbezug.

Die genannten wesentlichen Leistungen der sprachlichen Bedeutung werden damit auf unterschiedliche Weise erklärt. Grundlage für den Informationsaustausch ist die *Satzbedeutung* – die durch den Satz ausgedrückte Proposition, die seinen Informationsgehalt ausmacht; die Bedeutungen der *Satzteile* leisten ihren Beitrag zum Informationsgehalt, indem sie sich kompositionell zur Satzbedeutung kombinieren. Grundlage des Sachbezugs sind die Bedeutungen derjenigen Satzteile, die gemeinsam mit der Situation, auf die der Satz bezogen wird, ein Kriterium zur Identifikation einzelner Teile dieser Situation enthalten; diese Kriterien und der Sachbezug selbst lassen sich aus der Bedeutung ableiten. Allerdings haben wir den Sachbezug bisher nur für Prädikatsbedeutungen definiert. Bei Eigennamen ergibt er sich direkt aus der Bedeutung – die besteht ja in ihrem Sachbezug. Bei anderen Typen von Ausdrücken müsste man erst eine entsprechende Verallgemeinerung des Extensionsbegriffs vornehmen. Und genau hier setzt die nun einzuführende Methode von Extension und Intension an.[2]

Die Grundidee der Methode besteht darin, für *jeden* sprachlichen Ausdruck sowohl einen Sachbezug – seine *Extension* – als auch seinen Beitrag zum Informationsgehalt – seine *Intension* – anzugeben. Die (situationsabhängigen) Extensionen von Substantiven und Prädikaten werden sich dabei gerade als die Mengen herausstellen, die wir schon weiter oben kennen gelernt haben; aber sie ergeben sich auf eine andere, systematischere Weise. Ebenso wird die Intension eines Satzes gerade die durch ihn ausgedrückte Proposition sein, die sich ähnlich wie bisher ermittelt. Dabei wird sich herausstellen, dass sich Extension und Intension eines sprachlichen Ausdrucks in gewisser Weise gegenseitig bestimmen und dass beide gemeinsam den bisherigen Bedeutungsbegriff ersetzen können. Statt einer einzigen Bedeutung hat also nach dieser Methode jeder Ausdruck eine Extension und eine Intension. Obwohl diese Aufspaltung der Bedeutung in zwei Komponenten umständlich anmutet, besitzt die Methode eine Reihe von Vorzügen, die wir nach und nach entdecken werden.

Zur Vorbereitung auf die Methode von Extension und Intension bedarf es zunächst einer kleinen Verfeinerung der bisherigen Typen. Der Grund dafür liegt in der Anwendung des Extensionsbegriffs auf Sätze. Im allgemeinen soll die Extension das sein, worauf sich ein

2 Die Methode geht auf Rudolf Carnaps Buch *Meaning and Necessity* (1947) zurück und ist eine Modifikation der Fregeschen Vorgehensweise in *Über Sinn und Bedeutung* (1892).

Ausdruck in einer gegebenen Situation s bezieht. *Gegeben* ist ein solches s in dem Sinn, dass der Satz, in dem der Ausdruck vorkommt, auf s bezogen wird; in der Regel ist s eine Situation, in der der Satz geäußert wird. In jedem Fall gilt, dass ein Satz auf eine Situation s bezogen werden kann, ohne dass er auf s zutrifft: auch wenn (97) falsch ist in s, bezieht sich sein Prädikat auf die in dieser Situation schlafenden Individuen und hat somit insbesondere eine Extension in s. Worauf aber soll sich der gesamte Satz in s beziehen, wenn er gar nicht zutrifft? Man kann dann allenfalls zur Kenntnis nehmen, dass sich der Satz nicht wahrheitsgemäß auf die Situation beziehen lässt. Da nun aber jeder Ausdruck eine Extension haben soll, behilft man sich in diesem Fall mit einem Trick: wenn ein Satz auf eine Situation s nicht zutrifft, ist seine Extension in s per definitionem die Zahl 0. Umgekehrt ist die Extension eines wahren Satzes die Zahl 1.[3] Die Extension eines Satzes legt in einer Situation quasi Zeugnis darüber ab, ob der Satz – also die Aussage, die er macht – überhaupt auf die Situation zutrifft; mehr ist an der Extension nicht dran. Man mag einwenden, dass doch im Fall eines wahren Satzes die Situation, auf die er bezogen wird, als Extension in Frage kommt. Die Extension eines Satzes wäre dann in allen Situationen, auf die er nicht zutrifft, dieselbe (nämlich 0), während er in allen anderen Situationen jeweils eine verschiedene Extension hätte.[4] Eine solche Vorgehensweise wäre auf den ersten Blick vielleicht intuitiv angemessener als der hier eingeschlagene Weg, nach dem alle wahren Sätze jeweils dieselbe Extension haben. Aber sie führt zu ein paar technischen Komplikationen und wäre nicht wirklich radikal anders, wie später in einer Übungsaufgabe gezeigt wird.

Wir halten fest: die Extension eines wahren Satzes ist (in einer gegebenen Situation, auf die der Satz bezogen wird) die Zahl 1, die eines falschen Satzes ist die Zahl 0. Die Zahlen 0 und 1 bezeichnet man in diesem Zusammenhang als die beiden *Wahrheitswerte*. Da sie eine eigene und zudem zentrale Rolle in der semantischen Analyse spielen, werden sie als Objekte eines eigenen Typs namens 't' [von engl. *truth value*] behandelt. Der Typ t ist also der Typ der Satzextensionen.

Auch die Extensionen anderer Ausdrücke lassen sich in ähnlicher Weise, wie wir das für Bedeutungen gesehen haben, nach verschiedenen Typen unterscheiden. Eigennamen beziehen sich z.B. auf Individuen; der Typ ihrer Extensionen ist somit das bereits bekannte e. Und wie steht es um Substantive? Wir hatten gesagt, dass sich ein Wort wie **Tier** in einer Situation s auf die Menge der Tiere in s bezieht; die Extension sollte also eine Menge von Individuen sein. Anstatt nun einen weiteren (primitiven) Typ für Mengen von Individuen einzuführen, werden wir diese aus den Typen e und t (re-) konstruieren. Dazu 'identifiziert' man Mengen M mit sog. *charakteristischen Funktionen* χ_M deren Funktionswerte $\chi_M(x)$ jeweils Auskunft darüber geben, ob das Argument x Element der Menge M ist:

(98) *Definition*

Es sei $U (\neq \emptyset)$ eine Menge und $M \subseteq U$. Dann ist die *charakteristische Funktion von* M (relativ zu U) die Funktion χ_M von U in die Menge der Wahrheitswerte, so dass für alle $x \in M$ gilt:

---

3 Für die Gleichsetzung von Satzextensionen mit den Zahlen 0 und 1 gibt es durchaus logisch-mathematische Motive, die uns hier aber nicht weiter zu interessieren brauchen.

4 Dass alle wahren Sätze *innerhalb einer Situation* dieselbe Extension hätten, würde man auch dann nicht verhindern. Aber die Extensionen unterscheiden sich von Situation zu Situation – jedenfalls dort, wo der Satz zutrifft.

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in M \\ 0, \text{ falls } x \notin M \end{cases}$$

Wenn U die Menge aller Individuen ist, entspricht offenbar jeder Teilmenge von U – und insbesondere jeder Prädikatsextension im Sinne von Kapitel 3 – ihre charakteristische Funktion (relativ zu U). Umgekehrt kann man aus jeder charakteristischen Funktion – also jeder Funktion von U in die Menge der Wahrheitswerte – die charakterisierte Menge M zurückgewinnen; denn M ist gerade die Menge derjenigen Elemente von U, für die die Funktion den Wert 1 liefert:

(99)

Individuen x	Wahrheitswerte $\chi(x)$
a	1
b	1
c	1
…	1
x	0
y	0
z	0
…	0

So wie M aus dem Grundbereich U den schattierten Teil vom weißen Rest abhebt, so zerlegt ihre in der Tabelle (99) dargestellte charakteristische Funktion den Bereich U in die (schattierten) Individuen, denen sie eine 1 zuweist, und den (weißen) Rest, der eine 0 zugewiesen bekommt. Man kann also quasi zwischen Mengen und ihren charakteristischen Funktionen hin- und herübersetzen. Insbesondere lassen sich im Sinne dieser 'Übersetzung' Prädikatsextensionen als Funktionen des Typs (*et*) auffassen, was wir ab jetzt tun werden. Anstatt also die Extension von **Tier** in einer gegebenen Situationen s mit der Menge der Tiere in s gleichzusetzen, werden wir sie mit ihrer charakteristischen Funktion gleichsetzen, also der Funktion, die jedem Tier in s den Wahrheitswert 1 zuordnet und jedem anderen Individuum den Wahrheitswert 0. Dieser Übergang von Mengen (als Extensionen) zu ihren charakteristischen Funktionen erspart uns nicht nur einen, sondern – wie wir noch sehen werden – eine ganze Latte von neuen (primitiven) Typen, die wir sonst für die Verallgemeinerung des Extensionsbegriffs benötigen würden.

Und sie lässt sich auch für die Intensionen nutzbar machen. Nach dem oben Gesagten sollen ja die Intensionen von Sätzen gerade die durch sie ausgedrückten Propositionen sein, also *Teilmengen* des Logischen Raums *LR*, die sich ihrerseits wieder mit ihren charakteristischen Funktionen (relativ zu *LR*) identifizieren lassen. Um nun auch diese Intensionen einem Typ unterzuordnen, benötigt man allerdings noch den Typ der möglichen Situationen, aus denen *LR* besteht. π ist dafür ungeeignet, denn es handelt sich dabei ja um den Typ der *Teilmengen* von *LR*, während die charakteristische Funktion einer Proposition den *Elementen* von *LR* Wahrheitswerte zuweist. Wir benötigen also einen weiteren primitiven Typ der möglichen Situation, den wir, der Tradition folgend, als 's' bezeichnen werden.[5] Propositionen lassen sich demnach als Objekte des Typs (*st*) auffassen, was wir ab jetzt ebenfalls tun werden. Der alte Typ π wird damit überflüssig und ab jetzt auch nicht mehr verwendet. Die für die Methode von Extension und Intension benötigten Typen nehmen sich damit wie folgt aus:

(100) *Definition*

Die *zweisortigen Typen* sind die primitiven Typen e, s und t sowie alle Paare, die sich ausgehend von diesen Typen bilden lassen. Dabei gilt:

- Die Objekte des Typs e sind die Individuen.
- Die Objekte des Typs s sind die möglichen Situationen.
- Die Objekte des Typs t sind die Wahrheitswerte.
- Die Objekte eines Typs ab sind die Funktionen von Objekten des Typs a in Objekte des Typs b.

Die Qualifikation *zweisortig* dient nur dazu, den neuen Typenbegriff vom alten zu unterscheiden; wir werden sie im folgenden meistens weglassen, weil wir die alten Typen nicht mehr benutzen.[6] Die gesamte Typenlogik lässt sich leicht an diese Neuerung anpassen. Statt von Variablen der alten Typen gehen wir nun von entsprechenden Variablen der neuen, zweisortigen Typen aus, wobei wir wieder annehmen, dass es pro (zweisortigen) Typ jeweils unendlich viele Variablen gibt. Entsprechend werden wir wieder gerade so viele nicht-logische Konstanten annehmen, wie wir sie brauchen können; und auch diese können prnzipiell von beliebigen (zweisortigen) Typen sein. Die Kombinationsmöglichkeiten von Formeln – Abstraktion und Applikation – sind dieselben wie vorher, außer dass sie jetzt für beliebige *zweistortige* Typen definiert sind. Einen kleinen Unterschied gibt es lediglich im Bereich der *logischen Konstanten*, den wir sogleich neu bestimmen werden. Zunächst führen wir aber diese Variation der Typenlogik an einem Beispiel vor, bei dem der Einfachheit halber die natürlichen Zahlen als Individuen fungieren:

(101) $(\boldsymbol{\lambda x_e}.\ \mathbf{G}(\boldsymbol{x})(\mathbf{3}))$

G ist dabei eine Konstante des Typs $e(et)$, die für die Beziehung > steht; und die Konstante **3** (vom Typ e) erhält die offensichtliche Interpretation:

(102) $\|\mathbf{G}\| = \lambda m.\ \chi_{\text{die Zahlen } n \text{, so dass gilt: } n>m}$

(103) $\|\mathbf{3}\| = 3$

Der (belegungsunabhängige) Wert der Konstanten **G** ist nach (102) eine Funktion, die jeder Zahl m die charakteristische Funktion der Menge der Zahlen von m+1 an aufwärts zuweist; für die Zahl 3 liefert diese Funktion z.B. dann den Wert 1, wenn 3 größer ist als m. Um nun den Wert der Formel (101) zu ermitteln, geht man nach den üblichen typenlogischen Deutungsregeln vor. Da diese immer auf eine Belegung Bezug nehmen, bestimmen wir zunächst den Wert bei einem beliebigen g:

(104) $\|(\boldsymbol{\lambda x_e}.\ \mathbf{G}(\boldsymbol{x})(\mathbf{3}))\|^g$

= das f vom Typ et, so dass für jede Zahl k gilt: $f(k) = \|\mathbf{G}(\boldsymbol{x})(\mathbf{3})\|^{g[x/k]}$

= das f vom Typ et, so dass für jede Zahl k gilt: $f(k) = \|\mathbf{G}(\boldsymbol{x})\|^{g[x/k]}(\|\mathbf{3})\|^{g[x/k]})$

---

5 Die Bezeichnung geht auf Montague zurück, nach dem das '*s*' nicht für engl. *situation*, sondern für *sense* – dem Fregeschen *Sinn*– steht. Der genaue Zusammenhang wird weiter unten (in Fn. xxx) erklärt. Ein praktischer Nachteil dieser tradierten Notation ist, dass wir jetzt immer aufpasssen müssen, ob wir uns mit dem Buchstaben '*s*' auf eine (beliebige) *einzelne* Situation beziehen (so haben wir ihn bisher benutzt) oder den *Typ* der möglichen Situation; aber das sollte normalerweise aus dem Zusammenhang klar sein.

6 Der Terminus *zweisortig* stammt aus der Logik, wo primitive Typen, die keine Wahrheitswerte sind, als *Sorten* bezeichnet werden.

= das f vom Typ et, so dass für jede Zahl k gilt: $f(k) = \|\mathbf{G}\|^{g[x/k]}(\|\boldsymbol{x}\|^{g[x/k]})(\|\mathbf{3})\|^{g[x/k]})$

= das f vom Typ et, so dass für jede Zahl k gilt: $\|\mathbf{G}\|^{g[x/k]}(\|\boldsymbol{x}\|^{g[x/k]})(3)$

= das f vom Typ et, so dass für jede Zahl k gilt: $\|\mathbf{G}\|^{g[x/k]}(k)(3)$

= das f vom Typ et, so dass für jede Zahl k gilt: $\lambda m.\ \chi_{\text{die Zahlen } n, \text{ so dass gilt: } n>m}(k)(3)$

= das f vom Typ et, so dass für jede Zahl k gilt: $\chi_{\text{die Zahlen } n, \text{ so dass gilt: } n>k}(3)$

Die einzelnen Übergänge in (104) lassen sich nach den Deutungsregeln der Typenlogik und anderen hier gemachten Annahmen rechtfertigen, was in einer Übungsaufgabe geschieht.

Nach (104) hängt der Wert von (101) nicht von der Belegung ab – das 'g' kommt ja in der letzten Zeile gar nicht vor. Kein Wunder: die Formel ist geschlossen. Wir können ihren Wert also getrost mit '$\|(\boldsymbol{\lambda x_e}.\ \mathbf{G}(\boldsymbol{x})(\mathbf{3}))\|$' bezeichnen. Doch er lässt sich erheblich durchsichtiger beschreiben als in (104). Dafür überlegt man sich zunächst, dass dieser Wert vom Typ et ist und somit die charakteristische Funktion χ_M einer Menge M. Nach (104) liefert die Funktion χ_M für jedes k den Wahrheitswert $\chi_{\text{die Zahlen } n, \text{ so dass gilt: } n>k}(3)$: wenn letzterer 1 ist, dann ist auch $\chi_M(k) = 1$; andernfalls ist beides gleich 0. Das Ergebnis von (104) läuft also hinaus auf:

(105) $\|(\boldsymbol{\lambda x_e}.\ \mathbf{G}(\boldsymbol{x})(\mathbf{3}))\|$

= das f vom Typ et, so dass für jede Zahl k gilt:
$f(k) = 1$ gdw. $\chi_{\text{die Zahlen } n, \text{ so dass gilt: } n>k}(3) = 1$.

Nach der Definition (98) der charakteristischen Funktionen heißt '$\chi_M(k) = 1$', dass $k \in M$; die Bedingung '$\chi_{\text{die Zahlen } n, \text{ so dass gilt: } n>k}(3) = 1$' besagt also (für ein gegebenes k), dass 3 in der Menge der Zahlen n ist, für die gilt: $n>k$; aus (105) ergibt sich somit:

(106) $\|(\boldsymbol{\lambda x_e}.\ \mathbf{G}(\boldsymbol{x})(\mathbf{3}))\|$

= das f vom Typ et, so dass für jede Zahl k gilt: $f(k) = 1$ gdw. $3>k$.

Nach (106) ist also $\|(\boldsymbol{\lambda x_e}.\ \mathbf{G}(\boldsymbol{x})(\mathbf{3}))\|$ die charakteristische Funktion der Menge der Zahlen k, für die gilt: $3 > k$. (106) illustriert eine allgemeine Eigenschaft des Lambda-Operators in der zweisortigen Typenlogik. Wenn nämlich dem '$\boldsymbol{\lambda x_a}.$' eine Formel $\boldsymbol{\varphi}$ des Typs t folgt, dann ist der Wert des gesamten Lambda-Terms $(\boldsymbol{\lambda x_a}.\ \boldsymbol{\varphi})$ vom Typ at und somit die charakteristische Funktion f_M einer Menge M von Objekten des Typs a. Wie sieht diese Menge M aus? Nach Definition (98) enthält M die Objekte u vom Typ a, denen f_M – also der Wert von $(\boldsymbol{\lambda x_a}.\ \boldsymbol{\varphi})$ – den Wahrheitswert 1 zuordnet, für die also $\boldsymbol{\varphi}$ wahr ist, wenn man $\boldsymbol{x}$ mit ihnen belegt. Man kann also, unter Vernachlässigung des Unterschieds zwischen Mengen und charakteristischen Funktionen die Formel $(\boldsymbol{\lambda x_a}.\ \boldsymbol{\varphi})$ lesen als *die Menge der x (vom Typ a) für die* $\boldsymbol{\varphi}$ *gilt*.[7] Man beachte, dass diese Lesart des Lambda-Operators nur dann möglich ist, wenn ihm eine Formel des Typs t folgt.

---

7 In der Mengenlehre benutzt man dafür die Notation '$\{x \mid \varphi\}$'.

So wie sich mit der Lambda-Abstraktion [die charakteristische Funktion] eine[r] Menge durch eine Beschreibung ihrer Elemente definieren lässt, so lässt sich durch die Applikation die Elementschaftsbeziehung selbst ausdrücken. Denn wenn α eine Formel eines Typs at ist und β vomTyp a, dann charakterisiert der Wert von α wieder eine Menge M (von Objekten des Typs a), und $\alpha(\beta)$ ist wahr – d.h. $\|\alpha(\beta)\| = 1$ – wenn f_M für den Wert von β den Wahrheitswert 1 liefert, d.h.: $\|\alpha(\beta)\| = 1$ gdw. $\|\beta\| \in M$. In diesem Sinne besagt also der (typenlogische) Lambda-Term (107), dass die Zahl 2 ein Element der Menge der Zahlen k ist, für die gilt: $3 > k$:

(107) $(\lambda x_e.\ \mathbf{G}(x)(\mathbf{3}))(\mathbf{2})$

Kommen wir nun zur Anwendung der zweisortigen Typenlogik auf die Methode von Extension und Intension. Am Anfang dieser Methode steht die Beobachtung, dass sich die Extensionen weitgehend kompositionell verhalten: um die Extension eines komplexen Ausdrucks zu bestimmen, muss man in der Regel nur die Extensionen seiner unmittelbaren Teile auf die richtige Art und Weise kombinieren. Wir illustrieren die Beobachtung an einem Beispiel:

(108) **Kein Demonstrant wirft einen Stein.**

Wenn sich die Extensionen in (108) kompositionell verhalten, muss sich der Wahrheitswert des Satzes in einer gegebenen Situation aus den Extensionen von **kein Demonstrant** und **wirft einen Stein** – und diese sich ihrerseits aus den Extensionen ihrer unmittelbaren Teile – bestimmen lassen. Bei der Extension des Prädikats handelt es sich – so hatten wir angenommen – um eine charakteristische Funktionen. Und was ist die Extension des Subjekts? Eine Antwort auf diese Frage liefert die Differenzmethode: die Extension des Subjekts ist danach eine Funktion, die jeder Prädikatsextension eine Satzextension zuweist. Prädikatsextensionen sind vom Typ *et*, Satzextensionen sind Wahrheitswerte, und somit ist die Extension des Subjekts eine Funktion vom Typ $(et)t$. Genauer gesagt handelt es sich um die Funktion F, die einer charakteristischen Funktion f_B den Wahrheitswert 1 zuordnet, wenn die charakterisierte Menge B keinen Demonstranten enthält. Einfacher gesprochen ist die Extension des Subjekts von (108) also die Menge der demonstrantenfreien Mengen (von Individuen). Nach derselben Methode ergibt sich für die Extension des Determinators **kein** eine Funktion K des Typs $(et)((et)t)$, die sich auf eine Prädikatsextension anwenden lässt und dann die charakteristische Funktion einer Menge von Prädikatsextensionen liefert. Wendet man diese charakteristische Funktion auf eine Prädikatsextension f_D an, so ist der Wert $K(f_D)$ die charakteristische Funktion aller Mengen (von Individuen), die von D disjunkt sind. Der Wahrheitswert von (108) ergibt sich also kompositionell aus den Extensionen D von **Demonstrant** und B von **wirft einen Stein** durch sukzessive Anwendung der Extension K von **kein**: $K(D)(B)$. Wie man sich leicht überlegt, erhält man nach derselben Vorgehensweise auch Extensionen für die anderen Determinatoren.

Bei der indirekten Deutung wird nun jeder natürlichsprachliche Ausdruck A durch eine Formel $\|A\|$ der zweisortigen Typenlogik übersetzt, deren semantischer Wert die *Extension* von A ist. Solange sich die Extensionen kompositionell verhalten, lassen sich die Übersetzungen komplexer Ausdrücke wieder durch Kombination der Übersetzungen ihrer Teile angeben. Die Übersetzung von (108) erhält man etwa, indem man die Übersetzung des Subjekts, deren Wert die oben beschriebene Funktion vom Typ $(et)t$ ist, per Applikation mit der Übersetzung des Prädikats kombiniert. Das Ergebnis ist vom Typ t, sein Wert ist der Wahrheitswert des Satzes. Entsprechend erhält man die Übersetzung des

Subjekts aus der des Determinators **kein** und der des Substantivs **Demonstrant**:

(109) $\|$ **Kein Demonstrant wirft einen Stein** $\|$
= $\|$**kein Demonstrant**$\|$ ($\|$**wirft einen Stein**$\|$)
= $\|$**kein**$\|$ ($\|$**Demonstrant**$\|$) ($\|$**wirft einen Stein**$\|$)

(109) wird sich wie zuvor aus den allgemeinen Regeln für die Übersetzung komplexer Ausdrücke ergben, die – wie das Beispiel zeigt – weitgehend analog zu den im vorangeheneden Abschnitt gegebenen Überseztungen sind; lediglich die Typen sind etwas anders. Die Übersetzungen der lexikalischen Ausdrücke müssen wieder fallweise angegeben werden. Betrachten wir zunächst das Substantiv **Demonstrant**. Da seine Extension von der betrachteten Situation abhängt, man aber nicht für jede Situtation eine eigene Übersetzung angeben will, muss sich die Situationsabhängigkeit der Extension in der Übersetzung selbst niederschlagen. Dies geschieht durch eine Variable des Typs s, die sich auf die jeweils betrachtete Situation bezieht. Anders als in Abschnitt 4.5 werden also nach der Methode von Extension und Intension Substantive nicht einfach durch Konstanten übersetzt, sondern durch komplexe Ausdrücke:

(110) $\|$**Demonstrant**$\|$ = **D(*i*)**

Dabei ist i eine Variable des Typs s, die gerade den Situationsbezug der Extension zum Ausdruck bringt. Da die Übersetzung vom Typ *et* sein soll, muss die Konstante **D** offenbar vom Typ $s(et)$ sein und ihr Wert muss gerade jeder Situation die Demonstranten in dieser Situation zuweisen:

(111) $[\![\mathbf{D}]\!] = \lambda s.\ \chi_{\text{die Demonstranten in } s}$

Die in (110) gegebene Übersetzung lässt sich dann lesen als ‘die (charakteristische Funktion der) Menge der Demonstranten in der (durch i) gegebenen Situation’. Man beachte, dass die in (111) gedeutete Konstante vom Typ $s(et)$ sich von der Übersetzung **D'** des Substantivs **Demonstrant** im Sinne des voran gehenden Abschnitts unterscheidet. Dort hätten wir ein solches Substantiv mit einer Konstanten des Typs $e\pi$ übersetzt und diese auf folgende Weise gedeutet:

(112) $[\![\mathbf{D'}]\!] = \lambda x.$ die Situationen in denen x demonstriert

Um den Zusammenhang zwischen (111) und (112) zu ergründen, sollte man zunächst berücksichtigen, dass in der zweisortigen Typenlogik Propositionen als charakteristische Funktionen vom Typ *st* aufgefasst werden; dementsprechend kann man (112) wie folgt in die zweisortige Typenlogik übertragen:

(113) $[\![\mathbf{D'}]\!] = \lambda x.\ \chi_{\text{die Situationen in denen } x \text{ demonstriert}}$

Zwischen (111) und (113) besteht immer noch ein grundlegender Unterschied im logischen Typ: **D'** ist vom Typ $e(st)$, während **D**s Typ nach wie vor $s(et)$ ist. Aber es besteht auch ein enger Zusammenhang zwischen den beiden: wendet man $[\![\mathbf{D}]\!]$ auf eine Situation an und die resultierende charakteristische Funktion auf ein Individuum, so ergibt sich derselbe Wahrheitswert wie bei Anwendung von $[\![\mathbf{D'}]\!]$ auf dasselbe Individuum und dieselbe Situation; denn es gilt für beliebige Situationen s und Individuen x:

(114a) $[\![\mathbf{D'}]\!](x)(s) = 1$
gdw. $\lambda x.\ \chi_{\text{die Situationen in denen } x \text{ demonstriert}}(x)(s) = 1$ nach (113)
gdw. $\chi_{\text{die Situationen in denen } x \text{ demonstriert}}(s) = 1$ λ-Kv.
nach (98)

gdw. x demonstriert in s

(b) $[\![\mathbf{D}]\!](s)(x) = 1$

gdw. $\lambda s.\ \chi_{\text{die Demonstranten in } s}(s)(x) = 1$ nach (111)

gdw. $\chi_{\text{die Demonstranten in } s}(x) = 1$ λ-Kv.

gdw. x demonstriert in s nach (98)

Die Funktionen $[\![\mathbf{D}]\!]$ und $[\![\mathbf{D'}]\!]$ unterscheiden sich also nur darin, in welcher Reihenfolge sie die Argumente abarbeiten; im Endergebnis laufen sie auf dasselbe hinaus. Die in (111) angegebene Reihenfolge – Situation vor Individuum – ist, wie nach und nach klar werden wird, für die Methode von Extension und Intension typisch und unverzichtbar.

Der in (114) beobachtete Zusammenhang zwischen der alten und der neuen, zweisortigen Deutung der Übersetzung gilt natürlich analog für andere Substantive, die ebenfalls durch komplexe Formeln der Gestalt '$\mathbf{c}(\boldsymbol{i})$' übersetzt werden, wobei $\mathbf{c}$ eine Konstante vom Typ $s(et)$ ist und $\boldsymbol{i}$ eine Variable des Typs s. Kommen wir nun zum Determinator **kein**. Wie schon in Abschnitt 4.4 wird auch er durch eine komplexe Formel übersetzt, die die Disjunktheit der Extensionen von Substantiv und Prädikat zueinander in Beziehung setzt. Allerdings ist der Zusammenhang, den die zweisortige Übersetzung herstellt, direkter. Denn nach der in Kapitel 3 angegebenen Deutung des Determinators **kein** (die wir in 4.4 übernommen hatten), kombinierte sich dessen Bedeutung mit den Bedeutungen von Substantiv und Prädikat, für die zunächst einmal die Extensionen bestimmt werden mussten. Im Rahmen der Methode von Extension und Intension ist dieser letzte Umweg nicht nötig: die Übersetzung $\|\mathbf{kein}\|$ ist vom Typ $(et)((et)t)$, d.h. ihr semantischer Wert kombiniert direkt die Extensionen von Substantiv und Prädikat. Um zu sehen, wie sich diese Kombination mit einer Formel der zweisortigen Typenlogik erfassen lässt, müssen wir endlich etwas zu den logischen Konstanten sagen, auf deren Inventar die Auffassung von Propositionen als charakteristische Funktionen nämlich eine interessante Auswirkung hat.

Beginnen wir mit der Konjunktion. Nach der im vorangehenden Abschnitt eingeführten Variante der Typenlogik handelte es sich dabei um eine logische Konstante $\wedge$ des Typs $\pi(\pi\pi)$, die wie folgt gedeutet wurde:

(115) $[\![\wedge]\!] = \lambda p.\ \lambda q.\ p \cap q$ [= (31)]

Im Rahmen der zweisortigen Typenlogik läge es von daher nahe, die Konjunktion als Konstante des Typs $(st)((st)(st))$ zu klassifizieren, mit im wesentlichen derselben Deutung wie in (115). Allerdings könnte diese Konstante nicht als satzkoordinierende Verwendung der Konjunktion **und** fungieren. Denn in den Übersetzungen komplexer Ausdrücke sollen ja Extensionen miteinander kombiniert werden. Doch Satzextensionen sind Wahrheitswerte, während die in (115) definierte Schnittbildung Propositionen kombiniert. Allerdings lässt sich leicht eine entsprechende Kombination von Wahrheitswerten angeben. Denn der Wahrheitswert einer Konjunktion der Gestalt S **und** S' bestimmt sich in der Tat aus den Wahrheitswerten ihrer Teile: sie ist wahr, wenn beide Konjunkte wahr sind; sonst ist sie falsch. Berücksichtigt man die Tatsache, dass es sich bei den Wahrheitswerten um die Zahlen 0 und 1 handelt, ergibt sich die Extension der Koordination mit **und** durch *Multiplikation* der Extensionen der koordinierten Sätze. Genau für diese Operation – die Multiplikation von Wahrheitswerten – hat die zweisortige Typenlogik eine Konstante, die die bisherige, durch Schnittbildung von Propositionen gedeutete Konjunktion ersetzt und ähnlich wie diese die zu multiplizierenden Wahrheitswerte nacheinander als Argumente nimmt. Die Konstante, die wir ebenfalls als Konjunktion bezeichnen und als '$\wedge$' schreiben werden, ist also vom Typ $t(tt)$ und wird wie folgt gedeutet:

(116) $[\![\wedge]\!] = \lambda n.\ \lambda m.\ n \cdot m$

Was für die Konjunktion gilt, gilt mutatis mutandis auch für die Negation, d.h. auch ihr entspricht eine Funktion über den Wahrheitswerten. Denn wenn ein Satz wahr ist, ist seine Negation falsch und umgekehrt. Durch Negation wird also der Wahrheitswert umgedreht, was ebenfalls einer einfachen arithmetischen Operation entspricht:

(117) $[\![\neg]\!] = \lambda n.\ 1 - n$

Auch der Existenzquantor erhält einen neuen Typ. Bisher nahm er Prädikats*bedeutungen* (vom Typ ($e\pi$)) als Argument und lieferte Satz*bedeutungen* (Propositionen) als Werte, jetzt nimmt er Prädikats*extensionen* (vom Typ (et)) und liefert Satz*extensionen* (Wahrheitswerte). Der Typ des Existenzquantors in der zweisortigen Typenlogik ist demnach: ((et)t). Dennoch ändert sich nichts Grundsätzliches an seiner Deutung. Nach wie vor sagt er aus, dass die Extension des mit ihm verbundenen Prädikats nicht leer ist:

(118) $[\![\exists]\!] = \lambda P.$ es gibt ein Individuum x, so dass $P(x) = 1$

Da ∃ eine Konstante des Typs ((et)t) ist, besteht der Definitionsbereich ihres Werts $[\![\exists]\!]$ aus Funktionen P, die Mengen von Individuen charakterisieren. Die in (118) gegebene Bedingung besagt, dass $[\![\exists]\!]$ für ein solches P den Wahrheitswert 1 liefert, wenn die durch P charakterisierte Menge nicht leer ist; denn P charakterisiert die leere Menge genau dann wenn $f(x)$ immer 0 ist.

Mit dieser neuen, ‘extensionalen’ Deutung von Konjunktion, Negation und Existenzquantor lässt sich die zweisortige Übersetzung von **kein** wie folgt angeben:

(119a) $\|\mathbf{kein}\| = (\lambda \boldsymbol{Q}_{et}.\ (\lambda \boldsymbol{P}_{et}.\ \neg\ (\exists \boldsymbol{x}_e)\ [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]))$

(119a) zufolge bezieht sich **kein** auf eine Funktion, die hintereinander auf zwei Prädikatsextensionen Q und P angewandt werden kann und dann den Wahrheitswert 1 liefert, wenn es kein Individuum x gibt, für das sowohl Q als auch P den Wahrheitswert 1 liefern, d.h. wenn die durch Q und P charakterisierten Mengen voneinander disjunkt sind. Es handelt sich also um die im Zusammenhang mit (108) per Differenzbildung gewonnene Extension von **kein**. Man beachte, dass (119) dieselbe Gestalt hat wie die in Abschnitt 4.5 gegebene Übersetzung (65a) von **kein**. Doch die Typen sind verschieden. Während nach der ursprünglichen Deutung die Bedeutung von **kein** zwei Prädikatsbedeutngen zu einer Proposition kombiniert werden, ergibt sich durch die in (119) definierte Funktion ein Wahrheitswert unmittelbar aus zwei Prädikatsextensionen. Entsprechendes gilt für die Übersetzungen der anderen Determinatoren:

(b) $\|\mathbf{ein\text{-}}_{indef}\| = (\lambda \boldsymbol{Q}_{et}.\ (\lambda \boldsymbol{P}_{et}.\ \neg\ (\exists \boldsymbol{x}_e)\ [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]))$

(c) $\|\mathbf{ein\text{-}}_{Num}\| = (\lambda \boldsymbol{Q}_{et}.\ (\lambda \boldsymbol{P}_{et}.\ \neg\ (\exists \boldsymbol{x}_e)\ [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]))$

(d) $\|\mathbf{jed\text{-}}\| = (\lambda \boldsymbol{Q}_{et}.\ (\lambda \boldsymbol{P}_{et}.\ \neg\ (\exists \boldsymbol{x}_e)\ [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]))$

(e) $\|\mathbf{die\ meisten}\| = \mathbf{M}$ [Konstante des Typs (et)t]

(f) $\|\mathbf{d\text{-}}_{Russell}\| = (\lambda \boldsymbol{Q}_{et}.\ (\lambda \boldsymbol{P}_{et}.\ (\exists \boldsymbol{x}_e)\ [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\ (\exists \boldsymbol{y}_e)\ [\neg(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})] \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})]))$

Übungsaufgaben

A1 a) Was ist der semantische Typ der in (8) und (9) gegebenen Bedeutungen der koordinierenden Konjunktionen?

b) Formulieren Sie die Kompositionsregel (4) so um, dass sie mit den Analysen (8) und (9) verträglich ist.

A2 a) Geben Sie für die Formeln ') und (20) Strukturbäume im Stil von (18') an.

b) Eliminieren Sie die notationellen Abkürzungen in (25) und geben Sie für das Resultat einen Strukturbaum an.