1. Der algebraische Sprachbegriff

In diesem Abschnitt wollen wir einerseits die im letzten Kapitel eingeführte Syntax des Deutschen im Rahmen der Montagueschen Sprachtheorie formulieren; dazu werden wir zunächst einmal den von Montague (in [UG]) entwickelten algebraisch-mengentheoretischen Syntaxbegriff vorstellen (Abschnitt 1.1.), um ihn dann auf das DEUTSCH-Fragment des ersten Kapitels anzuwenden (Abschnitt 1.2.). Weiterhin werden wir die ebenfalls in [UG] eingeführte allgemeine Theorie der direkten und indirekten Deutung von natürlichen wie formalen Sprachen vorstellen (Abschnitte 1.3. und 1.4.), um so eine theoretischen Grundlage für die in den darauffolgenden Abschnitten gebotene indirekte Deutung des DEUTSCH-Fragments zu haben.

1.1. Grundbegriffe der algebraischen Syntax

Bei den nun einzuführenden syntaxtheoretischen Begriffen wird es sich keineswegs um absolutes Neuland, sondern im wesentlichen um Verallgemeinerungen, Präzisierungen und Vertiefungen der Begriffsbildungen handeln, die in die Formulierung der Syntaxregeln in Kapitel EINS eingegangen sind.

Woraus besteht eine Syntax? Zunächst einmal aus Syntaxregeln! Folgen wir dem Ansatz von Kapitel EINS, so haben diese im allgemeinen die Form

$$(1)\quad r:\quad \frac{\begin{matrix}\alpha_1 & & k_1\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_n & & k_n\end{matrix}}{F_r(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \qquad k^*}$$

Dabei sind $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ <u>syntaktische Strukturen</u> (oder <u>Ausdrücke</u>), $k_1,\ldots,k_n$ und k^* <u>Namen für syntaktische Kategorien</u> (oder <u>Kategorienindizes</u>) und F_r ist eine <u>syntaktische Operation</u>. (r soll der Name der Regel sein.) Diese Operationen sind offenbar für beliebige Ausdrücke $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ definiert, weil sonst die letzte Zeile(Konklusion) der Regel keinen Sinn machen würde. Fassen wir also alle Ausdrücke der durch eine Syntax beschriebenen Sprache zu einer Menge A zusammen, so bildet diese Menge gemeinsam mit allen in den Syntaxregeln vorkommenden Operationen eine Algebra $\langle A,F_i\rangle_{i\in I}$. (I ist eine beliebige Menge, die die Operationen indiziert.) Eine solche Algebra bildet, wie wir noch sehen werden, den Kern einer Syntax im Montagueschen Sinne. Von daher scheint es also gerechtfertigt zu sein, von einem <u>algebraischen Syntaxbegriff</u> zu sprechen. Bevor wir uns nun den anderen Komponenten einer Syntax zuwenden, wird es nützlich sein, eine wesentliche Eigenschaft der syntaktischen Operationen zur Kenntnis zu nehmen. Wie wir nämlich bereits mehrfach erwähnt haben, besteht eine der Grundideen der Montagueschen Sprachtheorie darin, natürliche und formallogische Sprachen vollkommen parallel zu behandeln; anders ausgedrückt: eine natürliche Sprache soll so beschrieben werden, als ob es sich um ein formallogisches System handelte. Eine der wesentlichen Eigenschaften formallogischer Sprachen ist aber ihr eindeutiger syntaktischer Aufbau: sind zwei Ausdrücke einer formalen Sprache von gleicher Gestalt, so sind sie auch auf dieselbe Art und Weise aufgebaut worden. Da bei einer algebraischen Betrachtungsweise der syntaktische Aufbau von Ausdrücken durch die Operationen F_i $(i \in I)$ erledigt wird, läßt sich diese Eindeutigkeitsforderung wie folgt formulieren:

(2) Falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in A$, $i, j \in I$ und F_i und F_j n- bzw. m-stellig sind, so gilt:

$$F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F_j(\beta_1, \ldots, \beta_m)$$

gdw. $i = j$, $n = m$, $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_m$.

(Bedingung (2) impliziert zwar außerdem noch, daß $F_i = F_j$ gdw. $i = j$; das hat aber rein technische Gründe und, wie man sich leicht überlegt, keine tieferen Konsequenzen.)

Die Regeln und Operationen allein werden im Allgemeinfall nicht genügen, um z.B. Sätze oder Ausdrücke anderer Kategorien abzuleiten. Um nämlich eine Ableitung überhaupt anfangen zu können, benötigt man irgendwelche Grundausdrücke, also ein Lexikon. Die genaue Art und Weise der Gegebenheit des Lexikons ist im Prinzip völlig gleichgültig. Wir halten uns hier an Montague und betrachten es als eine Mengenfamilie $(\mathcal{L}_k)_{k \in K}$, die durch die Menge der Kategoriennamen indiziert wird. Um die Eindeutigkeit auch für Grundausdrücke zu gewährleisten, müssen wir dann allerdings in der noch zu liefernden Definition fordern, daß kein $\alpha \in \bigcup_{k \in K} \mathcal{L}_k$ zugleich ein komplexer Ausdruck ist.

Eine weitere vernünftige Forderung wird die sein, daß es außer den lexikalischen Ausdrücken und denen, die man durch sukzessive Anwendung der Operationen gewinnt, keine weiteren Ausdrücke geben soll; technisch gesprochen: die Menge A der Ausdrücke soll die (im Sinne der Mengeninklusion) kleinste Menge sein, die das Lexikon umfaßt und unter allen syntaktischen Operationen abgeschlossen ist.

Um die in Abschnitt 1.3. betrachteten Präzisierungen der Fregeschen Theorie von Sinn und Bedeutung zu vereinfachen, wird es sich außerdem empfehlen, eine der syntaktischen Kategorien als Satzkategorie auszuzeichnen. Die genaue Definition lautet nun:

(3) Eine (<u>algebraische</u>) <u>Syntax</u> Σ ist ein Gebilde

$$\Sigma = \langle A, F_i, \mathcal{L}_k, R, S \rangle_{i \in I, k \in K} \quad ,$$

für das gilt:

(i) $\langle A, F_i \rangle_{i \in I}$ ist eine Algebra, die Bedingung (2) erfüllt;

(ii) A ist die kleinste Menge M, für die gilt: M ist abgeschlossen unter allen F_i $(i \in I)$ und $\bigcup_{k \in K} \mathcal{L}_k \subseteq M$;

(iii) falls $i \in I$, so ist der Wertebereich von F_i disjunkt von $\bigcup_{k \in K} \mathcal{L}_k$ (dem <u>Lexikon</u>);

(iv) R ist eine Menge von Folgen der Form

$$\langle F_i, k_1, \ldots, k_n, k^* \rangle \quad ,$$

wobei $i \in I$, F_i n-stellig ist und $k_1, \ldots, k_n$,k^* $\in K$ (der Menge der <u>Kategorienindizes</u>);

(v) S (das <u>Satzsymbol</u>) $\in$ K.

Bevor wir uns weiteren syntaxtheoretischen Definitionen zuwenden, sei vermerkt, daß (3) keineswegs ausschließt, daß z.B. ein Ausdruck mehreren Kategorien angehört, daß es für eine oder mehrere Kategorien keine Grundausdrücke gibt oder daß eine Operation F_i z.B. in mehreren Regeln auftaucht. Allerdings soll auch beachtet werden, daß Klausel (i) impliziert, daß die Menge A der Ausdrücke nicht leer sein darf.

Was es heißen soll, daß ein Ausdruck α einer Kategorie k angehört, läßt sich nun leicht induktiv definieren:

(4) Sei $\Sigma = \langle A, F_i, \mathcal{L}_k, R, S \rangle_{i \in I, k \in K}$ eine algebraische Syntax, $\alpha \in A$ und $k \in K$. (Der <u>Ausdruck</u>) α <u>gehört der Kategorie</u> k <u>an</u> (gemäß Σ) gdw. α und k eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) $\alpha \in \mathcal{L}_k$;

(ii) es gibt $\beta_1, \ldots, \beta_n \in A$, $i \in I$, $k_1, \ldots, k_n \in K$ und $r \in R$, so daß gilt:

$$r = \langle F_i, k_1, \ldots, k_n, k^* \rangle$$

$$F_i(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \alpha,$$

β_1 gehört der Kategorie k_1 an,

.

.

β_n gehört der Kategorie k_n an.

So wie (4) jetzt dasteht, ist diese Definition strengenommen zirkulär; sie ist aber induktiv gemeint und ließe sich leicht so umschreiben. Man könnte dann (i) und (ii) mithilfe einer Relationsvariablen $\mathfrak{R}$ aufschreiben und sagen, daß die zu definierende Relation die kleinste Relation ist, die diese Klausel (für $\mathfrak{R}$ eingesetzt) erfüllt. Die Eindeutigkeit einer solchen Definition ergibt sich aus sehr allgemeinen rekursionstheoretischen Überlegungen. Aus Platzgründen verzichten wir jedoch auf solche genaue Definition und verweisen den mißtrauischen Leser auf das erste Kapitel von Moschovakis [EI], wo ein Rahmen für die Präzisierung der eben angedeuteten Definitionsmethode gesteckt wird.

Um den soeben eingeführten Syntaxbegriff etwas besser zu veranschaulichen und (vor allem) um noch weitere syntaxtheoretische Definitionen zu motivieren, werden wir eine sehr einfache formallogische Sprache im Rahmen von Definition (3) einführen; es handelt sich dabei um eine aussagenlogische Sprache mit nur einem Junktor ($\rightarrow$). Wir werden die Syntax so formulieren, daß wir mit einer einzigen Kategorie, der des Satzes, auskommen. Als "Atomsätze" lassen wir die Aussagenvariablen p_i $(i \in \omega)$ sowie die Konstanten $\top$ und $\bot$ zu, die wir als Namen für die Wahrheitswerte des Wahren bzw. des Falschen betrachten wollen. (Eine Semantik für die Sprache geben wir zwar nicht an, setzen aber voraus, daß dies auf eine vernünftige Art und Weise geschehen kann.) Wir werden die noch zu definierende Syntax durch

$$(5)\ \Sigma_1 = \langle A_1, F_i^1, \mathcal{G}_k^1, R_1, S_1 \rangle \quad i \in I_1, k \in K_1$$

bezeichnen und können jetzt schon folgendes festlegen:

$$(6)\ K_1 = \{S_1\},\ \mathcal{G}_{S_1} = \{p_i \mid i \in \omega\} \cup \{\top, \bot\}\ .$$

Wir werden mit einer einzigen syntaktischen Operation auskommen, und zwar einer solchen, die das Symbol $\rightarrow$ zwischen zwei Formeln schreibt und das Ergebnis in Klammern einschließt. Um diese Operation aber definieren zu können, müssen wir zunächst sagen, über welcher Menge sie operiert, was also A_1 sein soll. ($\mathcal{G}_{S_1}$ können wir z.B. nicht nehmen, da die Operation nicht aus A_1 herausführen darf.) Dazu werden wir eine Hilfskonstruktion einführen: es sei $\mathcal{A}$ die Menge $\mathcal{G}_{S_1} \cup \{(,),\rightarrow\}$ und $\mathcal{A}^*$ das <u>freie Monoid</u>, die Menge aller (endlichen) Verkettungen, über $\mathcal{A}$. (Die genaue Form der Verkettungsoperation, die wir durch Hintereinanderschreiben notieren, interessiert hier nicht.) F* sei die wie folgt definierte zweistellige

Operation über $\mathcal{A}^*$:

(7) Falls α und $\beta \in \mathcal{A}^*$, so ist:
$$F^*(\alpha, \beta) = (\alpha \rightarrow \beta)$$

Mit (7) können wir nun A_1 definieren:

(8) A_1 ist die kleinste Teilmenge von $\mathcal{A}^*$, so daß gilt:
A_1 ist abgeschlossen unter F^* und $\mathcal{G}_{S_1} \subseteq A_1$.

(Auch diese Definition könnte man genauer, d.h. induktiv, geben, worauf wir hier aus Platzgründen verzichten.) Die Definition der einzigen Operation, wir nennen sie $F^1_{\rightarrow}$, ist nun einfach; d.h. wir setzen:

(9) $I_1 = \{\rightarrow\}$;
$F^1_{\rightarrow} = F^* \upharpoonright A_1$ (= die Beschränkung von F^* auf Argumente aus A_1) .

Die Menge der Regeln versteht sich eigentlich auch von selbst:

(10) $R_1 = \{ \langle F^1_{\rightarrow}, S_1, S_1, S_1 \rangle \}$.

Man beachte, daß jedes $\alpha \in A_1$ gemäß Σ_1 auch einer Kategorie, nämlich S_1, angehört; das muß keineswegs so sein, wie wir anhand späterer Beispiele noch sehen werden. Weiterhin gelten folgende Zusammenhänge, wie man leicht nachprüft:

(11) Falls α der Kategorie S_1 angehört, so gehört $(\alpha \rightarrow \perp)$ der Kategorie S_1 an.

(12) Falls α und β der Kategorie S_1 angehören, so gehört $((\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \beta)$ der Kategorie S_1 an.

(13) Falls α und β der Kategorie S_1 angehören, so gehört $(((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp)$ der Kategorie S_1 an.

Wie man sich leicht (z.B. anhand von Wahrheitstafeln) klarmacht, entsprechen die in (11) - (13) erwähnten Ausdrücke bei einer üblichen (zweiwertigen) Deutung der Aussagenlogik den Formeln $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta)$ bzw. $(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

Obwohl (11) - (13) zweifellos richtige Behauptungen über unsere aussagenlogische Syntax Σ_1 darstellen, so sind sie dennoch keine Regeln von Σ_1; denn davon gibt es ja nur eine. Man ist aber irgendwie geneigt zu sagen, daß sich (11) - (13) aus unserer Syntax herleiten lassen in dem Sinne, daß man - ohne irgendetwas an der durch die Syntax definierten Sprache zu ändern - die folgenden Operationen und Regeln zu Σ_1 hinzunehmen könnte:

$$(11')\quad F^1_\neg(\alpha) = F^1_\to(\alpha,\bot)\ [= (\alpha\to\bot)]\ ;$$
$$\langle F^1_\neg, S_1, S_1\rangle \quad .$$
$$(12')\quad F^1_\vee(\alpha,\beta) = F^1_\to(F^1_\to(\alpha,\bot),\beta)\ [= ((\alpha\to\bot)\to\beta)]\ ;$$
$$\langle F^1_\vee, S_1, S_1, S_1\rangle \quad .$$
$$(13')\quad F^1_\leftrightarrow(\alpha,\beta) = F^1_\to(F^1_\to F^1_\to(\alpha,\beta), F^1_\to(F^1_\to(\beta,\alpha),\bot)),\bot)$$
$$[= (((\alpha\to\beta)\to((\beta\to\alpha)\to\bot))\to\bot)$$
$$\langle F^1_\leftrightarrow, S_1, S_1, S_1\rangle \quad .$$

Operationen wie $F^1_\neg$, $F^1_\vee$, $F^1_\leftrightarrow$ heißen auch polynomisch oder abgeleitet; sie zeichnen sich dadurch aus, daß sie nach gewissen einfachen Prinzipien aus den eigentlichen syntaktischen Operationen (in unserem Falle aus $F^1_\to$) zusammengesetzt werden. Solchen abgeleiteten Operationen entsprechen in naheliegender Weise gewisse Regeln, die wir abgeleitete Regeln nennen werden. Um zu einer genauen Definition dieser - vor allem für die in Abschnitt 1.4. einzuführende Übersetzungstheorie - sehr wichtigen Begriffe zu gelangen, ist es sinnig, sich einmal die Prinzipien anzuschauen, nach denen unsere drei Beispiels-Operationen aus der Operation $F^1_\to$ zusammengesetzt wurden. Im Falle von $F^1_\neg$ ist das sehr einfach: $F^1_\neg$ ist wie $F^1_\to$, nur daß das zweite Argument "eingefroren" (d.h. gleich $\bot$ gesetzt) wurde. Um hier ein allgemeines Prinzip zu entdecken, braucht man nur zwei einstellige Operationen Id und $Cn_\bot$ zu betrachten, die wie folgt definiert sind:

$$(14)\quad \left.\begin{array}{ll} Id(\alpha) & = \alpha \\ Cn_\bot(\alpha) & = \bot \end{array}\right\}\ \text{für alle } \alpha \in A_1 \quad .$$

$F^1_\neg$ läßt sich dann auch so darstellen:

$$(15)\quad F^1_\neg(\alpha) = F^1_\to(Id(\alpha), Cn_\bot(\alpha)) \ .$$

$F^1_\neg$ ist also zusammengesetzt aus den Operationen $F^1_\to$, Id und $Cn_\bot$. Die Art der Zusammensetzung kann man etwa so beschreiben: das Argument wird von innen nach außen gezogen. In diesem Falle spricht man auch von einer Komposition der Operation $F^1_\to$ mit Id und $Cn_\bot$; die genaue Definition folgt später.

Wie wir gleich sehen werden, reicht das Zusammensetzungs-Prinzip der Komposition voll aus, wenn man es nur allgemein genug formuliert und genügend Grund-Operationen zuläßt. Daß man nicht mit Id, $Cn_\bot$ und der Operation $F^1_\to$ aus der Syntax selbst auskommt, zeigt schon unser Beispiel (12'). (Der mißtrauische Leser mag an dieser Stelle herumprobieren!) Allerdings klappt es, wenn man die folgenden drei zweistelligen Hilfsoperationen zur Verfügung hat:

$$(16)\quad \left.\begin{aligned} Id_1(\alpha,\beta) &= \alpha \\ Id_2(\alpha,\beta) &= \beta \\ Cn^2_\perp(\alpha,\beta) &= \perp \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } \alpha,\beta \in A_1 \;.$$

$F^1_\vee$ läßt sich dann nämlich so darstellen:

$$(17)\quad F^1_\vee(\alpha,\beta) = F^1_\rightarrow(F^1_\rightarrow(Id_1(\alpha,\beta),Cn_\perp(\alpha,\beta)),Id_2(\alpha,\beta))$$

Das Kompositions-Prinzip ist hier dasselbe wie in (15) (nur zweistellig), aber die Grundoperationen sind verschieden. Ein Vergleich zwischen (14) und (16) sollte jedoch das allgemeine Prinzip verdeutlichen, nach dem solche Grund-Operationen ausgesucht werden: neben den Operationen der zugrundeliegenden Algebra selbst ($\langle A,F^1_\rightarrow\rangle$) kommen hier zwei Arten von Operationen infrage, von denen die eine Sorte stets eines der Argumente als Wert liefert (Id, Id_1, Id_2) und die andere irgendein festes Element der Trägermenge ($Cn_\perp, Cn^2_\perp$); im ersten Fall sprechen wir von den <u>Identitätsoperationen</u>, im zweiten von <u>Konstanten-Operationen</u>. Die genauen Definitionen sind wenig überraschend:

(18) Sei A eine Menge, n und m seien natürliche Zahlen, $m \leq n$. Die n-<u>stellige</u> m-<u>te Identität</u> (<u>über</u> A) ist diejenige n-stellige Operation $Id^n_{m,A}$, so daß für alle $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in A$ gilt:

$$Id^n_{m,A}(\alpha,\ldots,\alpha_n) = \alpha_m \;.$$

(19) Sei A eine Menge, n eine natürliche Zahl und $\beta \in A$. Die n-<u>stellige Konstanten-Operation für</u> β (<u>über</u> A) ist diejenige n-stellige Operation $Cn^n_{\beta,A}$, so daß für alle $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in A$ gilt:

$$Cn^n_{\beta,A}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \beta \;.$$

(Den Index A lassen wir meistens weg.)
Jetzt definieren wir noch das Prinzip der Komposition - Argumente nach außen ziehen - und dann können wir leicht angeben, was abgeleitete Operationen und Regeln sind. Bei dieser Definition müssen wir nur aufpassen, daß wir mit den Stellenzahlen nicht durcheinandergeraten; wenn wir nämlich (wie in (15)) eine Operation F mit gewissen anderen Operationen $G_1,\ldots,G_n$ komponieren - in (15) wurde $F^1_\rightarrow$ mit Id und $Cn_\perp$ komponiert - müssen $G_1,\ldots,G_n$ alle von der gleichen Stellenzahl m sein - m = 1 in (15) - und n muß die Stellenzahl von F sein; die Stellenzahl der Gesamtoperation ist dann wieder m.

Das ergibt sich einfach aus dem Prinzip des Argumente-Herausziehens. Die genaue Definition lautet:

(20) Sei A eine Menge, $n, m \in \omega$, F eine n-stellige Operation über A; $G_1, \ldots, G_n$ seien m-stellige Operationen über A. Die <u>Komposition von</u> F <u>mit</u> $G_1, \ldots, G_n$ ist diejenige m-stellige Operation $F\langle G_1, \ldots, G_n\rangle$ über A, so daß für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$ gilt:

$$F\langle G_1, \ldots, G_n\rangle (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$
$$= F(G_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, G_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)) \quad .$$

In der in (18) - (20) eingeführten Notation lassen sich also $F^1_\neg$ und $F^1_\vee$ so darstellen:

(15') $F^1_\neg = F^1_\rightarrow \langle Id^1_1, Cn^1_\perp\rangle$

(16') $F^1_\vee = F^1_\rightarrow \langle F^1_\rightarrow \langle Id^2_1, Cn^2_\perp\rangle, Id^2_2\rangle$

Eine <u>polynomische</u> oder <u>abgeleitete Operation über</u> einer Algebra (oder einer Syntax) ist eine solche, die entweder zur Algebra selbst gehört, eine Identitäts- oder Konstanten-Operation ist oder mithilfe des Kompositions-Prinzips (20) aus polynomischen Operationen gewonnen werden kann. Es soll dabei erwähnt werden, daß es dabei im Falle von algebraischen Syntaxen genügt, nur solche Konstanten-Operationen Cn^n_β zuzulassen, für die β ein <u>lexikalischer</u> Ausdruck ist; den Beweis dafür wollen wir hier nicht extra angeben, er läßt sich leicht induktiv über die (dazu zu definierende) Komplexität der Ausdrücke einer Syntax führen. Die Definition von abgeleiteter Regel ist nun umständlich, aber naheliegend:

(21) Sei $\Sigma = \langle A, F_i, \mathcal{G}_k, R, S\rangle_{i\in I, k\in K}$ eine Syntax, F^* eine n-stellige polynomische Operation über Σ, $k_1, \ldots, k_n, k^* \in K$. Dann ist $r^* = \langle F^*, k_1, \ldots, k_n, k^*\rangle$ eine (<u>aus</u> Σ) <u>abgeleitete Regel</u>, falls sie eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $r^* \in R$;

(ii) $F^* = Id^n_m$ (für ein $m \leq n$) und $k^* = k_m$;

(iii) $F^* = Cn^n_\beta$ für ein $\beta \in \mathcal{G}_{k^*}$;

(iv) $F^* = F\langle G_1, \ldots, G_m\rangle$ für gewisse abgeleitete Operationen $G_1, \ldots, G_m$ und F, und es gibt $k^*_1, \ldots, k^*_m \in K$, so daß die folgenden Folgen abgeleitete Regeln sind:

$$\langle G_1, k_1, \ldots, k_n, k_1^* \rangle$$
$$\vdots$$
$$\langle G_m, k_1, \ldots, k_n, k_m^* \rangle$$
$$\langle F\ , k_1^*, \ldots, k_m^*, k^* \rangle \quad .$$

Die genaue Gestalt der induktiven Definition (21) veranschaulicht man sich am besten, indem man einige abgeleitete syntaktische Regeln (wie z.B. in (11) -(13)) ausformuliert.

Bevor wir nun die reine Syntaxtheorie für eine Weile verlassen, werfen wir noch einen letzten Blick auf unsere Beispiels-Syntax Σ_1. Es fällt vor allem auf, daß es nur eine einzige syntaktische Kategorie, die des Satzes, gibt; manch einer hätte vielleicht erwartet, daß es auch noch eine Kategorie der Junktoren gäbe, deren einziger Vertreter das Symbol $\rightarrow$ ist. Wir haben hier allerdings die Junktoren synkategorematisch (im Gegesatz zu: lexikalisch) eingeführt, eine Methode, die man bei Montague häufiger findet. Dieses Vorgehen ist jedoch keineswegs essentiell, sondern sollte lediglich die Allgemeinheit des algebraischen Syntaxbegriffes illustrieren. In der Tat hätten wir auch mehr als eine Kategorie zulassen können, ohne daß sich irgendetwas wesentliches an der Sprache geändert hätte.

Aufgaben zu Abschnitt 1.1.

[1]: Zeigen Sie, daß Σ_1 eine algebraische Syntax ist.

[2]: Stellen Sie $F^1_{\leftrightarrow}$ in der in (18) - (20) eingeführten Notation dar.

[3]: Zeigen Sie, daß die in (11') - (13') angegebenen Folgen tatsächlich (aus Σ_1) abgeleitete Regeln sind.

[4]: Definieren Sie eine Syntax

$$\bar{\Sigma}_1 = \langle \bar{A}_1, \bar{F}^1_i, \bar{\mathcal{G}}^1_k, \bar{R}_1, S_1 \rangle_{i \in \bar{I}_1, k \in \bar{K}_1} \quad ,$$

die dieselben Ausdrücke der Kategorie S_1 erzeugt, wie Σ_1, die aber zusätzlich den Junktor $\rightarrow$ (in einer eigenen Kategorie) im Lexikon hat. Zeigen Sie, daß die in Aufgabe [3] betrachteten Regeln auch abgeleitete Regeln bezüglich $\bar{\Sigma}_1$ sind.

[5]: Weisen Sie die Korrektheit des Begriffs der abgeleiteten Regel nach. D.h.: falls $\Sigma = \langle A, F_i, \mathcal{G}_k, R, S \rangle_{i \in I, k \in K}$ eine Syntax ist und $\langle F^*, k_1, \ldots, k_n, k^* \rangle$ eine aus Σ abgeleitete Regel, dann gilt für beliebige $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$: falls α_1 der Kategorie k_1 angehört, ..., α_n der Kategorie k_n angehört, so gehört $F^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der Kategorie k^* an.

1.3. Bedeutungsalgebren und Frege-Semantik

Bevor wir nun die Methode der indirekten Deutung in ihrer allgemeinen Form vorstellen, wird es nötig sein, den Begriff der Deutung oder direkten Deutung einzuführen; die indirekte Deutung wird sich nämlich als Spezialfall der direkten Deutung herausstellen. In diesem Abschnitt sollen daher die wichtigsten Begriffe der algebraischen Semantik eingeführt werden. Dazu werden wir uns wieder auf die in Abschnitt 1.1. betretene allgemein-theoretische Ebene zurückbegeben; der dort eingeführte algebraische Syntaxbegriff wird sich für die in diesem Abschnitt angestellten Betrachtungen als fruchtbar erweisen.

Für den vorliegenden Abschnitt gehen wir einmal davon aus, daß $\Sigma = \langle A, F_i, \delta_k, R, S \rangle_{i \in I, k \in K}$ eine algebraische Syntax ist. Ein wesentliches Prinzip, nach dem jede Art von Bedeutungszuweisung (oder Deutung) im Rahmen der Montagueschen Sprachtheorie vor sich geht, ist das Fregeprinzip, das besagt, daß die Bedeutung eines syntaktisch komplexen Ausdruckes α funktional von den Bedeutungen seiner Teilausdrücke und dem syntaktischen Aufbau von α abhängt. Im Rahmen der algebraischen Syntax Σ ist natürlich ein komplexer Ausdruck α ein solcher, der sich (für gewisse $\beta_1, \dots, \beta_n \in A$ und $i \in I$) folgendermaßen darstellen läßt:

(1) $\alpha = F_i(\beta_1, \dots, \beta_n)$

(Per definitionem gibt es dann auch keine andere Darstellungsweise von α innerhalb der Algebra $\langle A, F_i \rangle_{i \in I}$!) Angenommen also, die Teilausdrücke $\beta_1, \dots, \beta_n$ hätten jeweils die Bedeutungen $b(\beta_1), \dots, b(\beta_n)$; das Fregeprinzip besagt dann, daß sich die Bedeutung $b(\alpha)$ wie folgt "berechnen" läßt:

(2) $b(\alpha) = B_i(b(\beta_1), \dots, b(\beta_n))$,

wobei B_i eine gewisse semantische Operation ist, die den funktionalen Zusammenhang zwischen den Teil-Bedeutungen und der Bedeutung des Gesamtausdruckes herstellt. Weist man nun jedem lexikalischen Ausdruck eine Bedeutung und jeder syntaktischen Operation eine semantische Operation zu, so läßt sich mithilfe des Fregeprinzips die Bedeutung jedes Ausdruckes auf die in (2) angedeutete Weise angeben. Eine Deutung besteht dementsprechend aus zwei Dingen: einer Algebra, in der die semantischen Operationen über einer Menge von Bedeutungen operieren sowie einer Funktion b, die jedem lexikalischen Ausdruck eine Bedeutung zuordnet:

(3) Eine Deutung (oder Interpretation) $\mathfrak{D}$ (für Σ) ist ein Gebilde $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b \rangle_{i \in I}$, für das gilt:

(i) $\langle \mathfrak{B}, B_i \rangle_{i \in I}$ ist eine Algebra vom gleichen Ähnlichkeitstyp wie $\langle A, F_i \rangle_{i \in I}$ (d.h.: F_i hat dieselbe Stellenzahl wie B_i, für alle $i \in I$);

(ii) b ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\bigcup_{k \in K} \mathcal{G}_k$ und Werten in $\mathfrak{B}$.

Jetzt läßt sich b auf die folgende Art und Weise durch die gesamte Sprache hindurchziehen:

(4) Es sei $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b \rangle_{i \in I}$ eine Deutung für Σ. Für $\alpha \in A$ läßt sich die Bedeutung von α - $b^*(\alpha)$ - (gemäß $\mathfrak{D}$) induktiv (über α's "Komplexität") so definieren, daß gilt:

(i) $b^*(\alpha) = b(\alpha)$, falls $\alpha \in \bigcup_{k \in K} \mathcal{G}_k$;

(ii) $b^*(\alpha) = B_i(b^*(\beta_1), \ldots, b^*(\beta_n))$, falls $\alpha = F_i(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

(Statt Klausel (ii) hätte man auch kürzer schreiben können: b^* ist ein Homomorphismus von $\langle A, F_i \rangle_{i \in I}$ nach $\langle \mathfrak{B}, B_i \rangle_{i \in I}$.)

Die Schwäche (Inhaltsleere) dieser semantischen Begriffe zeigt sich darin, daß sie offenbar nur wenige interessante Sinnrelationen zu definieren erlauben; so z.B. den folgenden Synonymiebegriff:

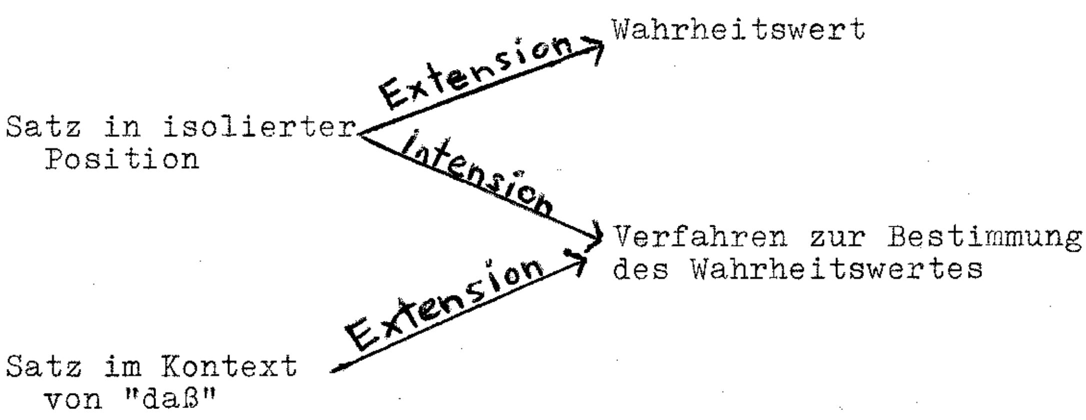
(5) α ($\in A$) und β ($\in A$) sind $\mathfrak{D}$-synonym (für eine Deutung $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b \rangle_{i \in I}$), falls $b^*(\alpha) = b^*(\beta)$.

Obwohl Definition (3) noch einige andere Synonymiebegriffe zuläßt, gibt es offenbar keinen naheliegenden Weg, um den Begriff der logischen Folgerung o. ä. allgemein, d.h. im Rahmen beliebiger Interpretationen, zu definieren. Wir werden deshalb den hier eingeführten Interpretationsbegriff etwas weiter einschränken, indem wir neben dem Fregeprinzip noch andere, ebenfalls für die Fregesche (und Montaguesche) Sprachtheorie wichtige Prinzipien in unsere semantischen Definitionen mit aufnehmen; den daraus resultierenden eingeschränkten Interpretationsbegriff werden wir dann (mit Montague) als Begriff der Fregeschen Interpretation bezeichnen.

Eines der Hauptprinzipien der Fregeschen Sprachphilosophie (Frege [SB]) ist bekanntlich die Unterscheidung von Sinn und Bedeutung oder, wie wir unter Umgehung der unintuitiven Terminologie Freges sagen wollen: Intension und Extension (Carnap [MN]). Da wir hier keine Einführung in die Fregesche Sprachphilosophie geben wollen und können, werden wir nur einige der für unsere Zwecke wichtigsten Ideen stichwortartig zusammenfassen; dabei wird es uns weniger auf die historisch-philologische Genauigkeit als auf die prinzipielle Übertragbarkeit auf den bisher dargestellten sprachtheoretischen Rahmen ankommen, weswegen wir gelegentlich einige Fregesche Begriffsbildungen mit den erstmals in Carnap [MN] vorgeschlagenen Präzisierungen identifizieren, ohne daß dies immer ohne weiteres gerechtfertigt scheint. Der Zweck heiligt jedoch hoffentlich die Mittel.

Nach Frege entsprechen jedem sprachlichen Ausdruck α zwei semantische Entitäten: α's Extension und α's Intension. Die Extension ist dabei das, wofür der Ausdruck steht, was diesem Ausdruck in der Wirklichkeit entspricht. Ist α ein Name, so ist α's Namensträger zugleich α's Extension; ist α ein Begriffswort (intransitives Verb, Substantiv), so ist α's Extension (z.B.) die Menge aller Dinge, die unter den Begriff fallen; sollte es sich bei α um einen (deklarativen) Satz handeln, so ist α's Extension der Umstand, ob α wahr ist oder nicht, d.h. α's Wahrheitswert. Mit der Intension ist es nicht ganz so einfach wie mit der Extension, da es verschiedene, eventuell sogar nicht äquivalente Kriterien (vgl. Perry [FD]) dafür gibt, die Intension eines sprachlichen Ausdrucks (den Fregeschen Sinn) zu ermitteln. Wir entscheiden uns hier für das folgende Kriterium: die Intension eines Ausdrucks ist ein Verfahren, unter beliebigen Umständen die Extension festzustellen, wobei wir solche Verfahren mit Funktionen, welche Umständen oder (möglichen) Welten Extensionen zuweisen, identifizieren wollen. Normalerweise, d.h. in sog. extensionalen syntaktischen Umgebungen, tragen die Extensionen der Teilausdrücke – und (neben der syntaktischen Konstruktion) nur sie – zur Extension des Gesamtausdruckes bei. Es gibt jedoch auch syntaktische Umgebungen (z.B. "daß"-Sätze), in denen die Intensionen der Teilausdrücke betrachtet werden ~~muß~~ müssen, um die Extension des Gesamtausdruckes zu ermitteln. Betrachtet man die Extension allerdings (wie Frege) stets als das, was zur Extension komplexerer Ausdrücke beiträgt, so kann man auch sagen: in diesen Fällen wird das, was normalerweise Intension ist zur Extension. (Frege spricht hier von der "ungeraden Bedeutung".) Am Beispiel des "daß"-Satzes:

(6)



Das Schema (6) wird uns helfen, einen wesentlichen Begriff einzuführen, den wir für die noch zu leistende Einengung des Interpretations an zentraler Stele herbeiziehen werden. Es ist klar, daß sich eine solche Einengung vor allem auf die für eine interessante Deutung zulässige Menge $\mathfrak{B}$ von Bedeutungen beziehen wird. Wenn wir auch nicht Extensionen oder Intensionen von Ausdrücken als deren Bedeutungen ansehen werden, so werden diese beiden Arten von Entitäten wesentlich dazu beitragen, "zulässige" Mengen $\mathfrak{B}$ von Bedeutungen zu definieren. Als erstes werden wir definieren, was eine Menge (oder ein System) von möglichen Extensionen sprachlicher Ausdrücke ist; mögliche Intensionen lassen sich dann auf recht banale Weise konstruieren. Unsere Definition muß offenbar folgenden Forderungen genügen:

(7) (i) Die Wahrheitswerte sind mögliche Extensionen (von Sätzen).
(ii) Namensträger sind mögliche Extensionen (von Namen).
(iii) Mengen sind mögliche Extensionen (von Begriffswörtern).
(iv) Jede mögliche Intension ist eine mögliche Extension.

(Klausel (iv) ist eine Verallgemeinerung von (6).)
Eine einfache Methode, ein System möglicher Extensionen anzugeben, welches die Bedingungen (7) erfüllt, besteht in der (intensionalen) Typisierung, wonach verschiedene Arten von möglichen Extensionen in verschiedene Kategorien gesteckt werden: die Kategorie der Wahrheitswerte erhält den Namen t, die der Individuen (= mögliche Namensträger) den Namen e; alle anderen möglichen Extensionen sind funktionaler Natur: Mengen von Individuen (bzw. deren charakteristische Funktionen) gehören der Kategorie $\langle e,t\rangle$ an, weil sie Funktionen sind, die Gegenständen der Kategorie e solche der Kategorie t zuweisen; mögliche Intensionen gehören Kategorien $\langle s,\tau\rangle$ an, wobei τ wiederum der Name einer Kategorie ist; Intensionen von Namen, also

Funktionen, die Welten Individuen zuordnen, sind von der Kategorie $\langle s,e\rangle$, Intensionen von Sätzen von der Kategorie $\langle s,t\rangle$ usw. Die allgemeine Definition setzt zunächst eine Definition dieser Kategorien-Namen, der Typen, voraus:

(8) Die Menge T der Typen, ist die kleinste Menge, die folgendes erfüllt:

(i) $e \in T$; $t \in T$;

(ii) falls $\sigma \in T$ und $\tau \in T$, so auch $\langle \sigma, \tau \rangle \in T$;

(iii) falls $\tau \in T$, so auch $\langle s, \tau \rangle \in T$.

(Dabei sollen s,e und t drei wahllos herausgegriffene mengentheoretische Entitäten sein, von denen allerdings keines ein geordnetes Paar ist, weil sonst die Definition ungewollte Konsequenzen haben könnte.) Bevor man sagt, wann etwas eine mögliche Extension der und der Kategorie ist, muß man sich offenbar dafür entscheiden, was die möglichen Namensträger, Wahrheitswerte und Welten sind. Als Wahrheitswerte nehmen wir ein für allemal (wie spätestens seit Tarski üblich) die Zahlen 0 (= das Falsche) und 1 (= das Wahre). Was Welten und Individuen sind, lassen wir offen:

(9) Es seien D und W nicht-leere Mengen. Durch Induktion über T definieren wir für jedes $\tau \in T$ den Bereich $E_\tau^{D,W}$ der (bezüglich D und W) möglichen Extensionen der Kategorie (des Typs) τ wie folgt:

(i) $E_e^{D,W} = D$; $E_t^{D,W} = \{0,1\}$;

(ii) falls $\sigma \in T$ und $\tau \in T$, so ist $E_{\langle\sigma,\tau\rangle}^{D,W} = (E_\tau^{D,W})^{E_\sigma^{D,W}}$ (= die Menge der Funktionen mit Definitionsbereich $E_\sigma^{D,W}$ und Werten in $E_\tau^{D,W}$);

(iii) falls $\tau \in T$, so ist $E_{\langle s,\tau\rangle}^{D,W} = (E_\tau^{D,W})^{W}$.

(Die Parameter D und W spielen also in obiger Definition die Rolle der möglichen Namensträger oder Individuen bzw. der möglichen Umstände oder Welten; als Indizes lassen wir sie oft weg und schreiben auch E_τ statt $E_\tau^{D,W}$, wenn klar ist, was gemeint ist. Die Bedingung, daß weder D noch W leer sein dürfen, hat in erster Linie "technische" Gründe: spätere Definitionen werden dadurch einfacher.)

(9) erlaubt es uns, gewisse "inhaltliche" Redeweisen über Entitäten zu präzisieren, die als Extensionen sprachlicher Ausdrücke fungieren können: statt von einem Wahrheitswert könnten wir auch (umständlicher) von einer Entität der Kategorie t sprechen. Die folgende Tabelle soll einige (teilweise schon von uns benutzte) Redeweisen auf derartige typenlogische Begriffsbildungen zurückführen; dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß Ausdrücke wie "Proposition" oder "Individuenkonzept" (strenggenommen) nur in einem Kontext Sinn machen, in dem geklärt ist, was die zugrundeliegenden Mengen D und W sind:

(10)

"inhaltlich"	typenlogisch: mögliche Entitäten des Typs
Individuum (möglicher Namensträger)	e
Wahrheitswert	t
Proposition (Sachverhalt)	$\langle s,t\rangle$
Individuenkonzept	$\langle s,e\rangle$
Menge (von Individuen)	$\langle e,t\rangle$
Eigenschaft (v. Ind.)	$\langle s,\langle e,t\rangle\rangle$

Die Tabelle ließe sich zwar noch erweitern, enthält aber so schon die wichtigsten Begriffe. Übrigens kann die vollkommene Identifizierung von Mengen mit ihren charakteristischen Funktionen gelegentlich zu Komplikationen führen; wir werden aber stets aufpassen.

Mit Definition (9) haben wir jetzt auch den Begriff der <u>möglichen Intension</u> implizit mitdefiniert: das sind einfach nur mögliche Extensionen eines Typs der Gestalt $\langle s,\tau\rangle$. (Natürlich hängt auch der Begriff der möglichen Intension von Parametern D und W ab; die genaue Definition wollen wir uns aber schenken, weil wohl klar ist, wie sie aussehen muß.)

Würden wir uns strikt an die Frege-Carnapsche Betrachtungsweise halten, könnten wir an dieser Stelle zu den Bedeutungsalgebren zurückkehren und mögliche Intensionen als ihre Elemente, also als Bedeutungen natürlichsprachlicher Ausdrücke zu nehmen. Dieses Vorgehen würde es uns jedoch verbieten, Ausdrücke mit deiktischen Elementen zu interpretieren, wie sich an einem einfachen Beispiel demonstrieren läßt: die Extension eines Wortes wie "ich" ist in einer gegebenen Äußerungssituation offenbar der Sprecher (Äußerer). Es wäre also zunächst naheliegend, Äußerungssituationen und

Welten zu identifizieren und die Intension von "ich" als eine Funktion des Typs $\langle s,e\rangle$ anzusehen, die jeder "Welt" das Individuum zuordnet, das dort als Sprecher angesehen werden soll; dabei würde es sich offenbar jeweils um ein Individuum handeln, welches in der Extension des Wortes "sprechen" ist, womit ein Satz wie "ich spreche" stets (unter beliebigen Umständen) wahr wird. Das ist zunächst nicht so schlimm, solange wir uns die Umstände (Welten)als Äußerungskontexte vorstellen. Unangenehm wird die Sache erst, wenn wir einen solchen Satz in einen intensionalen Kontext stecken: "daß ich spreche". Nach diesem Vorgehen wäre die Extension des "daß"-Satzes eine vollkommen banale Proposition, nämlich gerade die, die stets, d.h. unter allen Umständen, wahr ist. Daß ich spreche, ist aber ein hochgradig kontingenter Sachverhalt, einer, der nicht unbedingt zu bestehen braucht. Der Grund dafür ist natürlich, daß sich das Wort "ich" in dem "daß"-Satz strikt auf den (tatsächlichen) Sprecher bezieht und nicht auf Personen, die unter gewissen, von der Äußerungssituation verschiedenen (aber in ihr betrachteten) Situationen sprechen: "ich" verhält sich also wie ein Name des tatsächlichen Sprechers. - Würde man umgekehrt "ich" stets dieselbe Extension zuweisen, käme man natürlich erst recht in Verlegenheit, wenn man z.B. ein und denselben Satz in verschiedenen Äußerungssituationen betrachtet. Die Frege-Carnapsche Methode von Extension und Intension muß also hier erweitert werden. Die einfachste (und zur Zeit wohl auch einzige) Erweiterung besteht in der sog. Doppelindizierung, die auch Montague vorschlägt: danach hängt die Extension eines deiktischen Ausdruckes zwar auch von einem Parameter ab, aber eben nicht von dem, der für die Ermittlung der Extension aus der Intension zuständig ist, also der "Welt". Wie Montague in [UG] werden wir diesen weiteren Parameter als Äußerungskontext bezeichnen, womit die Extensionen komplexer Ausdrücke Funktionen zweier Argumente sind: Welt und Äußerungskontext. Jedem sprachlichen Ausdruck läßt sich also nach dieser Theorie eine Funktion zuordnen, die - angewandt auf eine Welt und einen Äußerungskontext - als Wert die Extension dieses Ausdruckes liefert; diese Funktion wollen wir als die Bedeutung des Ausdruckes bezeichnen.

(11) Es seien C, D und W nicht-leere Mengen, $\tau \in T$.
Einen mögliche Bedeutung des Typs τ (relativ zu C, D und W) ist eine Funktion mit Definitionsbereich $C \times W$ und Werten in $E_{\tau}^{D,W}$.

Bei den nun zu definierenden Fregeschen Interpretationen wird es sich also um solche Deutungen $\langle \mathfrak{B}, B_i, b\rangle_{i\in I}$ handeln, deren Bedeutungszuweisung b* jedem Ausdruck (der vorgegebenen, durch die Syntax Σ definierten Sprache) eine (mögliche) Bedeutung im Sinne von Definition (11) zuweist. Insbesondere wird b* jedem Satz eine Bedeutung des Typs t zuordnen, also eine Funktion, die für einen gegebenen Außerungskontext c und eine gegebene Welt w sagt, ob dieser Satz bezüglich c und w wahr ist oder nicht. Anderen syntaktischen Kategorien werden andere Typen entsprechen: Substantive werden z.B. (üblicherweise) durch mögliche Bedeutungen des Typs $\langle e,t\rangle$ gedeutet; $\langle e,t\rangle$ wird also als die der syntaktischen Kategorie Substantiv entsprechende <u>logische Kategorie</u> angesehen. Da es aber keine von der jeweiligen Syntax Σ unabhängige Definition der Kategorie Substantiv gibt, kann man im allgemeinen nur davon ausgehen, daß jede Fregesche Interpretation eine Zuweisung von syntaktischen zu logischen Kategorien voraussetzt; die einzige Anforderung, die man dann im allgemeinen Fall an eine solche Zuweisung stellen kann, ist die, daß der Kategorie des Satzes (die ja schon durch die Syntax ausgezeichnet ist) der Typ t entsprechen soll. Wir definieren also:

(12) Eine <u>Typenzuweisung</u> (<u>für</u> $\Sigma = \langle A, F_i, \mathcal{G}_k, R, S\rangle_{i\in I, k\in K}$) ist eine Funktion φ mit Definitionsbereich K, Werten in T und der Eigenschaft, daß $\varphi(S) = t$.

Die Definition der Fregeschen Interpretation ist nach diesen Vorbereitungen klar; sie geschieht natürlich in Abhängigkeit gewisser Parameter C, D, W und φ:

(13) Es seien C, D und W nicht-leere Mengen, φ eine Typenzuweisung (für Σ). Eine Deutung $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b\rangle_{i\in I}$ ist eine <u>Fregesche Interpretation</u> (<u>für</u> Σ <u>bezüglich</u> C, D, W <u>und</u> φ), falls gilt:

(i) $\mathfrak{B}$ ist eine Menge von möglichen Bedeutungen (relativ zu C, D und W), d.h.:

$$\mathfrak{B} \subseteq \bigcup_{\tau\in T} ((E_\tau^{D,W})^{C\times W}) \quad ;$$

(ii) falls $\alpha \in \mathcal{G}_k$ $(k \in K)$, so ist $b(\alpha)$ eine mögliche Bedeutung des Typs $\varphi(k)$;

(iii) falls $\langle F_i, k_1, \ldots, k_n, k^* \rangle \in R$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathfrak{B}$

und:

u_1 ist eine mögliche Bedeutung des Typs $\varphi(k_1)$

$\vdots$

u_n ist eine mögliche Bedeutung des Typs $\varphi(k_n)$

so gilt:

$G_i(u_1, \ldots, u_n)$ ist eine mögliche Bedeutung des Typs $\varphi(k^*)$.

Die dritte Klausel impliziert (mit (ii)), daß für ein α der Kategorie k die Bedeutung $b^*(\alpha)$ eine mögliche Bedeutung des Typs $\varphi(k)$ ist; sie stellt also sicher, daß die Bedeutungszuweisung b^* immer in Abstimmung mit der Typenzuweisung φ geschieht.

Die Parameter C,D,W und φ lassen wir im folgenden für gewöhnlich weg, wenn wir irgendwelche Fregeschen Interpretationen betrachten; sie werden auch teilweise durch diese Interpretationen eindeutig festgelegt. (Vgl. dazu Aufgabe [1]!)

Der in (13) eingeschränkte Interpretationsbegriff ist natürlich weit genug, um auch solche Interpretationen zu erfassen, die rein extensional bzw. rein intensional (modallogisch) sind; man kann diese nämlich als Fregesche Interpretationen auffassen, die von der Möglichkeit der Doppelindizierung keinen Gebrauch machen:

(14) Sei $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i b \rangle_{i \in I}$ eine Fregesche Interpretation bezüglich (gewisser Entitäten) C, D, W und φ.

(i) $\mathfrak{D}$ ist (<u>rein</u>) <u>intensional</u>, falls C nur ein Element enthält.

(ii) $\mathfrak{D}$ ist (<u>rein</u>) <u>extensional</u>, falls $\mathfrak{D}$ rein intensional ist und W nur ein Element enthält.

Der Begriff der Fregeschen Interpretation erlaubt es nun, eine ganze Reihe von interessanten semantischen Begriffsbildungen zu definieren; der grundlegende ist der der <u>Wahrheit</u> eines Satzes:

(15) Es sei α ($\in A$) ein Ausdruck der Kategorie S und $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b \rangle_{i \in I}$ eine Fregesche Interpretation bezüglich C,D,W und φ. α ist <u>wahr am Punkt</u> $\langle c, w \rangle$ ($\in C \times W$), falls $b^*(\alpha)(\langle c, w \rangle) = 1$.

Wie sich bereits in Definition (15) zeigt, spielen die Paare $\langle c,w\rangle \in C\times W$ eine wichtige Rolle, da sich an ihnen die Extensionen der sprachlichen Ausdrücke "manifestieren". Die Menge $C\times W$ aller dieser Paare - diese Menge ist (vgl. Aufgabe [1] (i)) eindeutig durch eine gegebene Fregesche Interpretation festgelegt - nennen wir die Menge der Referenzpunkte (von $\mathfrak{D}$). In Sprachen mit deiktischen Elementen gibt es nun zwei Arten von Referenzpunkten, wie die folgende Überlegung zeigt: angenommen, ein bestimmter Ausdruck $\alpha \in A$ ist ein rein deiktischer Ausdruck zur Bezeichnung des jeweiligen Sprechers; α's Extension hängt also nur vom Äußerungskontext $c \in C$ ab. (α spielt also im wesentlichen die Rolle des deutschen "ich".) Weiterhin sei β ein Begriffswort, dessen Extension stets die Menge der jeweils lebenden Personen sei; β soll kein deiktisches Wort sein, weswegen also seine Extension stets nur von den jeweiligen Umständen $w \in W$ abhängt. Eine Forderung an eine "vernünftige" Deutung wäre wohl, daß in allen denkbaren Situationen $\langle c,w\rangle$ der Referent von α (bezüglich c) in der Extension von β (bezüglich w) liegt. (Wer das für eine unzulässige Einschränkung hält, kann für β auch so etwas wie "existieren" nehmen, solange es sich nur nicht um ein rein deiktisches Wort handelt.) Nun wäre aber wohl auch an einem solchen "vernünftigen" Referenzpunkt $\langle c,w\rangle$ eine Situation denkbar, in der der tatsächliche Sprecher (nennen wir ihn einmal u) nicht zu den Lebenden (bzw. Existierenden) gehört; dazu benötigte man also ein $w' \in W$, sodaß u nicht zu β's Extension an w' gehört. Wenn es aber ein solches w' gibt - was ja durchaus wünschenswert ist - dann gibt es aber auch den Referenzpunkt $\langle c,w'\rangle$, an dem der Referent von "ich" nicht zu den Lebenden (Existierenden) gehört. Obwohl also ein solcher Referenzpunkt einerseits wünschenswert ist (damit wir ein solches w' überhaupt zur Verfügung haben), gehört er dennoch nicht zu den Referenzpunkten, die wir als vernünftig ansehen würden; er verkörpert sozusagen keine denkbare Situation. Referenzpunkte der ersten Art ($\langle c,w\rangle$), solche, die also in dem angedeuteten Sinne vernünftig sind, werden wir auch als aktualisierbar bezeichnen. (Vgl. Montague [UG], 231, wo auch von ausgezeichneten Referenzpunkten gesprochen wird; Kaplan [D] spricht von Äußerungsumständen, die er den Auswertungsumständen, den Referenzpunkten allgemein, gegenüberstellt.) Aktualisierbare Referenzpunkte haben also die Eigenschaft, daß der Äußerungskontext und die Welt aufeinander abgestimmt sind, was man im Fall von $\langle c,w'\rangle$ wohl nicht sagen kann.

Für das weitere Vorgehen wollen wir also davon ausgehen, daß jeder Fregeschen Interpretation $\mathfrak{D}$ eine Menge von aktualisierbaren Referenzpunkten zugeordnet wird; diese Menge wird natürlich in der Menge aller Referenzpunkte von $\mathfrak{D}$ enthalten sein. Da sich für spätere Überlegungen (Abschnitt 3.2.) ein etwas allgemeineres Vorgehen empfiehlt, sehen die folgenden Definitionen vielleicht etwas umständlich aus; bei den späteren "inhaltlichen Füllungen" dieser Begriffe wird aber dieses Vorgehen verständlich werden:

(16)(i) Ein <u>Modell</u> (<u>für</u> Σ) ist ein Paar $\langle \mathfrak{D}, \rho \rangle$, wobei $\mathfrak{D}$ eine Fregesche Interpretation (für Σ bezüglich geeigneter Entitäten) und ρ ein Referenzpunkt von $\mathfrak{D}$ ist.

(ii) Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Modellen, $\mathfrak{D}$ eine Fregesche Interpretation und ρ ein Referenzpunkt von $\mathfrak{D}$. ρ ist ein <u>aktualisierbarer Referenzpunkt von</u> $\mathfrak{D}$ (<u>im Rahmen von</u> $\mathcal{K}$), falls $\langle \mathfrak{D}, \rho \rangle \in \mathcal{K}$.

(Anstatt von <u>Wahrheit an einem Referenzpunkt</u> sprechen wir im folgenden auch von <u>Wahrheit in einem Modell</u>; die Definition erübrigt sich: vgl. (15)!)

Bevor wir noch weitere Begriffe aus der Semantik einführen, wollen wir die bisherigen Definitionen anhand eines einfachen Beispiels erläutern; dabei handelt es sich um eine sehr primitive Sprache der modalen Prädikatenlogik, die durch eine algebraische Syntax

(17) $\Sigma_2 = \langle A_2, F_i^2, \mathfrak{g}_k^2, R_2, S_2 \rangle \quad i \in I_2, k \in K_2$

definiert wird. Dabei gilt:

(18) $K_2 = \{ VAR, KON, P1, P2, S_2 \}$

$$\mathfrak{g}^2_{VAR} = \{ x_i \mid i \in \omega \} ; \quad \mathfrak{g}^2_{KON} = \{ c_i \mid i \in \omega \} ;$$
$$\mathfrak{g}^2_{P1} = \{ P^1_i \mid i \in \omega \} ; \quad \mathfrak{g}^2_{P2} = \{ P^2_i \mid i \in \omega \} ;$$
$$\mathfrak{g}^2_{S_2} = \emptyset \quad .$$

VAR und KON werden als Namen für die Kategorien der Individuenvariablen bzw. -konstanten angesehen; P1 und P2 bezeichnen die Kategorien der ein- bzw. zweistelligen Prädikate. <u>Primformeln</u> sollen die Form $P^1_i(\alpha)$ bzw. $P^2_i(\alpha, \beta)$ haben, wobei α und β Variablen oder Konstanten sind. Komplexe Formeln (= Ausdrücke der Kategorie S_2) haben die Form $\neg\alpha$, $\Box\alpha$, $\Diamond\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ oder

$(\alpha \vee \beta)$, wobei α und β ebenfalls (möglicherweise komplexe) Formeln sind; $\Box\alpha$ bzw. $\Diamond\alpha$ wird gelesen als: "es ist notwendigerweise so, daß α" bzw. "es ist möglicherweise so, daß β".(Quantoren gibt es nicht, weswegen die Bezeichnung "Prädikatenlogik" eventuell irreführend ist.) Die genaue Gestalt der Syntax wollen wir hier nicht extra angeben.

Aus der Unzahl von Fregeschen Interpretationen für Σ_2 interessieren uns natürlich nur solche, die Variablen und Konstanten Individuen und ein- bzw. zweistelligen Prädikaten ein- bzw. zweistellige Relationen als Extensionen zuordnen; die zugrundeliegende Typenzuweisung muß also vernünftig sein:

(19) Die <u>für Σ_2 korrekte</u> Typenzuweisung ist dasjenige φ^*, für das gilt:

(i) $\varphi^*(\mathrm{VAR}) = \varphi^*(\mathrm{KON}) = e$;
(ii) $\varphi^*(\mathrm{P1}) = \langle e,t\rangle$;
(iii) $\varphi^*(\mathrm{P2}) = \langle e,\langle e,t\rangle\rangle$.

Weiterhin sollen die Prädikate als nicht-deiktische Ausdrücke interpretiert werden; ihre Extensionen dürfen also nicht vom Äußerungskontext (wohl aber von der Welt) abhängen. Die Konstanten wollen wir als echte Namen auffassen, d.h. als Ausdrücke, die an jedem Referenzpunkt dasselbe Individuum bezeichnen. Die Variablen hingegen wollen wir als (rein) deiktische Ausdrücke auffassen: ihre Extension soll echt vom Äußerungskontext und von nichts anderem abhängen. Falls also c ein Äußerungskontext ist und x_0 an diesem Kontext auf ein Individuum u referiert, so können wir (beispielsweise) u als den Sprecher im Kontext c betrachten, falls wir x_0 als einen Ausdruck ansehen, der in dieser formalen Sprache eine ähnliche Funktion erfüllt wie das Wort "ich" im Deutschen. Folgende Interpretationen sind also für uns interessant:

(20) Es sei $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b\rangle_{i \in I}$ eine Fregesche Interpretation (für Σ_2) bezüglich C,D,W und φ. $\mathfrak{D}$ ist <u>interessant</u>, falls gilt:

(i) $\varphi = \varphi^*$;
(ii) falls $\alpha \in \mathcal{G}_{P1} \cup \mathcal{G}_{P2}$, so ist $b(\alpha)(c,w) = b(\alpha)(c',w)$ für alle $c,c' \in C$ und $w \in W$;

(iii) falls $\alpha \in \mathcal{L}_{KON}$, so ist $b(\alpha)(c,w) = b(\alpha)(c',w')$ für alle Referenzpunkte $\langle c,w \rangle$ und $\langle c',w' \rangle$ von $\mathfrak{D}$;

(iv) falls $\alpha \in \mathcal{L}_{VAR}$, so ist $b(\alpha)(c,w) = b(\alpha)(c,w')$ für alle $c \in C$ und $w,w' \in W$;

(v) die Operationen B_i interpretieren F_i^2 so, daß sich eine übliche Prädikatenlogik (ohne Quantoren) mit Leibnizmodalitäten ergibt.

(Der Bezug auf die <u>Leibnizmodalitäten</u> soll besagen, daß ein Satz $\Box\alpha$ genau dann an einem Referenzpunkt $\langle c,w \rangle$ wahr ist, falls an jedem Referenzpunkt der Form $\langle c,w' \rangle$ wahr ist.) Die Klausel (v) ist zwar etwas vage gehalten, weil wir die konkreten syntaktischen Operationen F_i^2 nicht angegeben haben; eine genaue Formulierung ist aber vollkommen unproblematisch.

Wie man leicht zeigt, gilt für viele interessante Fregesche Interpretationen, daß der Satz $P_1^1(x_0)$ wahr sein kann an einem Referenzpunkt $\langle c,w \rangle$, ohne daß deswegen auch $\Box P_1^1(x_0)$ an $\langle c,w \rangle$ wahr ist; der Schluß von "ich lebe" auf "ich lebe notwendigerweise" ist also nicht erlaubt. Andererseits muß man gerade in solchen Interpretationen Referenzpunkte $\langle c,w' \rangle$ betrachten, an denen P_1^1 falsch ist, was unerwünscht sein mag; die Unterscheidung zwischen aktualisierbaren und nicht aktualisierbaren Referenzpunkten muß also noch eingeführt werden. Für den Zweck dieser Darstellung mag es genügen, den Zusammenhang zwischen x_0, das als "ich" aufgefaßt werden soll, und P_1^1, das wir als Ausdruck für "leben" (oder auch "existieren") ansehen wollen, als einziges Kriterium für den Begriff der Aktualisierbarkeit zu nehmen. Ein Referenzpunkt ρ ist dann offenbar genau dann aktualisierbar, wenn an ρ der Satz $P_1^1(x_0)$ wahr ist. Dies führt zu folgender Defintion:

(21) Die Klasse $\mathfrak{M}^*$ der <u>erwünschten</u> Modelle für Σ_2 umfaßt genau die Modelle $\langle \mathfrak{D}, \rho \rangle$ für Σ_2, sodaß $\mathfrak{D}$ interessant ist und in denen

$$P_1^1(x_0)$$

wahr ist.

Die Klasse $\mathfrak{K}^*$ wurde hier unter Zuhilfenahme eines Satzes der durch Σ_2 definierten (Objekt-)Sprache angegeben. Das zeigt in gewisser Weise, daß diese Klasse eine relativ elementare Struktur hat. Wir sagen in diesem Falle, daß die Modellklasse $\mathfrak{K}^*$ durch das Bedeutungspostulat $P_1^1(x_0)$ definierbar ist. Im allgemeinen ist eine Klasse $\mathfrak{K}$ von Modellen durch das System Δ von Bedeutungspostulaten definierbar, falls Δ eine Menge von Sätzen ist und $\mathfrak{K}$ die Klasse der Modelle ist, in denen alle Sätze aus Δ wahr sind. (Dabei ist zu beachten, daß natürlich nicht jede Klasse von Modellen auf diese Weise definierbar ist.) Wenn wir später Modellklassen der noch einzuführenden Sprache der Intensionalen Logik definieren, so wird dies stets unter Rückgriff auf Bedeutungspostulate geschehen. (Der Ausdruck "Bedeutungspostulat" geht auf Carnap [MN], 222ff., zurück; die Idee ist aber viel älter.)

Bezüglich einer Klasse $\mathfrak{K}$ von Modellen (einer Sprache) läßt sich der folgende relative Begriff von Äquivalenz von Sätzen definieren:

> (22) Es sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von Modellen für Σ, α und β ($\in A$) seien Ausdrücke der Kategorie S. α und β sind $\mathfrak{K}$-äquivalent, falls für jedes Modell $\mathfrak{M} \in \mathfrak{K}$ gilt: α ist wahr in $\mathfrak{M}$ gdw. β wahr ist in $\mathfrak{M}$.

Dieser Äquivalenzbegriff nimmt im Unterschied zu dem in (5) eingeführten Synonymie-Begriff auf Modell-Klassen und somit indirekt auf die Unterscheidung von aktualisierbaren und nicht-aktualisierbaren Referenzpunkten bezug; er ist insofern ein schwächerer Begriff als der der Synonymie und sollte daher nicht mit diesem verwechselt werden. Montague hat in [UG] darauf hingewisen, daß man für natürliche Sprachen Fregesche Interpretationen betrachten könnte, die an gewissen nicht-aktualisierbaren Referenzpunkten sogar "logische" Wörter (wie z.B. "und", "nicht", "jeder") anders interpretieren als üblich; auf diese Weise könnten Satzpaare wie

> (23) (i) Walter schläft oder Daisy arbeitet.
>
> (ii) Es ist nicht so, daß Walter nicht schläft und Daisy nicht arbeitet.

als äquivalent, aber nicht synonym herauskommen. Da man dann Synonymie (und nicht Äquivalenz) als Kriterium der Ersetzbarkeit in Glaubenskontexten annehmen kann, wäre es möglich, im Rahmen einer solchen Theorie zu erklären, warum sich (23)(i) und (ii) trotz ihrer logischen Äquivalenz in gewissen Kontexten verschieden verhalten: "In particular, it is possible to provide within the present framework a natural treatment of belief contexts that lacks the controversial property of always permitting interchange on the basis of logical equivalence." (Montague [UG],231) Montague hat diese Theorie allerdings nicht weiterverfolgt, sondern stattdessen die Äquivalenz (die er als "logische Äquivalenz" bezeichnete) als hinreichendes Kriterium für eine Ersetzbarkeit von Sätzen - auch in Glaubenskontexten - angesehen. "But even to those who, like myself, believe that the best and most elegant approach is to permit unrestricted interchange on the basis of logical equivalence it may be of some interest to learn that this approach has genuine alternatives and is not forced upon us." (ebd.)

Obwohl es noch weitere interessante semantische Begriffsbildungen innerhalb der Montagueschen Sprachtheorie gibt (z.B. diejenigen, die auf Vorkommen von Sätzen an aktualisierbaren Referenzpunkten bezug nehmen), verlasssen wir jetzt dieses Gebiet und wenden uns stattdessen der Theorie der indirekten Deutung, also der Deutung nach vorheriger Übersetzung in eine andere Sprache, zu.

Aufgaben zu Abschnitt 1.3.

[1]: (i) Zeigen Sie, daß bei einer Fregeschen Interpretation die Parameter C und W stets eindeutig festliegen; d.h.: falls $\mathfrak{D}$ eine Fregesche Interpretation sowohl bezüglich C,D,W und ψ als auch bezüglich C',D',W' und ψ' ist, so gilt: C = C' und W = W'.

(ii) Skizzieren Sie je ein Beispiel dafür, daß der Parameter D bzw. ψ einer Fregeschen Interpretation nicht eindeutig bestimmt ist.

(iii) Geben Sie notwendige und hinreichende Kriterien für die Eindeutigkeit der Parameter D bzw. ψ in einer Fregeschen Interpretation.

[2]: Geben Sie eine rein extensionale Fregesche Interpretation $\mathfrak{D}_1$ für die in Abschnitt 1.1. eingeführte aussagenlogische Syntax Σ_1 an; formulieren Sie Σ_1 so, daß der aussagenlogische Kalkül klassisch (zweiwertig) gedeutet wird.

[3]: Geben Sie eine genaue Definition von Σ_2.

[4]: Geben Sie eine explizite Formulierung für Klausel (v) aus Definition (20) an.

[5]: Zeigen Sie, daß es erwünschte Modelle $\langle\mathfrak{D},\rho\rangle$ für Σ_2 gibt, in denen $\Box\, P_1^1(x_0)$ falsch ist und daß es für solche $\mathfrak{D}$ stets einen Referenzpunkt ρ' geben muß, sodaß $\langle\mathfrak{D},\rho'\rangle$ keine erwünschtes Modell ist.

[6]: (Montague [UG],231): Es seien α und β Ausdrücke der Kategorie S, $\mathcal{K}$ eine Klasse von Modellen.

(i) Zeigen Sie: falls α und β für jedes $\mathfrak{D}$, für das es ein ρ gibt, so daß $\langle\mathfrak{D},\rho\rangle \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{D}$-synonym sind, so sind α und β auch $\mathcal{K}$-äquivalent.

(ii) Zeigen Sie, daß die Umkehrung von (i) im allgemeinen nicht gilt. (Hinweis: Benutzten Sie als Gegenbeispiel die in (21) definierte Klasse $\mathcal{K}^*$ und setzen Sie $\alpha = P_1^1(x_0)$ und $\beta = (\ P_1^1(x_0) \vee \neg\, P_1^1(x_0))!)$

1.4. Übersetzung und indirekte Deutung

In diesem Abschnitt stellen wir eine allgemein übliche Methode vor, Interpretationen von Ausschnitten natürlicher Sprachen anzugeben. Danach wird der durch eine Syntax Σ definierten Sprache nicht einfach (direkt) eine Deutung $\mathfrak{D}$ zugeordnet, sondern lediglich ein Übersetzungsverfahren in eine andere (meist formale) Sprache $\bar{\Sigma}$, für die bereits eine Interpretation (oder z.B. eine Klasse von interessanten Modellen) angegeben wurde. Nun kann eine Übersetzung von einer Sprache in eine andere auf viele verschiedene Arten und Weisen geschehen, von denen ein ganzer Haufen(vom syntaktischen Standpunkt aus) unsystematisch und daher als Hilfsmittel für eine Interpretation ungeeignet ist. Eine naheliegende, einfache Art, Übersetzungen anzugeben, wäre jedoch die, daß jedem lexikalischen Ausdruck der Ausgangssprache ein (nicht unbedingt lexikalischer) Ausdruck der Zielsprache zugeordnet wird und daß dann ein allgemeines Verfahren geliefert wird, das es erlaubt, aus den Übersetzungen einfacherer Ausdrücke Übersetzungen komplexerer Ausdrücke zu gewinnen. Nach dieser Idee sind also Übersetzungen so etwas ähnliches wie Interpretationen, nur daß die den Ausdrücken zugewiesenen Entitäten keine Bedeutungen, sondern Ausdrücke einer anderen Sprache sind bzw. als solche aufgefaßt werden. Ein Übersetzungsverfahren bestünde nach dieser Grundidee also im wesentlichen aus zwei Teilen: einer Funktion ü, die für die Übersetzung des Lexikons zuständig ist und einer Familie von syntaktischen Operationen (über der Zielsprache); diese Operationen müssen dann innerhalb der Zielsprache "dasselbe leisten" wie die syntaktischen Operationen der Ausgangssprache dort. Da wir weiterhin davon ausgehen, daß die Zielsprache bereits gedeutet ist, können wir nun, um den Ausdrücken α der Ausgangssprache Bedeutungen zuzuordnen, die Übersetzungen ü*(α) betrachten und nachsehen, was diese bedeuten; dabei wird ü* auf dieselbe Art und Weise aus ü gewonnen, wie wir auch eine Bedeutungszuweisung b* aus einer Interpretation b der Grundausdrücke gewinnen. Die Montaguesche Übersetzungstheorie folgt in der Tat genau diesen hier skizzierten Ideen; im vorliegenden Abschnitt geht es nur darum, diese etwas zu präzisieren, was leider ohne einen gewissen technischen Aufwand nicht möglich ist.

Für das folgende gehen wir einmal davon aus, daß Σ und $\bar{\Sigma}$ algebraische Syntaxen sind, wobei wir Σ als die Syntax der Ausgangssprache und $\overline{\Sigma}$ als die der Zielsprache ansehen wollen:

$$(1)\ \Sigma = \langle A, F_i, \mathfrak{g}_k, R, S \rangle_{\ i \in I, k \in K} \quad ;$$

$$\overline{\Sigma} = \langle \overline{A}, \overline{F}_i, \overline{\mathfrak{g}}_k, \overline{R}, \overline{S} \rangle_{\ i \in \overline{I}, k \in \overline{K}} \quad .$$

Dabei wolllen wir die zugrundeliegenden Algebren $\langle A, F_i \rangle_{i \in I}$ und $\langle \overline{A}, \overline{F}_i \rangle_{\ i \in \overline{I}}$ durch $\mathfrak{A}$ bzw. $\overline{\mathfrak{A}}$ bezeichnen. Das erste Hindernis, das sich nun einer Präzisierung der oben dargestellten Ideen in den Weg stellt, besteht darin, daß wir im allgemeinen nicht davon ausgehen können, daß sich die syntaktischen Operationen $(F_i)_{i \in I}$ und $(\overline{F}_i)_{i \in \overline{I}}$ irgendwie entsprechen. So kann es in $\mathfrak{A}$ z.B. viel mehr (oder viel weniger) syntaktische Operationen geben als in $\overline{\mathfrak{A}}$, ohne daß dieser Umstand uns schon daran hindern sollte, ein Übersetzungsverfahren zu konstruieren. Bekanntlich läßt sich z.B. eine aussagenlogische Sprache mit allen 16 (zweistelligen und zweiwertigen) Junktoren ohne weiteres in eine Sprache mit nur einem Junktor übersetzen, was wir auch dann ermöglichen wollen, wenn Junktoren (wie in dem Beispiel in Abschnitt 1.1.) durch syntaktische Operationen eingeführt werden. Wie wir jedoch (in 1.1.) gesehen haben, lassen sich in einem solchen Fall gewisse komplexe (polynomische) Operationen angeben, die nichts Wesentliches an der Syntax ändern, die aber andererseits eben mehr (auf einmal) leisten als die Operationen der Syntax selbst. Wir werden also bei der Übersetzung so vorgehen, daß wir jeder Operation F_i $(i \in I)$ aus $\mathfrak{A}$ eine polynomische Operation P_i über $\overline{\mathfrak{A}}$ zuordnen; dabei müssen natürlich F_i und P_i von derselben Stellenzahl sein.

Im Hinblick auf gewisse Anforderungen an Deutungen wollen wir weiterhin von einem Übersetzungsverfahren fordern, daß es sich mit den Kategorien der Zielsprache verträgt: wenn nämlich z.B. α_1 und α_2 $(\in A)$ durch Ausdrücke $\overline{\alpha}_1$ bzw. $\overline{\alpha}_2$ $(\in \overline{A})$ übersetzt werden und α_1 und α_2 derselben Kategorie k $(\in K)$ angehören, so müssen auch $\overline{\alpha}_1$ und $\overline{\alpha}_2$ derselben Kategorie $\overline{k}$ $(\in K)$ angehören; und wenn α ein Satz (von Σ) ist, so soll die Übersetzung wieder ein Satz (von $\overline{\Sigma}$) sein. Um diesen Effekt zu erzielen, nehmen wir zu einem Übersetzungsverfahren Ü neben der Übersetzung der Grundausdrücke ü und der Übersetzung P_i der syntaktischen Operationen F_i noch eine Funktion τ hinzu, die den Kategoriennamen von Σ die entsprechenden Kategoriennamen von $\overline{\Sigma}$ zuordnet, und definieren wie folgt:

(2) Ein <u>Übersetzungsverfahren</u> Ü (<u>von</u> Σ <u>nach</u> $\bar{\Sigma}$) ist ein Gebilde $Ü = \langle \tau, P_i, ü \rangle_{i \in I}$, für das gilt:

(i) τ ist eine Funktion von K nach $\bar{K}$ mit $\tau(S)=\bar{S}$;

(ii) für jedes $i \in I$ ist P_i eine polynomische Operation über $\bar{\Sigma}$, die die gleiche Stellenzahl hat wie F_i;

(iii) ü ist eine Funktion, die jedem $\alpha \in \bigcup_{k \in K} \mathcal{G}_k$ einen Wert $ü(\alpha) \in \bar{A}$ zuordnet;

(iv) falls $k \in K$ und $\alpha \in \mathcal{G}_k$, so ist $ü(\alpha)$ ein Ausdruck der Kategorie $\tau(k)$;

(v) falls $\langle F_i, k_1, \ldots, k_n, k^* \rangle \in R$, so ist $\langle P_i, \tau(k_1), \ldots, \tau(k_n), \tau(k^*) \rangle$ eine aus $\bar{\Sigma}$ abgeleitete Regel.

(3) Sei $Ü = \langle \tau, P_i, ü \rangle_{i \in I}$ ein Übersetzungsverfahren von Σ nach $\bar{\Sigma}$. Für $\alpha \in A$ läßt sich die <u>Übersetzung von</u> α (<u>gemäß</u> Ü) – $ü^*(\alpha)$ – induktiv definieren, so daß gilt:

(i) $ü^*(\alpha) = ü(\alpha)$, falls $\alpha \in \bigcup_{k \in K} \mathcal{G}_k$;

(ii) $ü^*(\alpha) = P_i(ü^*(\beta_1), \ldots, ü^*(\beta_n))$, falls $\alpha = F_i(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Es ist zu beachten, daß der in (2) und (3) festgelegte Übersetzungsbegriff rein syntaktischer Natur ist: obwohl Übersetzungsverfahren so etwas ähnliches sind wie Deutungen (vgl. Aufgabe [2]), fassen wir die einem Ausdruck $\alpha \in A$ per Übersetzung zugewiesenen Entität $ü^*(\alpha)$ als sprachlichen Ausdruck auf, wobei die Bedeutung von $ü^*(\alpha)$ (und nicht $ü^*(\alpha)$ selbst!) die für α intendierte Bedeutung ist.

Wenn nun also $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b \rangle_{i \in I}$ eine Deutung für $\bar{\Sigma}$ ist, kann man für $\alpha \in A$ die <u>gemäß</u> eines Übersetzungsverfahrens $Ü = \langle \tau, P_i, ü \rangle_{i \in I}$ (<u>und</u> $\mathfrak{D}$) <u>indirekt festgelegte Bedeutung</u> von α als $b^*(ü^*(\alpha))$ definieren, womit das Verfahren der indirekten Deutung vollständig beschrieben wäre. Wir werden hier jedoch noch ein wenig mehr tun, indem wir zeigen, daß sich für jedes Übersetzungsverfahren Ü und jede Deutung $\mathfrak{D}$ von $\bar{\Sigma}$ stets eine Deutung $\mathfrak{D}^+$ von Σ angeben läßt, die jedem $\alpha \in A$ als Bedeutung die durch Ü und $\mathfrak{D}$ indirekt festgelegte Bedeutung zuweist. Wir zeigen also, daß die Methode der indirekten

Deutung stets als Spezialfall der direkten Deutung aufgefaßt werden kann.

Um nun den Übergang von einer indirekten zu einer direkten Deutung, die dasselbe leistet, darzustellen, gehen wir einmal davon aus, daß $Ü = \langle \Upsilon, P_i, ü \rangle_{i \in I}$ ein Übersetzungsverfahren von Σ nach $\bar{\Sigma}$ und $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b \rangle_{i \in \bar{I}}$ eine Deutung für $\bar{\Sigma}$ ist. Um nun eine Deutung $\mathfrak{D}^+$ von Σ zu finden, die in der angedeuteten Weise funktioniert, werden wir im wesentlichen folgendes tun: nach einer kleinen Vorbereitung konstruieren wir eine Struktur $\mathfrak{D}^*$, die so ähnlich aussieht wie $\mathfrak{D}$, sich in einem Punkte aber unterscheidet: die Operationen von $\mathfrak{D}^*$ entsprechen den polynomischen Operationen $(P_i)_{i \in I}$ (und nicht den Ausgangsoperationen $(\bar{F}_i)_{i \in \bar{I}}$). Genau diese Operationen können wir dann für die Deutung von Σ verwenden.

Zunächst müssen wir jedoch einmal zur Kenntnis nehmen, daß es in $\mathfrak{D}$ Elemente geben kann, die durch die Bedeutungszuordnung b* niemals erfaßt werden: "Bedeutungen" also, die für keinen Ausdruck $\alpha \in \bar{A}$ als Bedeutung fungieren; Definition (3) aus Abschnitt 1.3. schließt das einfach nicht aus. Um ein einheitliches Verfahren zur Konstruktion von $\mathfrak{D}^+$ zu erhalten, werfen wir diese überflüssigen Elemente erst einmal heraus; wir minimalisieren also die Interpretation $\mathfrak{D}$:

(4) $\bar{\mathfrak{D}} = \langle \bar{\mathfrak{B}}, \bar{B}_i, b \rangle_{i \in \bar{I}}$, wobei gilt:

(i) $\bar{\mathfrak{B}}$ ist der Wertebereich von b*;
(ii) $\bar{B}_i = B_i \upharpoonright \bar{\mathfrak{B}}$, für jedes $i \in \bar{I}$.

Nach dieser kleinen Vorbereitung können wir uns daran machen, die Deutungen der polynomischen Operationen $(P_i)_{i \in I}$ zu finden. Dies geschieht auf folgende Art und Weise: jeder polynomischen Operation über $\bar{\Sigma}$ wird eine <u>entsprechende</u> "gleich aufgebaute" Operation über $\langle \bar{\mathfrak{B}}, \bar{B}_i \rangle_{i \in \bar{I}}$ zugewiesen; die den P_i 's entsprechenden sind dann die von uns gesuchten. Die Definition wird induktiv über den Aufbau der polynomischen Operationen (über $\bar{\Sigma}$) geschehen: den syntaktischen Operationen entsprechen die semantischen Operationen von $\bar{\mathfrak{D}}$, den Konstantenoperationen Cn^n_β diejenigen, die die jeweiligen Bedeutungen $b^*(\beta)$ zuweisen etc. Genauer:

(5) Jeder polynomischen Operation F über $\bar{\Sigma}$ wird die F <u>entsprechende</u> polynomische Operation F* über $\langle \bar{\mathfrak{B}}, \bar{B}_i \rangle_{i \in \bar{I}}$ zugewiesen, so daß gilt:

(i) falls $i \in \bar{I}$ und $F = \bar{F}_i$, so ist $F^* = \bar{B}_i$;

(ii) falls $n,m \in \omega$ und $F = Id^n_{m,\bar{A}}$, so ist $F^* = Id^n_{m,\bar{\mathfrak{B}}}$;

(iii) falls $n \in \omega$, $\beta \in \bar{A}$ und $F = Cn^n_{\beta,\bar{A}}$, so ist
$F^* = Cn^n_{b^*(\beta),\bar{\mathfrak{B}}}$;

(iv) falls $F = G_0 \langle G_1,\ldots,G_n\rangle$ und $G_0, G_1,\ldots,G_n$ polynomische Operationen über $\bar{\Sigma}$ sind, so ist
$F^* = G_0^* \langle G_1^*,\ldots,G_n^*\rangle$.

Auf den ersten Blick ist es natürlich nicht klar, daß (5) überhaupt konsistent ist. Wenn nämlich eine polynomische Operation F über $\bar{\Sigma}$ auf zwei Arten "aufgebaut" (dargestellt) werden kann (z.B. als Komposition und als Identität), dann läßt sich nach (5) auch auf zwei Arten eine entsprechende Operation über $\langle \bar{\mathfrak{B}}, \bar{B}_i\rangle_{i\in\bar{I}}$ zuweisen, wobei erst einmal gezeigt werden müßte, daß beides auf dasselbe hinausläuft. Wir haben den Konsistenznachweis in eine Aufgabe ([3]) gesteckt.

Wie angekündigt nehmen wir nun die den (polynomischen) syntaktischen Operationen $(P_i)_{i\in I}$ entsprechenden semantischen Operationen $(P_i^*)_{i\in I}$, um ein gewisses $\mathfrak{D}^*$ zu definieren:

(6) $\mathfrak{D}^* = \langle \bar{\mathfrak{B}}, P_i^*, b\rangle_{i\in I}$.

$\mathfrak{D}^*$ ist natürlich im allgemeinen keine Deutung für $\bar{\Sigma}$ mehr, da die Operationen P_i^* nicht mehr den Operationen $\bar{F}_i$ in Anzahl und Stellenzahl entsprechen müssen. Aus $\mathfrak{D}^*$ läßt sich jetzt aber in sehr naheliegender Weise eine Deutung $\mathfrak{D}^+$ für Σ gewinnen, indem wir einfach die Übersetzung ü "dazwischenschalten":

(7) Die <u>durch</u> Ü, $\mathfrak{D}$ (<u>und</u> $\bar{\Sigma}$) <u>festgelegte</u> Deutung $\mathfrak{D}^+$ für Σ ist

$$\mathfrak{D}^+ = \langle \bar{\mathfrak{B}}, P_i^*, b_+\rangle_{i\in I} ,$$

wobei b_+ diejenige Funktion mit Definitionsbereich $\bigcup_{k\in K} \mathfrak{L}_k$ ist, so daß für alle lexikalischen Ausdrücke α von Σ gilt:

$$b_+(\alpha) = b^*(ü(\alpha)) .$$

Wie man durch eine einfache Induktion nachweist (Aufgabe [4]), ordnet die Deutung $\mathfrak{D}^+$ jedem Ausdruck $\alpha \in A$ die gemäß Ü und $\mathfrak{D}$ indirekt festgelegte Bedeutung von α zu. Damit ist also gezeigt, daß sich jede indirekte Deutung auf kanonische Weise als direkte Deutung darstellen läßt.

Den Übergang von einer indirekten zu einer entsprechenden direkten Deutung kann man sich noch einmal an folgendem Diagramm klarmachen:

(8)

$$\begin{tikzcd}
 & & \bar{\Sigma} \arrow[rr, "b^*"] \arrow[d, equal] & & \mathfrak{D} \arrow[d, squiggly] & \text{minimalisiert} \\
 & & \bar{\Sigma} \arrow[rr, two heads, "b^*"] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "\text{Entsprechung}"] & & \bar{\mathfrak{D}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \text{polynomisch} & & & & \text{polynomisch} \\
\Sigma \arrow[rr, dashed, shift left, "\ddot{u}^*"] & & \langle A, P_i \rangle_{i \in I} \arrow[ll, shift left, "\ddot{u}^*"] \arrow[rr, dashed, two heads, "b^*"'] \arrow[uuurr, dotted, "b^*"] & & \mathfrak{D}^* &
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{\hspace{6cm}}_{\text{Syntax}}\underbrace{\hspace{6cm}}_{\text{Semantik}}$$

(In (8) deuten die gestrichelten Pfeile den Weg der direkten, die gepunkteten den Weg der indirekten Deutung an.)

Die wichtigste Eigenschaft des in (8) skizzierten Verfahrens ist nun die, daß die so erhaltene Deutung $\mathfrak{D}^+$ eine Fregesche Interpretation ist, falls $\mathfrak{D}$ eine war; d.h. es gilt:

(9) Falls $\mathfrak{D}$ eine Fregesche Interpretation für $\bar{\Sigma}$ (bezüglich C,D,W und φ) ist, so ist $\mathfrak{D}^+$ eine Fregesche Interpretation für Σ bezüglich C,D,W und φ^+; dabei ist φ^+ diejenige Typenzuweisung für Σ, so daß für alle $k \in K$ gilt: $\varphi^+(k) = \varphi(\psi(k))$.

Der Beweis von (9) sei hier kurz angedeutet: es muß gezeigt werden, daß (unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{D}$ eine Fregesche Interpretation ist) $\mathfrak{D}^+$ die Bedingungen (i) - (iii) der Definition (13) aus Abschnitt 1.3. erfüllt. Bedingung (i) ist trivial, da

$$\bar{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \bigcup_{\tau \in T} ((E_{\tau}^{D,W})^{C \times W}) \quad .$$

Um auch Bedingung (ii) nachzuweisen, beachten wir, daß für $\alpha \in \mathfrak{g}_k$ die Bedeutung $b_+(\alpha)$ gleich $b^*(\ddot{u}^*(\alpha))$ ist; wie in Aufgabe [1] nachzuweisen ist, gehört aber $\ddot{u}^*(\alpha)$ der Kategorie $\psi(k)$ an, womit $b^*(\ddot{u}^*(\alpha))$ eine mögliche Bedeutung des Typs $\varphi(\psi(k))$ ist, da (nach Voraussetzung) $\mathfrak{D}$ eine Fregesche Interpretation war. Für den Nachweis von (iii) setzen wir einmal voraus, daß

$$(10)\quad \langle F_i, k_1, \ldots, k_n, k^* \rangle \in R$$

und für gewisse $u_1, \ldots, u_n \in \overline{\mathfrak{B}}$ gilt:

$$(11)\quad \begin{array}{lcl} u_1 & \in & E_{\varphi^+(k_1)}^{C \times W} \\ & \vdots & \\ u_n & \in & E_{\varphi^+(k_n)}^{C \times W} \end{array}$$

Wir müssen dann zeigen, daß

$$(12)\quad P_i^* \, (u_1, \ldots, u_n) \in E_{\varphi^+(k^*)}^{C \times W}$$

Da Ü ein Übersetzungsverfahren ist, gilt nach Definition (2):

$$(13)\quad r = \langle P_i, \psi(k_1), \ldots, \psi(k_n), \psi(k^*) \rangle$$

ist eine aus $\overline{\Sigma}$ abgeleitete Regel.

Durch Induktion über den Aufbau der aus $\overline{\Sigma}$ abgeleiteten Regeln kann man nun zeigen, daß (11) und (13) die nachzuweisende Behauptung (12) implizieren. Wir deuten die Induktion kurz an: für den Fall, daß $r \in R$, ist $P_i = F_j$ (für ein $j \in \overline{I}$) und $P_i^* = \overline{B}_i$; die Behauptung gilt dann, weil $\mathfrak{D}$ eine Fregesche Interpretation war (und $\overline{B}_i$ nur eine Beschränkung von B_i ist). Angenommen,

$$r = \langle Id^n_{m,A}, \psi(k_1), \ldots, \psi(k_n), \psi(k_m) \rangle$$

(für irgendwelche $n, m \in \omega$ mit $m \leq n$) ; dann ist $P_i^* = Id^n_{m,\overline{\mathfrak{B}}}$ und (12) folgt trivialerweise aus (11). Falls

$$r = \langle Cn^n_{\beta,A}, \psi(k_1), \ldots, \psi(k_n), \psi(k^*) \rangle$$

für ein $n \in \omega$ und ein $\beta \in \overline{\mathfrak{L}}_{\psi(k^*)}$, ist $P_i^* = Cn^n_{b^*(\beta),\overline{\mathfrak{B}}}$, womit $P_i^*(u_1, \ldots, u_n) = b^*(\beta) = b(\beta)$, was eine mögliche Bedeutung des Typs $\varphi(\psi(k^*)) = \varphi^+(k^*)$ ist, da $\mathfrak{D}$ eine Fregesche Interpretation ist. Der Induktionsschritt bleibt dem Leser überlassen.

Abschließend zeigen wir noch, daß sich die Definition von $\mathfrak{D}^+$ sehr stark verkürzen läßt; d.h. wir weisen nach, daß $\mathfrak{D}^+$ eine Eigenschaft hat, die sie vor allen anderen Deutungen von Σ auszeichnet:

(14) $\mathfrak{D}^+$ ist die einzige Deutung $\tilde{\mathfrak{D}} = \langle \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{B}_i b_+ \rangle_{i \in \tilde{I}}$, für die gilt:

(*) b^* ist ein Homomorphismus von $\langle \bar{A}, P_i \rangle_{i \in I}$ <u>auf</u> $\langle \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{B}_i \rangle_{i \in \tilde{I}}$.

(D.h.: b^* ist ein Homomorphismus und $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist die Menge der Werte von b^*.)

(Es sei beachtet, daß in (14) nicht mehr vorausgesetzt wird, daß $\mathfrak{D}$ eine Fregesche Interpretation war!)

Um (14) zu beweisen, überzeugen wir uns zunächst einmal davon, daß $\mathfrak{D}^+ = \langle \bar{\mathfrak{B}}, P_i^*, b_+ \rangle_{i \in I}$ tatsächlich die Bedingung (*) erfüllt: daß b^* ein Homomorphismus von $\langle \bar{A}, P_i \rangle_{i \in I}$ nach $\langle \bar{\mathfrak{B}}, P_i^* \rangle_{i \in I}$ ist, folgt unmittelbar aus Aufgabe [3]; daß $\bar{\mathfrak{B}}$ der Wertebereich von b^* ist, steht in Definition (4). Sei also $\tilde{\mathfrak{D}} = \langle \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{B}_i, b_+ \rangle_{i \in \tilde{I}}$ eine Deutung von Σ, die (*) erfüllt; wir haben zu zeigen, daß $\tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}^+$. Nun ist aber $I = \tilde{I}$, nach der Definition von Homomorphismus; außerdem gilt:

(15) $\tilde{\mathfrak{B}} = \{ u \in \mathfrak{B} \mid u \text{ ist ein Wert von } b^* \} = \bar{\mathfrak{B}}$.

Zu zeigen bleibt also, daß für jedes $i \in I$ gilt: $P_i^* = \tilde{B}_i$; d.h. daß für alle $u_1, \ldots, u_n \in \bar{\mathfrak{B}}$ $(= \tilde{\mathfrak{B}})$ $P_i^*(u_1, \ldots, u_n) = \tilde{B}_i(u_1, \ldots, u_n)$ (wobei n die Stelligkeit von F_i ist). Nun ist aber

$$
\begin{aligned}
(16)\quad u_1 &= b^*(\beta_1) \\
&\vdots \\
u_n &= b^*(\beta_n)
\end{aligned}
$$

für gewisse $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \bar{A}$, da (15) gilt. Somit ist

$P_i^*(u_1, \ldots, u_n) = P_i^*(b^*(\beta_1), \ldots, b^*(\beta_n)) = b^*(P_i(\beta_1, \ldots, \beta_n))$,

da b^* ein Homomorphismus ist; ebenso gilt aber auch:

$B_i(u_1, \ldots, u_n) = B_i(b^*(\beta_1), \ldots, b^*(\beta_n)) = b^*(P_i(\beta_1, \ldots, \beta_n))$,

da $\tilde{\mathfrak{D}}$ die Bedingung (*) erfüllt. (14) ist somit bewiesen.

Es sei noch erwähnt, daß Montague ([UG],232) (14) als Definition von $\mathfrak{D}^+$ genommen hat. Wir haben uns für das in (8) beschriebene konstruktivere Verfahren entschlossen, da es durchsichtiger ist. (Natürlich hätte ein Korrektheitsnachweis von (14) als Definition gerade die Konstruktion (8) erfordert.)

Aufgaben zu Abschnitt 1.4.

[1]: Zeigen Sie, daß für ein α einer Kategorie k die Übersetzung $ü^*(\alpha)$ der Kategorie $\varphi(k)$ angehört, falls $Ü = \langle \varphi, P_i, ü \rangle_{i \in I}$.
(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe [5] aus Abschnitt 1.1. im Induktionsschritt!)

[2]: Es sei $Ü = \langle \varphi, P_i, ü \rangle_{i \in I}$ ein Übersetzungsverfahren. Geben Sie eine Deutung $\mathfrak{D}_Ü$ für Σ an, so daß für jedes $\alpha \in A$ die Bedeutung von α gemäß $\mathfrak{D}_Ü$ gleich der Übersetzung von α gemäß Ü ist.

[3]: Weisen Sie die Korrektheit von Definition (5) nach. (Hinweis: Zeigen Sie durch ~~eine einzige~~ Induktion über die Komplexität (der Darstellung) polynomischer Operationen, daß gilt:

~~(1) Wenn F polynomisch ist über $\bar{\mathfrak{A}}$, so ist F* eindeutig bestimmt;~~

~~(2)~~ $F^*(b^*(\alpha_1),\ldots,b^*(\alpha_n)) = b^*(F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n))$
für jedes n-stellige polynomische F über $\bar{\Sigma}$ und jede n-stellige Folge $\langle \alpha_1,\ldots,\alpha_n \rangle$ über $\bar{A}$.)

[4]: (Montague [UG],233): Zeigen Sie, daß für jedes $\alpha \in A$ gilt:

$$b_+^*(\alpha) = b^*(ü^*(\alpha))$$

(Hinweis: Argumentieren Sie induktiv über α und machen Sie dabei von Aufgabe [3] Gebrauch!)

[5]: Geben Sie eine "inhaltlich korrekte" Übersetzung $Ü_1$ von der in Abschnitt 1.1. (Aufgabe [4]) angegebenen aussagenlogischen Syntax $\bar{\Sigma}_1$ in Σ_1 an. Geben Sie auch die durch $Ü_1$, $\mathfrak{D}_1$ und Σ_1 festgelegte Interpretation $\mathfrak{D}_1^+$ für $\bar{\Sigma}_1$ an und zeigen Sie, daß $\mathfrak{D}_1^+$ rein extensional ist. (Dabei ist $\mathfrak{D}_1$ die in 1.3., Aufgabe [2] anzugebende Deutung von Σ_1.)

2. Intensionale Logik

Um die in 1.4. dargestellte Theorie der indirekten Deutung auf das DEUTSCH-Fragment anwenden zu können, brauchen wir natürlich noch eine Zielsprache, in die das Deutsche übersetzt werden kann. Aus historischen und systematischen Gründen bietet sich hier die von Montague (in [UG], 233 - 237) eingeführte Sprache der Intensionalen Logik (IL) an. Als historische Begründung mag dafür der Umstand herhalten, daß Montague selbst seine Theorie der indirekten Deutung (sowohl in [UG] als auch in [PTQ]) an IL exemplifiziert hat; außerdem wird IL auch in der auf Montagues Schriften aufbauenden linguistischen Fachliteratur häufig als Zielsprache eine Übersetzung (und somit zur indirekten Deutung) benutzt, was die Formulierung der Semantik gewisser Ausschnitte natürlicher Sprachen oft sehr verkürzt und manchmal auch vereinfacht. Systematische Gründe dafür, gerade IL als Beispiel zu betrachten, gibt es viele: hier soll der Hinweis genügen, daß sich diese Sprache - wie wir noch sehen werden - besser als viele andere dafür eignet, die Montaguesche Referenztheorie, also die Begriffsbildungen um die 'Fregesche Interpretation' herum, in allen Details darzustellen; man könnte sogar so weit gehen zu behaupten, daß die Theorie der direkten Deutung erst auf dem Hintergrund der Anwendbarkeit auf die Intensionale Logik voll verstanden werden kann.

Bevor es losgeht, noch ein Wort zur Terminologie: wenn wir hier von der Intensionalen Logik sprechen, so meinen wir die in diesem Kapitel einzuführende formale Sprache IL. In der logisch-philosophischen Literatur wird derselbe Terminus gelegentlich synonym mit Modallogik gebraucht und hat insofern eine viel allgemeinere Verwendung, da IL - wie wir noch sehen werden - zwar auch eine modallogische Sprache ist; nicht jede Modallogik läßt sich jedoch als (Teil von) IL auffassen. Unsere Terminologie ist aber (hoffentlich) schon dadurch gerechtfertigt, daß sie sich in logiko-linguistischen Kreisen allgemein durchgesetzt hat.

2.1. Eine informelle Skizze

Drei Eigenschaften charakterisieren IL fast vollständig:

- Doppelindiziertheit
- (typisierte) Höherstufigkeit
- kombinatorische Ausdrucksstärke

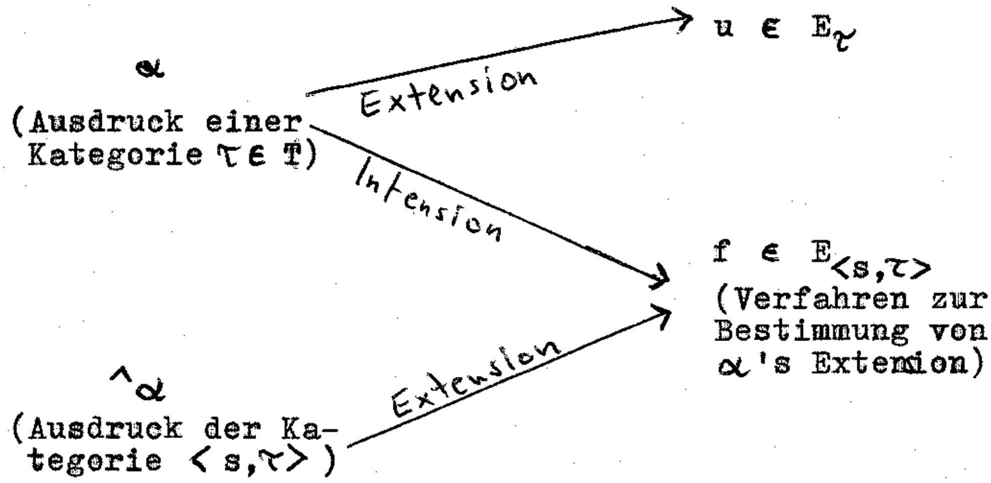
Was unter der ersten Eigenschaft im allgemeine zu verstehen ist, haben wir in 1.3. erklärt. In IL stellt sich die Doppelindizierung auf eine besonders einfache Art und Weise dar, wie in Abschnitt 2.2. noch deutlich werden wird. Hier sei zunächst nur bemerkt, daß die anderen beiden Eigenschaften für die Übersetzbarkeit erheblicher Portionen der natürlichen Sprache in die Intensionale Logik verantwortlich sind. Dies mag überraschen, da doch die Doppelindiziertheit (intuitiv) ein wesentliches semantisches Merkmal einer Sprache zu sein scheint. Dennoch läßt sich eine Doppelindizierung (übrigens nicht nur im Falle von IL) insofern eliminieren, als man formale Sprachen angeben kann, die dasselbe "leisten" (= ausdrücken können) wie IL, die aber dennoch ohne Doppelindizierung auskommen; wir kommen auf diesen Punkt in Abschnitt 2.2. zurück.

Unter der Eigenschaft der typisierten Höherstufigkeit ist hier folgendes zu verstehen: zunächst gibt es für jeden Typ $\tau \in T$ (unendlich viele) Ausdrücke α_τ in IL, so daß α_τ's Extension (im Rahmen geeigneter Fregescher Interpretationen) stets vom Typ τ sind; weiterhin kann man in IL über Extensionen beliebiger Typen (und nicht wie in der Prädikatenlogik 1. Stufe nur über Individuen) quantifizieren. Wenn also φ ein IL-Satz ist, in dem eine Variable x vorkommt, welche für Extensionen des Typs $\langle\langle s,e\rangle,t\rangle$ steht, kann man z.B. einen weiteren Satz $[\forall x\, \varphi]$ bilden, der besagt, daß jede Menge von Individuenkonzepten die Formel φ erfüllt, d.h. daß für alle $x \in E_{\langle\langle s,e\rangle,t\rangle}$ φ gilt. Um das zu ermöglichen, besitzt IL für jedes $\tau \in T$ eine (abzählbar) unendliche Menge Var_τ von Variablen, deren Extensionen stets vom Typ τ sind. Die Variablen sind Grundausdrücke, d.h. lexikalisch. Falls nun zwei IL-Variablen x und y zu zwei verschiedenen Mengen Var_σ und Var_τ gehören, so sollen sie auch verschiedenen syntaktischen Kategorien angehören; es liegt also nahe, die Indizes der syntaktischen Kategorien von IL mit der Menge T der Typen zu identifizieren. Für diese informelle Erörterung werden wir das auch tun; im näch-

Neben den lexikalischen Ausdrücken $\bigcup_{\tau \in T}$ $(Var_{\tau} \cup Kon_{\tau})$ gibt es natürlich auch komplexe, die durch verschiedene syntaktische Operationen gebildet werden, welche wir nun kurz beschreiben wollen. Die einfachste syntaktische Operation ist die der Funktionalapplikation. Angenommen nämlich, wir hätten einen Ausdruck α einer "Funktorenkategorie" $\langle \sigma, \tau \rangle$ $(\sigma, \tau \in T)$ und einen weiteren Ausdruck β der Kategorie σ; dann soll die Extension von α eine Funktion f aus $E_{\langle \sigma, \tau \rangle}$ und die von β ein Element u von E_{σ} sein. Selbstverständlich wollen wir in IL dann auch einen Ausdruck bilden können, dessen Extension der Wert f(u) ist; in IL hat dieser Ausdruck dann die Gestalt $[\alpha \beta]$. Eine entsprechende Regel wird dafür sorgen, daß $[\alpha \beta]$ der Kategorie τ angehört, da ja $f(u) \in E_{\tau}$. Ein ebenso einfaches und wichtiges Ausdrucksmittel von IL ist die Identität: falls nämlich α und β Ausdrücke derselben Kategorie $\tau \in T$ sind und somit Extensionen $u, v \in E_{\tau}$ haben, so soll der Ausdruck $[\alpha \equiv \beta]$ besagen, daß u = v; d.h. die Extension von einem Ausdruck $[\alpha \equiv \beta]$ an einem Referenzpunkt ρ soll (unter der Voraussetzung, daß α und β derselben Kategorie angehören) genau dann der Wahrheitswert 1 sein, falls die Extension des Ausdruckes α am Referenzpunkt ρ identisch ist mit der von β an ρ.

Eine weitere syntaktische Operation soll es ermöglichen, aus einem Ausdruck α einer Kategorie $\tau \in T$ einen solchen Ausdruck β zu bilden, dessen Extension gerade die Intension von α ist; β hat dann die Gestalt $^\wedge\alpha$. ($^\wedge$ werden wir auch als Intensor und die entsprechende syntaktische Operation als Intensionalisierung bezeichnen.) Das Schema (6) aus Abschnitt 1.3. läßt sich also auf IL wie folgt übertragen:

(4)



sten Abschnitt wird dann allerdings eine kleine Modifikation vorgenommen.

Falls $\tau \in T$, sollen die $x \in Var_\tau$ nicht die einzigen lexikalischen Ausdrücke der Kategorie τ sein. Genauer gesagt soll es analog zu der Familie $(Var_\tau)_{\tau \in T}$ ein System $(Kon_\tau)_{\tau \in T}$ von Konstanten gegeben. Die Anzahl (und genaue Beschaffenheit) der Konstanten ist eigentlich unerheblich. Wir werden (wie Montague in [UG]) für jedes $\tau \in T$ eine abzählbar unendliche Menge von Konstanten der Kategorie τ als Grundausdrücke annehmen. Semantisch gesehen werden die Extensionen solcher Konstanten an einem Referenzpunkt $\langle c,w \rangle$ niemals von der Komponente $c \in C$ abhängen; für eine interessante Fregesche Interpretation $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{G}, B_i, b \rangle_{i \in I}$ werden wir also verlangen, daß $b(\alpha)(\langle c,w \rangle) = b(\alpha)(\langle c',w \rangle)$, falls α eine Konstante ist, w eine Welt und c und c' beliebige Äußerungskontexte. Die Konstanten spielen also in IL die Rolle der nicht-deiktischen Wörter. Die Variablen werden im Gegensatz dazu eine doppelte Funktion übernehmen: kommen sie frei (also nicht im Bereich eines ihnen entsprechenden Quantors bzw. Operators) vor, so verhalten sie sich wie (strikt) deiktische Ausdrücke; ihre Extension wird also nur vom Kontext abhängen. Als gebundene Variablen erfüllen sie im wesentlichen die gleiche Funktion wie z.B. in der Prädikatenlogik. Der tiefere Grund für diese Doppelfunktion der Variablen liegt darin, daß sich dadurch eine Parallelität zur Funktion einiger Verwendungsweisen von bestimmten Pronomen (insbesondere Personalpronomen) ergibt. So läßt sich z.B. eine Mehrdeutigkeit von

(1) Jedermann befürchtet, daß er Mist gebaut hat.

so beschreiben , daß sich in einer Lesart das Pronomen "er" zurückbezieht auf "jedermann", während es in einer anderen Lesart auf eine (in (1) nicht direkt genannte) Person verweist. In IL stellt sich ein Satz wie (1) so dar, daß das Pronomen "er" als Variable (einer geeigneten Kategorie $\tau \in T$) aufgefaßt wird, die in der einen Lesart (anaphorisch) durch den Allquantor "jedermann" gebunden ist, in der anderen jedoch frei bleibt und somit "vom Kontext interprtiert" wird:

(2) $(\forall x)$ x befürchtet, daß x Mist gebaut hat.
(3) $(\forall x)$ x befürchtet, daß y Mist gebaut hat.

((2) und (3) sind natürlich keine IL-Formeln, sondern sollen nur daß Prinzip erläutern, wie die Doppelfunktion der Variablen aussieht.)

$$(6)\quad [[f\ x] \equiv [\beta\ [h\ x]]]$$

definierbar; (6) ist eine in der Mathematik übliche Schreibweise zur Definition von Funktionen, wie wir sie z.B. in (7) finden:

$$(7)\quad f(x) = x^2$$

Es ist jedoch zu beachten, daß keiner der Ausdrücke (5) und (6) die Funktion f bezeichnet. (Aus Einfachheitsgründen identifizieren wir den IL-Namen mit dem metasprachlichen Namen f.) Denn (5) bezeichnet - je nach dem, worauf x referiert - einen bestimmten Funktionswert f(x); und (6) hat stets einen Wahrheitswert zur Extension, und zwar 1, falls f tatsächlich so definiert wird, wie wir es hier getan haben. Das Ausdrucksmittel der Abstraktion gestattet es uns nun, aus dem Funktionswert-Ausdruck (5) einen neuen Ausdruck zu bilden, welcher auf die Funktion f selbst referiert. Dieser neue Ausdruck ist:

$$(8)\quad [\lambda\ x\ [\beta\ [h\ x]]]$$

(Das λ dient nur der Desambiguierung.) (8) läßt sich also etwa so lesen: diejenige Funktion f, so daß für beliebige x gilt: $f(x) = \beta\,(h(x))$. (Wir haben hier wieder Objekt- und Metasprache durcheinandergebracht, um uns nicht unnötig geschraubt ausdrücken zu müssen.) Im allgemeinen funktioniert die Abstraktion so, daß für einen beliebigen Ausdruck α einer Kategorie $\tau \in T$ und eine beliebige Variablen $x \in Var_{\sigma}$ (für irgendein $\sigma \in T$) der Ausdruck $[\lambda\, x\, \alpha]$ der Kategorie $\langle\sigma,\tau\rangle$ angehört und stets diejenige Funktion f zur Extension hat, die einem $u \in E_{\sigma}$ α's Extension an einem solchen Referenzpunkt zuweist, an dem x auf u referiert. Falls also $\tau = t$, so referiert $[\lambda x \alpha]$ auf die charakteristische Funktion einer Teilmenge von E_{σ}; der Ausdruck kann in diesem Falle gelesen werden als: "die Menge der x, für die α gilt".

Schon jetzt drängt sich die Vermutung auf, daß die Extensionen von sich entsprechenden Ausdrücken wie (9) und (10) stets gleich sein müssen:

$$(9)\quad [[\lambda\, x\, \alpha]\ \beta]$$
$$(10)\quad \alpha[^x/_\beta]$$

Dabei ist in (10) der Ausdruck gemeint, der entsteht, wenn man in α alle (freien) Vorkommen der Variablen x durch β ersetzt. Die Äquivalenz von Ausdrücken der Form (9) mit entsprechenden Ausdrük-

Falls also $\tau = t$ und α somit ein Satz von IL ist, so spielt die Rolle von "daß".

Analog zur Intensionalisierung gibt es in IL auch die Operation der <u>Extensionalisierung</u>, welche es ermöglicht, aus einem Ausdruck β einer Kategorie $\langle s,\tau\rangle$ ($\tau \in T$) einen solchen Ausdruck $\gamma = {}^{\vee}\beta$ zu bilden, dessen Extension u an einem Referenzpunkt $\langle c,w\rangle$ gerade der Wert der Extension f von β (an $\langle c,w\rangle$) für w ist; d.h. $f(w) = u$. Sollte also die Extension von β z.B. eine Eigenschaft Q oder eine Proposition p sein, so ist die Extension von ${}^{\vee}\beta$ die Menge derjenigen Objekte, die in der Welt w des Referenzpunktes die Eigenschaft Q haben, bzw. der Wahrheitswert der Proposition p in der Welt w. (${}^{\vee}$ ist der <u>Extensor</u>.)

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen Intensionalisierung und Extensionalisierung wird der sein, daß für beliebige Ausdrücke α einer Kategorie $\tau \in T$ die Extension von α gleich der von ${}^{\vee\wedge}\alpha$ ist; somit wird der Satz $[\alpha \equiv {}^{\vee\wedge}\alpha]$ stets wahr, also gültig,sein. Dennoch bedeutet dies keineswegs, daß die Extensionalisierung ein vollkommmen überflüssiges, weil redundantes, Ausdrucksmittel ist. ${}^{\vee}$ läßt sich nämlich vor beliebige Ausdrücke einer Kategorie $\langle s,\tau\rangle$ schreiben, und diese müssen keineswegs immer die Gestalt ${}^{\wedge}\alpha$ haben; so ist z.B. ${}^{\vee}\beta$ auch dann wohlgeformt, wenn $\beta \in Kon_{\langle s,\tau\rangle}$, wobei sich dann das ${}^{\vee}$ wohl kaum (wie im Falle von ${}^{\vee\wedge}\alpha$) "eliminieren" läßt.

Das vielleicht wichtigste Ausdrucksmittel von IL ist die sog. <u>Abstraktion</u>; hauptsächlich ihr verdankt die Sprache ihre kombinatorische Ausdrucksstärke. Um die Abstraktion zu motivieren, stellen wir uns vor, wir hätten zwei IL-Ausdrücke β und h gegeben; beide sollen der Kategorie $\langle e,e\rangle$ angehören und somit Funktionen von Individuen in Individuen bezeichnen (d.h. zur Extension haben). Wir können uns β und h als gleichbedeutend mit "der Bürgermeister von" bzw. "die Hauptstadt von" vorstellen. Wenn nun $x \in Var_e$ an einem vorgegebenen Äußerungskontext c ein Land (zu einem c zugehörigen Zeitpunkt) bezeichnet, so ist

$$(5) \quad [\beta\ [h\ x]]$$

offenbar ein IL-Ausdruck der Kategorie e, dessen Extension der Bürgermeister der Hauptstadt des durch x bezeichneten Landes ist. Falls also x auf Spanien verweist, so ist Calvañ (zumindest im Juni 1979) die Extension von (5). Wenn wir nun die Funktion f betrachten, die jedem Land x den Bürgermeister der Hauptstadt von von x zuweist, so wäre f also durch ken der Form (10) werden wir - nachdem wir die jetzige Darstellung von IL präzisiert haben - für einen großen Teil der IL-Ausdrücke α , β und x beweisen; es handelt sich dabei um das sog. Prinzip der λ-Konversion. Es gibt jedoch einige intersessante Beispiele, auf die dieses Prinzip nicht anwendbar ist. Mehr darüber im übernächsten Abschnitt.

Unsere informelle Skizze von IL endet hier schon, obwohl man sich vielleicht fragen könnte, wo denn die üblichen Ausdrucksmittel prädikatenlogischer Sprachen bleiben: Junktoren, Quantoren und eventuell Modaloperatoren. Wie wir jedoch noch sehen werden, lassen sich all diese mithilfe der bisher dargestellten syntaktisch-semantischen Operationen in einem bestimmten Sinne definieren. Um ein Beispiel zu geben: obwohl das Zeichen $\wedge$ nicht zu den IL-Ausdrücken gehört, kann man einen Ausdruck $\wedge^*$ der Kategorie $\langle t,\langle t,t\rangle\rangle$ finden, so daß für beliebige IL-Sätze α und β der Ausdruck

$$(11)\ [[\wedge^* \alpha]\beta]$$

stets genau dann den Wahrheitswert 1 zur Extension hat, falls α und β (am selben Referenzpunkt) beide wahr sind. $\wedge^*$ erfüllt also die Funktion von $\wedge$, weswegen wir statt (11)

$$(12)\ [\alpha \wedge \beta]$$

schreiben werden, wenn wir erst einmal $\wedge^*$ definiert haben; analoges gilt für die anderen üblichen logischen Ausdrucksmittel. Bei der Suche nach Ausdrücken wie $\wedge^*$ werden wir die zu Eingang dieses Abschnittes erwähnte kombinatorische Ausdrucksstärke von IL kennenlernen, die diese Sprache in erster Linie durch die Abstraktion erhält. Zuvor jedoch wollen wir die bisher nur skizzierte syntaktisch-semantische Beschreibung von IL präzisieren.

2.2. Syntax und Semantik der Intensionalen Logik

Wir beginnen zunächst mit den syntaktischen Definitionen. Dabei werden wir genauso vorgehen wie bei der Definition der Sprache Σ_1 in Abschnitt 1.1.; d.h. wir werden zunächst die große Menge der endlichen Ketten über den lexikalischen Ausdrücken und den Hilfssymbolen betrachten, um über dieser die syntaktischen Operationen zu definieren, welche wir dann wieder leicht einschränken werden. Dieses Vorgehen beim Angeben von Syntaxen empfiehlt sich bei allen syntaktisch einfach aufgebauten Sprachen, zu denen auch IL gehört; bei der Syntax natürlicher Sprachen ist diese Strategie oft zum Scheitern verurteilt, wodurch man dann gezwungen ist, auf kompliziertere induktive Prozesse zurückzugreifen. Mehr darüber in Kapitel 3.

Unsere lexikalischen Ausdrücke sollen die Konstanten und Variablen sein. Genauer:

(1) (i) Für jedes $\tau \in T$ seien <u>Kon_τ</u> und <u>Var_τ</u> zwei abzählbar unendliche Mengen, die Menge der <u>Konstanten der Kategorie τ</u> bzw. der <u>Variablen der Kategorie τ</u>.
Wir schreiben auch:

$$Kon = \{ k_\tau^n \mid n \in \omega \} ;$$
$$Var = \{ v_\tau^n \mid n \in \omega \} .$$

(Es sei vorausgesetzt, daß für beliebige Typen $\sigma, \tau \in T$ mit $\sigma \neq \tau$ stets folgendes gilt:

$$Kon_\sigma \cap Kon_\tau = \emptyset ;$$
$$Kon_\sigma \cap Var_\tau = \emptyset ; \quad Kon_\tau \cap Var_\tau = \emptyset ;$$
$$Var_\sigma \cap Var_\tau = \emptyset .$$

Selbstverständliche Bedingungen wie diese lassen wir sonst meist weg.)

(ii) <u>Kon</u> (die Menge der <u>Konstanten</u>) ist $\bigcup_{\tau \in T} Kon_\tau$;
<u>Var</u> (die Menge der <u>Variablen</u>) ist $\bigcup_{\tau \in T} Var_\tau$.

(iii) <u>A_{IL}^*</u> sei die Menge aller endlichen Ketten über

$$Kon \cup Var \cup \{ [,], \equiv, {}^\wedge, {}^\vee, \lambda \} .$$

Als Indizes für die syntaktischen Operationen wählen wir wieder die durch die Operationen jeweils neu eingeführten Symbole; d.h. wir setzen:

(2) (i) <u>IIL</u> $:= \{ [\,], \equiv, {}^\wedge, {}^\vee, \lambda \}$
(IIL soll die Menge der Operationenindizes von IL sein; dabei ist $[\,]$ die Verkettung von $[$ mit $]$, also <u>ein</u> Element von IIL.)

(ii) Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^*_{IL}$ sei:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{[\,]}(\alpha,\beta) &:= [\alpha\beta] \\ \bar{F}_{\equiv}(\alpha,\beta) &:= [\alpha \equiv \beta] \\ \bar{F}_{\wedge}(\alpha) &:= {}^\wedge\alpha \\ \bar{F}_{\vee}(\alpha) &:= {}^\vee\alpha \\ \bar{F}_{\lambda}(\alpha,\beta) &:= [\lambda\alpha\beta] \end{aligned}$$

(iii) <u>AIL</u> sei die kleinste Teilmenge von $\mathcal{A}^*_{IL}$, welche Kon $\cup$ Var umfaßt und unter allen Operationen $\bar{F}_i$ (für $i \in$ IIL) abgeschlossen ist.

(iv) Für $i \in$ IIL ist $F_i := \bar{F}_i \upharpoonright$ AIL.

Wir kommen nun zu den syntaktischen Regeln, die bis auf eine vollkommen unproblematisch zu formulieren sind. Im Falle der Funktionalapplikation wollen wir z.B. $[\alpha\beta]$ genau dann als wohlgeformt (d.h. als einer Kategorie zugehörig) ansehen, falls α einer Kategorie $\langle\sigma,\tau\rangle$ ($\sigma, \tau \in$ T) und β der Kategorie σ angehört; somit werden wir für alle $\sigma, \tau \in$ T die Regel $\langle F_{[\,]}, \langle\sigma,\tau\rangle, \sigma, \tau\rangle$ in IL aufnehmen. Bei der Identität wollen wir voraussetzen, daß die Teilausdrücke derselben Kategorie angehören; das Ergebnis muß dann natürlich ein Satz sein. Die Regeln für Intensionalisierung und Extensionalisierung verstehen sich von selbst. Bei der Abstraktion ergibt sich jedoch eine Schwierigkeit, da $[\lambda\alpha\beta]$ nur dann wohlgeformt sein soll, falls α eine Variable ist. Da Regeln aber immer nur etwas über die Zugehörigkeit (z.B. von α) zu Kategorien aussagen bzw. voraussetzen können, müssen wir hier einen kleinen Trick anwenden. Wir werden für jeden Typ τ eine Zusatzkategorie τ^* installieren, zu der nur die Variablen dieses Typs gehören sollen; dann können wir $\langle F_\lambda, \sigma^*, \tau, \langle\sigma,\tau\rangle\rangle$ als Regelschema benutzen. Für $\tau \in$ T wählen wir $\langle T, \tau\rangle$ als τ^*, da aus mengentheoretischen Gründen (Fundierungsaxiom) auf diese Weise gesichert ist, daß τ^* nicht schon "zufällig" in T ist. D.h. wir setzen:

(3) (i) <u>KIL</u> $:= T \cup \{\langle T,\tau\rangle \mid \tau \in T\}$ $\qquad (= T \cup (\{T\} \times T))$;

(ii) <u>RIL</u> $:= \{\langle F_{[\,]}, \langle\sigma,\tau\rangle, \sigma, \tau\rangle \mid \sigma,\tau \in T\}$
$\cup \{\langle F_{\equiv}, \tau, \tau, t\rangle \mid \tau \in T\}$
$\cup \{\langle F_{\wedge}, \tau, \langle s,\tau\rangle \mid \tau \in T\}$
$\cup \{\langle F_{\vee}, \langle s,\tau\rangle, \tau \mid \tau \in T\}$
$\cup \{\langle F_{\lambda}, \langle T,\sigma\rangle, \tau, \langle\sigma,\tau\rangle \mid \sigma,\tau \in T\}$.

Als Grundausdrücke nehmen wir $Var \cup Kon$, wobei jede Variable systematisch zwei Kategorien angehört: einer Kategorie $\tau \in T$ und der entsprechenden Kategorie $\langle T,\tau \rangle$. (Die Komplikation hätte natürlich auch auf andere Weise umgangen werden können; vgl. dazu Aufgabe [1].) IL läßt sich nun leicht definieren:

$$(4)\ (i)\ \underline{\mathfrak{G}IL}_\tau := Kon_\tau \cup Var_\tau \quad \text{und}$$
$$\underline{\mathfrak{G}IL}_{\langle T,\tau \rangle} = Var_\tau \quad , \quad \text{falls } \tau \in T.$$

$$(ii)\ \underline{IL} := \langle AIL, F_i, \mathfrak{G}IL_k, RIL, t \rangle_{i \in IIL, k \in KIL} .$$

Wir kommen nun zur Semantik; d.h. wir werden aus allen erdenklichen Fregeschen Interpretationen für IL diejenigen herausgreifen, welche den von uns in 2.1. skizzierten Anforderungen genügen.

Sei also $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b \rangle_{i \in IIL}$ eine Fregesche Interpretation für IL bezüglich D,W,C und φ. Was muß $\mathfrak{D}$ alles erfüllen, um für unsere Zwecke interessant zu sein? Zunächst einmal muß gesichert sein, daß den Ausdrücken einer Kategorie $\tau \in T$ Bedeutungen des Typs τ zugeordnet werden; entsprechendens muß für die Variablen $x \in Var_\tau$ gelten, die ja gleichzeitig Ausdrücke der Kategorie $\langle T,\tau \rangle$ sind. Die Typenzuweisung muß also τ und $\langle T,\tau \rangle$ den Typ τ zuordnen. Weiterhin haben wir gesagt, daß die Extension einer Konstanten unabhängig vom Äußerungskontext sein soll. Somit muß $b(\alpha)(\langle c,w \rangle) = b(\alpha)(\langle c',w \rangle)$ sein, falls $\alpha \in Kon$, $w \in W$ und $c,c' \in C$. Eine analoge Forderung könnte nun einfach besagen, daß die Variablen unabhängig von der Welt $w \in W$ gedeutet werden, d.h. daß sie strikt deiktisch sind. Eine solche Forderung würde zwar ausreichen, um die freien Variablen zu deuten, sie würde aber zu Schwierigkeiten führen, wenn es an die Deutung von Ausdrükken der Form $[\lambda x \alpha]$ geht (falls $x \in Var_\sigma$). Wie wir nämlich im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, müssen wir bei der Bestimmung der Extension eines Ausdruckes dieser Form an einem Punkt $\langle c,w \rangle$ für jedes $u \in E_\sigma$ dieExtension von α an dem Referenzpunkt kennen, der wie $\langle c,w \rangle$ ist, außer daß x auf u referiert. (Wir werden ihn mit $\langle c[^x/_u], w \rangle$ notieren.) Da die Extension von Variablen nur vom Kontext abhängt, muß es also für jedes $u \in E_\sigma$ einen Kontext c' geben, an dem x auf u verweist, alle anderen Variablen sich aber genauso verhalten wie an c. Die einfachste Möglichkeit dies zu garantieren - daß es also genügend Kontexte gibt - ist die, einen Kontext mit einer Funktion zu identifizieren, die allen Variablen (typengerecht) Werte zuweist, und dann C als Menge all dieser Funktionen aufzufassen. (Solche Funktionen nennt man auch Belegungen.) Genau diesen Weg werden wir hier wählen:

(5) Es seien D und W zwei nicht-leere Mengen. Eine IL-Belegung (bezüglich D und W) ist eine Funktion c mit Definitionsbereich Var und Werten in $\bigcup_{\tau \in T} E_{\tau}^{C,W}$, so daß für alle $\tau \in T$ gilt:
falls $x \in Var_{\tau}$, so ist $c(x) \in E_{\tau}^{C,W}$.

Für eine interessante Fregesche Interpretation muß also die Menge C der Äußerungskontexte gleich die Menge der Belegungen bezüglich der Menge D der Individuen und der Menge W der Welten sein.

Die weiteren Bedingungen, die ein solches interessantes $\mathfrak{D}$ erfüllen muß, beziehen sich auf die Interpretationen B_i der syntaktischen Operationen F_i von IL. Falls nämlich α ein Ausdruck einer Kategorie $\langle\sigma,\tau\rangle$ ist und β der Kategorie σ angehört, so muß die Extension von $[\alpha\beta]$ (an einem beliebigen Referenzpunkt $\langle c,w\rangle$) - also $b^*(F_{[\,]}(\alpha,\beta))(\langle c,w\rangle)$ - gleich dem Resultat der Anwendung der Extension von α (an $\langle c,w\rangle$) auf die Extension von β (an $\langle c,w\rangle$) sein; d.h. es muß gelten:

(6) $b^*(F_{[\,]}(\alpha,\beta))(\langle c,w\rangle) = b^*(\alpha)(\langle c,w\rangle)(b^*(\beta)(\langle c,w\rangle))$

Da b^* ein Homomorphismus von $\langle AIL, F_i\rangle_{i \in IIL}$ nach $\langle \mathfrak{B}, B_i\rangle_{i \in IIL}$ ist, läßt sich (6) auch so ausdrücken:

(7) $B_{[\,]}(b^*(\alpha), b^*(\beta))(\langle c,w\rangle) =$
$b^*(\alpha)(\langle c,w\rangle)(b^*(\beta)(\langle c,w\rangle))$

Wir werden die Klausel (7) in einer etwas allgemeineren Form in die noch zu liefernde Definition des Begriffes der interessanten Fregeschen Interpretation für IL aufnehmen, um so den Homomorphismus b^* nicht unnötig ins Spiel zu bringen. Unsere Klausel wird allgemein für beliebige $u \in E_{\langle\sigma,\tau\rangle}^{C\times W}$ und $v \in E_{\sigma}^{C\times W}$ fordern:

(8) $B_{[\,]}(u,v)(\langle c,w\rangle) = u(\langle c,w\rangle)(v(\langle c,w\rangle))$

(Dabei sollen u und v aus $\mathfrak{B}$ sein.) Offensichtlich ist (7) ein Spezialfall von (8) Andererseits ist (8) keine echte Einschränkung, da uns diejenigen u's und v's, welche außerhalb des Wertebereichs von b^* (aber in $\mathfrak{B}$) liegen, nicht sonderlich interessieren, wie wir ja auch z.B. in der Übersetzungstheorie (Minimalisierungsprozeß) gesehen haben. Auch die entsprechenden Klauseln für die anderen semantischen Operationen ($B_{\equiv}$ usw.) werden wir in der (analog zu (8)) verallgemeinerten Form geben. Die genaue Definition lautet dann:

(9) Es sei $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b \rangle_{i \in IIL}$ eine Fregesche Interpretation für IL, und zwar bezüglich der Parameter C, D, W und φ. $\mathfrak{D}$ ist <u>interessant</u>, falls folgendes gilt:

(i) für $\tau \in T$ ist $\varphi(\tau) = \varphi(\langle T,\tau \rangle) = \tau$;

(ii) falls $k \in Kon$, so ist

$$b(k)(\langle c,w \rangle) = b(k)(\langle c',w \rangle)$$

für alle $w \in W$ und $c,c' \in C$;

(iii) C ist die Menge der IL-Belegungen bezüglich D und W;

(iv) falls $x \in Var$, so ist

$$b(x)(\langle c,w \rangle) = c(x)$$

für alle $c \in C$ und $x \in W$;

(v) für alle $u,v \in \mathfrak{B}$, $\sigma, \tau \in T$ und $\langle c,w \rangle \in C \times W$ gilt:

(a) falls $u \in E_{\langle \sigma,\tau \rangle}^{C \times W}$ und $v \in E_{\sigma}^{C \times W}$, so ist

$B_{[\,]}(u,v)(\langle c,w \rangle) = u(\langle c,w \rangle)(v(\langle c,w \rangle))$;

(b) falls $u \in E_{\tau}^{C \times W}$ und $v \in E_{\tau}^{C \times W}$, so ist

$B_{\equiv}(u,v)(\langle c,w \rangle) = 1$ gdw. $u(\langle c,w \rangle) = v(\langle c,w \rangle)$;

(c) falls $u \in E_{\tau}^{C \times W}$, so ist $B_{\wedge}(u)(\langle c,w \rangle)$ diejenige Funktion $f \in E_{\langle s,\tau \rangle}$, so daß für alle $w' \in W$ $f(w') = u(\langle c,w' \rangle)$ ist;

(d) falls $u \in E_{\langle s,\tau \rangle}^{C \times W}$, so ist $B_{\vee}(u)(\langle c,w \rangle) = u(\langle c,w \rangle)(w)$;

(e) falls $u \in E_{\sigma}^{C \times W}$, $v \in E_{\tau}^{C \times W}$ und $u = b(x)$ für ein $x \in Var_{\sigma}$, so ist $B_{\lambda}(u,v)(\langle c,w \rangle)$ diejenige Funktion $f \in E_{\langle \sigma,\tau \rangle}$, so daß für alle $u' \in E_{\sigma}$ gilt: $f(u') = v(\langle [c^x/u], w \rangle)$.

In Klausel (v-b) ist zu beachten, daß der Wahrheitswert von Identitätsaussagen in IL nur davon abhängt, ob die Teilausdrücke dieselbe Extension haben. Falls nämlich α und β IL-Ausdrücke einer Kategorie $\tau \in T$ sind, so gilt mit (v-b):

(10) $b^*([\alpha \equiv \beta])(\langle c,w \rangle) = 1$	gdw.	
$b^*(F_{\equiv}(\alpha,\beta))(\langle c,w \rangle) = 1$	gdw.	(Def. von $F_{\equiv}$)
$B_{\equiv}(b^*(\alpha), b^*(\beta))\langle c,w \rangle = 1$	gdw.	(b* Homomorphismus)
$b^*(\alpha)(\langle c,w \rangle) = b^*(\beta)(\langle c,w \rangle)$		(Klausel (v-b))

Natürlich ist die Extension einer Identitätsaussage genau dann gleich 0, falls die Teilextensionen nicht identisch sind; dies folgt aus der Tatsache, daß die Bedeutung einer Identitätsaussage $[\alpha \equiv \beta]$ eine Bedeutung des Typs $\varphi(t) = t$ (Klausel (i)) sein muß, und somit die Extension stets 0 oder 1 ist. (Mit <u>Identitätsaussage</u> meinen wir dabei einen solchen IL-Ausdruck der Form $F_{\equiv}(\alpha,\beta)$, so daß α und β der gleichen Kategorie $\tau \in T$ angehören, also einen wohlgeformten Ausdruck.)

Die Behandlung der Identität in IL geschieht somit ganz im Geiste von Freges [SB]. Dennoch läßt sich in IL auch eine andere Art von Identität (als polynomische Operation) definieren, welche dann und nur dann wahr ist, falls die <u>Sinne</u>, also <u>Intensionen</u>, der Teilausdrücke gleich sind. Wir kommen auf diesen Punkt in Abschnitt 2.4. zurück.

Die Klauseln (v-c) und (v-e) lassen unschwer eine gewisse Ähnlichkeit erkennen, auf die wir im folgenden Abschnitt zu sprechen kommen werden; dort werden wir auch eine Analogie zwischen (v-a) und (v-d), also zwischen Funktionalapplikation und Extensionalisierung, feststellen.

Aus der Tatsache, daß der Parameter C in einer interessanten Frege-schen Interpretation alle Belegungen umfaßt, folgt insbesondere, daß jedes $u \in \bigcup_{\tau \in T} E_\tau$ die Extension eines IL-Ausdruckes an einem Referenzpunkt ist. Falls nämlich $u \in E_\tau$ für ein $\tau \in T$, so gibt es offensichtlich ein $c_u \in C$, so daß $c(v_\tau^0) = u$, woraus mit Definition (9), Klausel (iv) folgt, daß die Extension von v_τ^0 an einem Referenzpunkt $\langle c_u, w \rangle$ (für jedes $w \in W$) gleich u ist. M.a.W.:

$$(11) \quad \{u \mid \text{es gibt ein } \alpha \in AIL \text{ und ein } \langle c,w \rangle \in C \times W \text{ mit: } b^*(\alpha)(\langle c,w \rangle) = u\} = \bigcup_{\tau \in T} E_\tau$$

(11) besagt, daß es sich bei den in (9) definierten interessanten Interpretationen um sog. <u>Standard-Interpretationen</u> handelt, solche Interpretationen, die alle (bezüglich der vorgegebenen Parameter D und W) möglichen Extensionen enthalten. Wie man anhand relativ einfacher, hier aber zu weit führender Argumente zeigen kann, ist die Klasse derjenigen IL-Sätze α, welche an allen Referenzpunkten aller Fregescher Interpretationen wahr sind, nicht axiomatisierbar; IL ist also <u>bezüglich der Standard-Interpretationen unvollständig</u>. Wie Gallin in [IHM] (17 - 37) im Anschluß an Vorarbeiten aus Hen-

kins [CTT] gezeigt hat, läßt sich für IL auch eine andere Klasse von Interpretationen angeben, welche (11) nicht erfüllen, bezüglich derer aber IL vollständlich ist; es handelt sich dabei um sog. Nonstandard-Interpretationen. Wir haben uns hier für die in (9) angegebene Standard-Semantik entschieden, da uns einerseits metamathematische Betrachtungen nur am Rande interessieren, vor allem aber, weil eine ganze Reihe von IL-Ausdrücken im Rahmen der Nonstandardsemantik eine vollkommen andere Interpretation erhalten würden, was gelegentlich zu sehr unerwünschten Konsequenzen führt: mit der Axiomatisierbarkeit schwindet nämlich die Ausdrucksstärke, an der uns jedoch - wegen der indirekten Deutung - sehr viel liegt.

Lösungen

1. Aufgaben zur Syntaxtheorie

[2] $F^1_{\neg} = F^1_{\rightarrow} \langle Id^1_1, Cn^1_{\bot} \rangle$

$F^1_{\vee} = F^1_{\rightarrow} \langle F^1_{\rightarrow} \langle Id^2_1, Cn^2_{\bot} \rangle, Id^2_2 \rangle$

$F^1_{\leftrightarrow} = F^1_{\rightarrow} \langle F^1_{\rightarrow} \langle F^1_{\rightarrow}, F^1_{\rightarrow} \langle F^1_{\rightarrow} \langle Id^2_2, Id^2_1 \rangle, Cn^2_{\bot} \rangle\rangle,$
$Cn^2_{\bot} \rangle$

$\left(= F^1_{\rightarrow} \langle F^1_{\rightarrow} \langle F^1_{\rightarrow} \langle Id^2_1, Id^2_2 \rangle, F^1_{\rightarrow} \langle F^1_{\rightarrow} \cdots\cdots \right)$

[3] (a) z.z.: $\langle F^1_{\neg}, S_1, S_1 \rangle$ ist eine abgeleitete Regel (gem. Def. (21))

$F^1_{\neg}$ ist "komplex" (s.o.), d.h. durch Komposition entstanden aus:

$\left.\begin{array}{l} Id^1_1 \\ Cn^1_{\bot} \end{array}\right\}$ "innere Operationen"

$F^1_{\rightarrow}$ — "äußere Operation"

Somit muß es nach Def. (21), Klausel (iv) Kategorien k^*_1 und k^*_2 $\overset{\text{aus } K_1}{}$ geben, sodaß diese Folgen abgeleitete Regeln sind:

(1) $\langle Id^1_1, S_1, k^*_1 \rangle$

(2) $\langle Cn^1_{\bot}, S_1, k^*_2 \rangle$

(3) $\langle F^1_{\rightarrow}, k^*_1, k^*_2, S_1 \rangle$.

Da $K_1 = \{ S_1 \}$, gibt es für k^*_1 und k^*_2 nur eine Möglichkeit; wir sind also fertig, wenn wir gezeigt haben, daß (1') – (3') abgeleitete Regeln sind:

(1') $< Id^1_1, S_1, S_1 >$

(2') $< Cn^1_\bot, S_1, S_1 >$

(3') $< F^1_\to, S_1, S_1 >$

Hier können wir wieder Def. (21) anwenden: (1') ist abgeleitet nach Klausel (ii), (2') wegen (iii) und (3') wegen (iv). QED

(b) z.z.: $< F^1_\vee, S_1, S_1, S_1 >$ ist abgeleitet.

Wir argumentieren wie in (a), nur schneller!

(1) $< Id^2_1, S_1, S_1, S_1 >$ abgeleitet wegen Def. (21), Kl. (ii)

(2) $< Cn^2_\bot, S_1, S_1, S_1 >$ ——— (iii)

(3) $< F^1_\to, S_1, S_1, S_1 >$ ——— (i)

(4) $< F^1_\to < Id^2_1, Cn^2_\bot >, S_1, S_1, S_1 >$ ——— (iv) und teilen (1)–(3)

(5) $< Id^2_2, S_1, S_1, S_1 >$ ——— (ii)

(6) $< F^1_\vee, S_1, S_1, S_1 >$ ——— (iv) und teilen (4), (5) und (3)

QED

(c) z.z. $< F^1_\leftrightarrow, S_1, S_1, S_1 >$ ist abgeleitet.

(1) $< Id^2_2, S_1, S_1, S_1 >$ .... (ii)

(2) $< Id^2_1, S_1, S_1, S_1 >$ ... (ii)

(3) $< F^1_\to, S_1, S_1, S_1 >$ ... (i)

(4) $< F^1_\to < Id^2_2, Id^2_1 >, S_1, S_1, S_1 >$ ... (iv), (1)–(3)

(5) $< Cn^2_\bot, S_1, S_1, S_1 >$ ... (iii)

(6) $< F^1_\to, < F^1_\to < Id^2_2, Id^2_1 >, Cn^2_\bot >, S_1, S_1, S_1 >$ ... (iv), (4), (5), (3)

(7) $< F^1_\to < F^1_\to, F^1_\to < F^1_\to < Id^2_2, Id^2_1 >, Cn^2_\bot >>, S_1, S_1, S_1 >$ ... (iv), (3), (6), (3)

(8) $< F^1_\leftrightarrow, S_1, S_1, S_1 >$ ... (iv), (7), (5), (3)

QED

[5] z.z.: falls $r^* = \langle F^*, k_1, \dots, k_n, k^* \rangle$ abgeleitet ist und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ gehören (resp.) den Kategorien $k_1, \dots, k_n$ an, so gehört $F^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der Kategorie k^* an.

Wir argumentieren induktiv über r^* (vgl. Def. (2')).

(i) $r^* \in R$.

Die Behauptung gilt nach Def. (4), Klausel (ii).

(ii) $F^* = Id^n_m$ (für ein $m \leq n$) und $k^* = k_m$.

Zur Voraussetzung gehört also insbesondere α_m gehört der Kategorie k_m an. Es gilt aber $k_m = k^*$ und $\alpha_m = F^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, weil $F^* = Id^n_m$. Also gehört $F^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der Kategorie k^* an.

(iii) $F^* = Cn^n_\beta$ für ein $\beta \in \mathcal{G}_{k^*}$.

β gehört nach Def. (4), Klausel (i) der Kategorie k^* an. Da aber $F^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta$, gilt auch unsere Behauptung.

(iv) $F^* = F\langle G_1, \dots, G_m \rangle$ für polynomische $G_1, \dots, G_m$ und F, es gibt $k_1, \dots, k^* \in K$, so daß folgende Folgen abgeleitete Regeln sind:

$$\langle G_1, k_1, \dots, k_n, k_1^* \rangle \qquad (=: r_1^*)$$
$$\vdots$$
$$\langle G_m, k_1, \dots, k_n, k_m^* \rangle \qquad (=: r_m^*)$$
$$\langle F, k_1^*, \dots, k_m^*, k^* \rangle \qquad (=: r_*^*)$$

Wir setzen induktiv voraus, daß die Behauptung für die weniger komplexen Regeln $r_1^*, \dots, r_m^*$ und r_*^* schon bewiesen ist.

Falls also $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ den Kategorien $k_1, \dots, k_n$ angehören, so gehören (wegen der Induktionsvoraussetzung)

$$G_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$
$$\vdots$$
$$G_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

den Kategorien $k^*_1, \dots, k^*_m$ an, da ja $r^*_1, \dots, r^*_m$ abgeleitete Regeln sind. Somit gehört

$$F(G_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, G_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n))$$

der Kategorie k^* an, da die I.V. auch für r^*_* gilt. Aber $F(G_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, G_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) =$

$$F\langle G_1, \dots, G_m \rangle (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = F^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

welches also k^* angehört. QED

(Montague-Semiotik; SS 79

2. Aufgaben zur Theorie der direkten Deutung

[1] (i) Sei $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b \rangle_{i \in I}$ Fregesche Interpretation bezüglich C, D, W und φ und bezüglich C', D', W' φ'. Zu zeigen: $C = C'$ und $W = W'$.

Sei $u \in \mathfrak{B}$; dann ist $u \in E_\tau^{\,C \times W}$ für ein $\tau \in T$ wegen Def. (13), Klausel (i). Also ist der (eindeutig bestimmte) Definitionsbereich von u das Produkt $C \times W$:

$$\{x \mid \langle x, y \rangle \in u\} = C \times W$$

Mit dem gleichen Argument:

$$\{x \mid \langle x, y \rangle \in u\} = C' \times W'$$

Also ist $C \times W = C' \times W'$. Somit:

$$C = \{x \mid \langle x, y \rangle \in C \times W\}$$
$$= \{x \mid \langle x, y \rangle \in C' \times W'\} = C'.$$

Analog für W'.

<u>Bemerkung</u>: Im Beweis haben wir die (wesentliche) Voraussetzung gemacht, daß $\mathfrak{B} \neq \emptyset$, denn wir haben ein $u \in \mathfrak{B}$ betrachtet. Diese Voraussetzung ist aber korrekt, da $\mathfrak{D}$ eine Deutung ist und somit (Def. (13), Klausel (i)) $\langle \mathfrak{B}, B_i \rangle_{i \in I}$ eine Algebra. Trägermengen von Algebren sind aber definitionsgemäß nicht-leer.

(ii) Zu zeigen ist, daß es Fregesche Interpretationen $\mathfrak{D} = \langle \mathcal{B}, B_i, b \rangle_{i \in I}$ gibt, die bezüglich C, D, W und φ, aber auch bezüglich C', D', W' und φ' definiert sind, für die allerdings $D \neq D'$ und/oder $\varphi \neq \varphi'$ gilt.

Ein einfaches Beispiel für $\varphi \neq \varphi'$ <u>und</u> $D \neq D'$ geht so: man definiere

$$C := \{0\}$$
$$D := \{0, 1\}$$
$$W := \{1\}$$

Insbesondere gilt dann:

$$E^{D,W}_{\langle e,t \rangle} = E^{D,W}_{\langle t,t \rangle}$$

(Individuenmengen sind einstellige Wahrheitsfunktionen und umgekehrt.) Wir setzen nun:

$$\mathcal{B} := (E^{D,W}_{\langle t,t \rangle})^{C \times W}$$

und lassen die B_i irgendwelche "Wahrheitsfunktionen" über $\mathcal{B}$ sein. (Da C und W nur je ein Element haben kann man die Funktionen $u \in \mathcal{B}$ mit ihren Werten, also einstelligen Wahrheitsfunktionen identifizieren; entsprechend gilt dies für Operationen über $\mathcal{B}$, also insbesondere für die B_i.) Außerdem sei (z. B.) $b(\alpha)$ die (charakteristische Funktion der) Menge $\{0\}$. (Das ist übrigens – als Wahrheitsfunktion betrachtet – die Negation!) Wir setzen nun:

$$\varphi(k) = \langle e, t \rangle$$

für jedes $k \in K$. Dann ist $\mathfrak{D} = \langle B, B_i, b \rangle_{i \in I}$ offenbar eine Fregesche Interpretation bezüglich C, D, W und φ. ($\mathfrak{D}$ ist übrigens auch rein extensional!) Sei nun D' eine beliebige, von D verschiedene nicht-leere Menge. (z. B. die Menge ω der natürlichen Zahlen oder so.) Sei weiterhin

$$\varphi'(k) = \langle t, t \rangle$$

für alle $k \in K$. Falls nun $K \neq \emptyset$ (was wir hier getrost voraussetzen können, denn wir sind in einem Existenzbeweis), gilt: $\varphi \neq \varphi'$. Offensichtlich ist aber $\mathfrak{D}$ eine Fregesche Interpretation bezüglich C, D', W und φ', womit wir fertig sind.

Die Lösung der (sehr viel schwierigeren) Aufgabe [1] (iii) folgt

[2] Es soll eine rein extensionale, klassische Deutung $\mathfrak{D} = \langle \mathfrak{B}, B_i, b \rangle_{i \in I_1}$ von Σ_1 gegeben werden.

Wir setzen zunächst:

$$C := \{0\} \, ;$$
$$W := \{1\} \, .$$

D sei eine beliebige nicht-leere Menge. Dann sei:

$$\mathfrak{B} := (E_t^{D,W}) \; C \times W$$

$\mathfrak{B}$ enthält also genau zwei Elemente u_0 und u_1:

$$u_0(\langle 0,1 \rangle) = 0$$
$$C \times W$$
$$u_1(\langle 0,1 \rangle) = 1$$

(u_0 und u_1 lassen sich also mit ihren Werten, ~~den Wahrheitswerten, identifizieren.)~~ I_1 war gleich $\{\rightarrow\}$; wir definieren das (zweistellige) $B_\rightarrow$ über $\mathfrak{B}$ wie folgt:

$$B_\rightarrow(x,y) = \begin{cases} u_0, & \text{falls } x = u_1 \text{ und } y = u_0 \\ u_1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(für alle $x, y \in \mathfrak{B}$.) Weiterhin sei $b(\top) = u_1$, $b(\bot) = u_0$ und $b(p_i) = u_0$, falls $i \in \omega$. (Letzteres ist unwesentlich.) Das so definierte $\mathfrak{D}$ erfüllt die Anforderungen der Aufgabe

[5] Die Syntax Z_2 soll definiert werden.

Wir haben bereits:

$$\text{(*)} \quad K_2 = \{ VAR, KON, P1, P2, S_2 \}$$

und:

$$\mathcal{G}^2_{VAR} = \{ x_i \mid i \in \omega \}; \quad \mathcal{G}^2_{KON} = \{ c_i \mid i \in \omega \};$$

$$\text{(*)} \quad \mathcal{G}^2_{P1} = \{ P^1_i \mid i \in \omega \}; \quad \mathcal{G}^2_{P2} = \{ P^2_i \mid i \in \omega \};$$

$$\mathcal{G}^2_{S_2} = \emptyset .$$

Es sei $\tilde{A}_2$ die Menge aller endlichen Ketten über $\bigcup_{k \in K_2} \mathcal{G}^2_k \cup \{ \ulcorner(\urcorner, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner,\urcorner, \ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner\Box\urcorner, \ulcorner\Diamond\urcorner, \ulcorner\wedge\urcorner, \ulcorner\leftrightarrow\urcorner, \ulcorner\vee\urcorner \}$.

Wir setzen:

$$\text{(*)} \quad I_2 := \{ 1, 2, \neg, \Box, \Diamond, \wedge, \leftrightarrow, \vee \}$$

und definieren zunächst eine Familie $(\tilde{F}_i)_{i \in I_2}$ von Funktionen über $\tilde{A}_2$:

$$\tilde{F}_1 (\alpha, \beta) := \alpha(\beta)$$

$$\tilde{F}_2 (\alpha, \beta, \gamma) := \alpha(\beta, \gamma)$$

$$\tilde{F}_\neg (\alpha) := \neg\alpha$$

$$\tilde{F}_\Box (\alpha) := \Box\alpha$$

$$\tilde{F}_\Diamond (\alpha) := \Diamond\alpha$$

$$\tilde{F}_\wedge (\alpha, \beta) := (\alpha \wedge \beta)$$

$$\tilde{F}_\leftrightarrow (\alpha, \beta) := (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

$$\tilde{F}_\vee (\alpha, \beta) := (\alpha \vee \beta)$$

+ alle Stelligkeiten ergeben sich von selbst.) Dann ist:

A_2 die kleinste Menge, die $\bigcup_{k \in K_2} g^2_{jk}$ umfaßt und unter jedem $\tilde{F}_i$ $(i \in I_2)$ abgeschlossen ist.

Weiterhin soll gelten:

$F^2_i := \tilde{F}_i \upharpoonright A_2$, für jedes $i \in I_2$.

Die Regeln sind schließlich die folgenden:

$$
\begin{aligned}
R_2 := \{ & \langle F^2_1, P1, VAR, S_2 \rangle, \\
& \langle F^2_1, P1, KON, S_2 \rangle, \\
& \langle F^2_2, P2, VAR, VAR, S_2 \rangle, \\
& \langle F^2_2, P2, VAR, KON, S_2 \rangle, \\
& \langle F^2_2, P2, KON, VAR, S_2 \rangle, \\
& \langle F^2_2, P2, KON, KON, S_2 \rangle, \\
& \langle F^2_{\neg}, S_2, S_2 \rangle, \langle F^2_{\Box}, S_2, S_2 \rangle, \\
& \langle F^2_{\Diamond}, S_2, S_2 \rangle, \langle F^2_{\wedge}, S_2, S_2, S_2 \rangle, \\
& \langle F^2_{\leftrightarrow}, S_2, S_2, S_2 \rangle, \langle F^2_{\vee}, S_2, S_2, S_2 \rangle \}
\end{aligned}
$$

$$\Sigma_2 := \langle A_2, F^2_i, g^2_{jk}, R_2, S_2 \rangle_{i \in I_2, k \in K_2}.$$

[4] Klausel (v) aus Definition (20) ist zu präzisieren; wir setzen dabei die Lösung von Aufgabe [3] in der obigen Form voraus.

Zu 'definieren' ist $(B_i)_{i \in I_2}$. Die einzelnen Festlegungen lauten:

(1) falls $u \in (E^{D,W}_{\langle e,t\rangle})^{C\times W}$ und $v \in (E^{D,W}_{e})^{C\times W}$, so ist

$$B_1(u,v)(\langle c,w\rangle) = u(\langle c,w\rangle)\,(v(\langle c,w\rangle)),$$

für alle $\langle c,w\rangle \in C\times W$;

(2) falls $u \in (E^{D,W}_{\langle e,\langle e,t\rangle\rangle})^{C\times W}$ und $v_1, v_2 \in (E^{D,W}_{e})^{C\times W}$, so ist:

$$B_2(u,v_1,v_2)\ (\langle c,w\rangle)$$

$$= [u(\langle c,w\rangle)\,(v_1(\langle c,w\rangle))]\,(v_2(\langle c,w\rangle))$$

für alle $\langle c,w\rangle \in C\times W$;

(3) falls $u \in (E^{D,W}_{t})^{C\times W}$, so ist:

$$B_{\neg}(u)(\langle c,w\rangle) = 1 \iff u(\langle c,w\rangle) = 0.$$

für alle ...

(4) falls $u \in (E^{D,W}_{t})^{C\times W}$, so ist:

$$B_{\Box}(u)(\langle c,w\rangle) = 1$$

$$\iff u(\langle c,w'\rangle) = 1 \quad \text{für jedes } w' \in W;$$

(5) ... $B_{\Diamond}(u)(\langle c,w\rangle) = 1$

$\iff$ es gibt ein $w' \in W$ mit: $u(\langle c,w'\rangle) = 1$;

(6) $B_{\wedge}(u,v)(\langle c,w\rangle) = 1$

$\Leftrightarrow u(\langle c,w\rangle) = v(\langle c,w\rangle) = 1$;

(7) $B_{\leftrightarrow}(u,v)(\langle c,w\rangle) = 1$

$\Leftrightarrow u(\langle c,w\rangle) = v(\langle c,w\rangle)$;

(8) $B_{\vee}(u,v)(\langle c,w\rangle) = 0$

$\Leftrightarrow u(\langle c,w\rangle) = v(\langle c,w\rangle) = 0$.

[5] Gesucht ist ein erwünschtes Modell $\langle \mathfrak{D}, \rho \rangle$ für I_2, in dem $\Box P^1_1(x_0)$ falsch ist. Zu zeigen ist ferner, daß für solche $\mathfrak{D}$ stets ein ρ' existiert, so daß $\langle \mathfrak{D}, \rho' \rangle$ unerwünscht ist. (Solche $\mathfrak{D}$ haben also nicht-aktualisierbare Referenzpunkte.)

Ein sehr "kleines" Modell, das den genannten Anforderungen entspricht, kann so definiert werden: wir setzen $W := \{0,1\}$ und $C = \{0\}$.
D sei eine beliebige (nicht-leere) Menge, zu ~~der das Element u gehört. Es sei Wollen~~
$b(x_0)(\rho) = u$, für alle $\rho \in C \times W$.
Weiterhin sei:

$$b(P^1_1)(\langle 0,0\rangle) := \emptyset$$

$$b(P^1_1)(\langle 0,1\rangle) := D$$

(Wir haben Mengen mit ihren charakteristischen Funktionen identifiziert.) Alles andere interessiert uns hier nicht, solange $\mathfrak{D} = \langle B, B_i, b\rangle_{i \in I_2}$ eine interessante Deutung ist. Unter Zuhilfenahme von Aufgabe [4], Teil (1), zeigt man nun leicht, daß $P^1_1(x_0)$ wahr ist am Punkt $\langle 0,1\rangle$. Somit ist $\langle \mathcal{D}, \langle 0,1\rangle\rangle$ ein erwünschtes Modell. Ebenso leicht sieht man, daß $\langle \mathcal{D}, \langle 0,0\rangle\rangle$ unerwünscht ist. Da aber (Aufg. [4], (4)) $\square P^1_1(x_0)$ nur dann wahr ist im Modell $\langle \mathcal{D}, \langle 0,1\rangle\rangle$, falls $P^1_1(x_0)$ wahr ist, an den Punkten $\langle 0,1\rangle$ und $\langle 0,0\rangle$ wahr ist, ist $\square P^1_1(x_0)$ falsch in dem erwünschten Modell $\langle \mathcal{D}, \langle 0,1\rangle\rangle$.

Um den zweiten Teil zu zeigen, nehmen wir einmal an, daß $\langle \mathcal{D}, \rho\rangle$ ein erwünschtes Modell ist, in dem $\square P^1_1(x_0)$ nicht wahr ist. ρ hat natürlich die Form $\langle c, w\rangle$. Nach Aufgabe [4], Teil (4), ist aber $\square P^1_1(x_0)$ wahr am Punkt $\langle c,w\rangle$, falls für jedes $w' \in W$ die Formel $P^1_1(x_0)$ am Punkt $\langle c, w'\rangle$ wahr ist. Da $\square P^1_1(x_0)$ nach Voraussetzung an $\langle c,w\rangle$ falsch ist, gibt es ein w', so daß $P^1_1(x_0)$ am Punkt $\langle c, w'\rangle$ falsch ist, d.h. $\langle \mathcal{D}, \langle c, w'\rangle\rangle$ ist unerwünscht. QED

[6] [Die Aufgabe geht auf eine Bemerkung Montagues in "Universal Grammar" zurück.] Wir nehmen an, $\mathfrak{M}$ sei eine Klasse von Modellen für eine Sprache Σ und α und β seien Sätze von Σ.

(10)

(i) Zunächst ist zu zeigen, daß α und β $\mathfrak{M}$-äquivalent sind, falls α und β für jedes $\mathfrak{D}$, für das $\langle \mathfrak{D}, \rho \rangle \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$-synonym sind.
Wir nehmen also mal an, daß folgendes gilt:

(*) falls $\langle \mathfrak{D}, \rho \rangle \in \mathfrak{M}$, so sind α und β $\mathfrak{D}$-synonym.

Zu zeigen ist also, daß α und β $\mathfrak{M}$-äquivalent sind, d.h.

$$\langle \mathfrak{D}, \rho \rangle \in \mathfrak{M} \Rightarrow [\alpha \text{ wahr in } \langle \mathfrak{D}, \rho \rangle \Leftrightarrow \beta \text{ wahr in } \langle \mathfrak{D}, \rho \rangle]$$

Falls aber $\langle \mathfrak{D}, \rho \rangle \in \mathfrak{M}$, so gilt wegen (*): $b^*(\alpha) = b^*(\beta)$; also insbesondere:

$$b^*(\alpha)(\rho) = b^*(\beta)(\rho),$$

d.h. α und β haben denselben Wahrheitswert in $\langle \mathfrak{D}, \rho \rangle$. QED

(ii) Nun ist zu zeigen, daß es Modellklassen $\mathfrak{M}$ gibt, so daß α und β $\mathfrak{M}$-äquivalent sind, aber dennoch nicht $\mathfrak{D}$-synonym für ein $\mathfrak{D}$, so daß $\langle \mathfrak{D}, \rho \rangle \in \mathfrak{M}$ (für ein geeignetes ρ).
Entsprechend dem Hinweis setzen wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$, $\alpha = P^1_1(x_0)$ und
$\beta = (P^1_1(x_0) \vee \neg P^1_1(x_0))$.
Zunächst nehmen wir zur Kenntnis, daß α und β $\mathfrak{M}^*$-äquivalent sind, d.h.

sie haben in allen Modellen $\mathfrak{M} \in \mathfrak{K}^*$ denselben Wahrheitswert. Das ist in der Tat der Fall, da α (nach Definition von $\mathfrak{K}^*$) in jedem $\mathfrak{M} \in \mathfrak{K}^*$ wahr ist; β aber auch, wie man leicht anhand der Definition (20) (mit den Ergänzungen (1), (3) und (8) aus Aufgabe [4]) nachweist. β ist sogar in <u>jedem</u> Modell $<\mathfrak{D}, \rho>$ wahr (auch in unerwünschten), falls $\mathfrak{D}$ interessant ist; β ist also eine "Tautologie". Aus Aufgabe [5] wissen wir aber, daß es erwünschte Modelle $<\mathfrak{D}, \rho>$ gibt, so daß $<\mathfrak{D}, \rho'>$ für einen Referenzpunkt ρ' von $\mathfrak{D}$ unerwünscht ist; d.h. $P_1^1(x_0)$ ist falsch in $<\mathfrak{D}, \rho'>$. Aber die Tautologie β ist wahr in $<\mathfrak{D}, \rho'>$. M.a.W.:

$$b^*(\alpha)(\rho') \neq b^*(\beta)(\rho'),$$

(falls $\mathfrak{D} = <B, B_i, b>_{i \in I}$). Also auch:

$$b^*(\alpha) \neq b^*(\beta),$$

womit α und β nicht $\mathfrak{D}$-synonym sind. QED

3. Aufgaben zur Theorie der indirekten Deutung (Montaguesche Semiotik, SS 79

[1] Es sei $\ddot{U} = \langle \tau, P_i, \ddot{u} \rangle_{i \in I}$ ein Übersetzungsverfahren von Σ nach $\bar{\Sigma}$, $k \in K$ ein Kategorienindex von Σ und α ein Ausdruck der Kategorie k (in Σ).

Z. z.: $\ddot{u}^*(\alpha)$ gehört der Kategorie $\tau(k)$ an (in $\bar{\Sigma}$).

Der Beweis geschieht durch Induktion über α:

Induktionsanfang: falls $\alpha \in \mathcal{G}_k$ (d.h. α lexikalisch), so ist $\ddot{u}^*(\alpha) = \ddot{u}(\alpha)$, nach Def. (3)(i); nach Def. (2)(iv) ist dann auch $\ddot{u}(\alpha)$ ein Ausdruck der Kategorie $\tau(k)$.

Induktionsschritt: α sei $F_i(\beta_1, \dots, \beta_n)$ für ein $i \in I$, die Behauptung sei für $\beta_1, \dots, \beta_n$ bewiesen. Da α der Kategorie k angehört, gibt es eine Regel $r \in R$ und Kategorie(indizes) $k_1, \dots, k_n \in K$, so daß gilt:

$r = \langle F_i, k_1, \dots, k_n, k \rangle$

(*) β_1 ist ein Ausdruck der Kategorie k_1

⋮

β_n ——————————— k_n.

Da $r \in R$, ist nach Def. (2)(v)

(**) $\langle P_i, \tau(k_1), \dots, \tau(k_n), k \rangle$

eine aus $\bar{\Sigma}$ abgeleitete Regel. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt außerdem aus (*):

$\ddot{u}^*(\beta_1)$ ist ein Ausdruck der Kategorie $\tau(k_1)$

⋮

$\ddot{u}^*(\beta_n)$ ——————————— $\tau(k_n)$.

Mit Aufgabe [5] aus der Syntaxtheorie folgt aus (*) und (**):

$P_i(ü^*(\beta_1), \dots, ü^*(\beta_n))$ gehört der Kategorie $f(k)$ an. (2)
$\overset{\shortparallel}{ü^*(\alpha)}$

QED

[2] Gegeben: ein Übersetzungsverfahren $Ü = \langle f, P_i, ü \rangle_{i \in I}$ (von $\mathcal{I}$ nach $\bar{\mathcal{I}}$)
Gesucht: eine Deutung $\mathcal{D}_Ü = \langle \mathcal{B}_Ü, B_i^Ü, b_Ü \rangle_{i \in I}$, sodaß
für alle $\alpha \in A$:

$$(*) \qquad ü^*(\alpha) = b_Ü^*(\alpha),$$

d.h. die Übersetzung von α (gemäß $Ü$) ist gleich der Bedeutung von α (gemäß $\mathcal{D}_Ü$).
Wir setzen:

$$\mathcal{B}_Ü := \bar{A}$$
$$B_i^Ü := P_i \quad, \text{für } i \in I$$
$$b_Ü := ü \;.$$

Trivialerweise ist $\mathcal{D}_Ü$ eine Deutung, da $\langle \bar{A}, P_i \rangle_{i \in I}$ von gleichem Ähnlichkeitstyp ist wie $\langle A, F_i \rangle_{i \in I}$ (wegen Def. (2)(ii)) und $ü$ eine Funktion von $\bigcup_{k \in K} G_k$ nach $\bar{A}$ ist (Def. (2)(iii)). Um (*) zu zeigen, argumentieren wir induktiv über α: falls α lexikalisch ist, gilt (*) trivialerweise, weil $ü^*(\alpha) \overset{\downarrow}{=} ü(\alpha) = b_Ü(\alpha) = b_Ü^*(\alpha)$ ($\downarrow$ nach Def. (3)(i)).
Falls $\alpha = F_i(\beta_1, \dots, \beta_n)$, ist:

$$
\begin{aligned}
& ü^*(\alpha) \\
&= P_i(ü^*(\beta_1), \dots, ü^*(\beta_n)) && \text{, nach Def. (3)(ii)} \\
&= P_i(b_Ü^*(\beta_1), \dots, b_Ü^*(\beta_n)) && \text{, nach Ind.-Vor.} \\
&= B_i^Ü(b_Ü^*(\beta_1), \dots, b_Ü^*(\beta_n)) && \text{, nach obiger Festlegung} \\
&= b_Ü^*(F_i(\beta_1, \dots, \beta_n)) && \text{, nach Def. von } b_Ü^*.
\end{aligned}
$$

QED

[3]: Nachzuweisen ist die Korrektheit (Konsistenz) von Definition (5), d.h. der Umstand, daß es zu jeder polynomischen Operation F über $\bar{\bar{\Sigma}}$ <u>genau eine</u> entsprechende Operation F^* über $\langle \bar{B}, B_i \rangle_{i \in \bar{I}}$ gibt. Dazu müssen wir streng zwischen einer Operation F und ihrem Namen "F" unterscheiden. So bezeichnen z.B.

$$"F_i \langle Id^2_1, Id^2_2 \rangle"$$

$$"F_i"$$

$$"F_i \langle Id^2_1 \langle Id^2_1, Id^2_2 \rangle, Id^2_2 \rangle"$$

alle dieselbe Funktion (nämlich F_i), falls F_i 2-stellig ist. Jedem Funktions<u>namen</u> "F" weisen wir nun induktiv (über "F"'s Länge) eine Zahl $\rho("F")$ – den Rang von "F" – wie folgt zu:

$$\rho("F") = 0, \quad \text{falls } "F" = "F_i" \quad (\text{für } i \in \bar{I})$$
$$\text{oder: } "F" = "Id^n_{m,\bar{A}}" \quad (\text{für } n, m \in \omega)$$
$$\text{oder: } "F" = "Cn^n_{\beta,\bar{A}}" \quad (\text{für } \beta \in \bar{A}, n \in \omega).$$

$$\rho("F") = \max(\rho(G_0), \ldots, \rho(G_n)) + 1, \quad \text{falls}$$
$$"F" = "G_0 \langle G_1, \ldots, G_n \rangle" \quad (n \in \omega).$$

(Die Anführungszeichen werden wie Quine'sche Ecken verwendet.)

Durch Induktion über $\rho("F")$ weisen wir dann nach:

(*) falls "F" eine n-stellige polynomische Operation F über $\bar{A}$ bezeichnet und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \bar{A}$, so gilt:

$$b^*(F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = F^*(b^*(\alpha_1), \ldots, b^*(\alpha_n)),$$

(wobei F^* die durch "F"* bezeichnete n-stellige polynomische Operation über $\bar{B}$ ist).

Aus (*) wird dann die Konsistenz von (5) sehr einfach folgen. (Wir schreiben jetzt auch "$\vec{\alpha}$" statt "$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$"!)

Beweis von (*) durch Induktion über $\rho(\text{"F"})$:

Induktionsanfang: $\rho(\text{"F"}) = 0$.

1. Fall: "F" = "F_i" für ein $i \in I$.

(*) folgt in diesem Fall unmittelbar aus der Definition (4) (ii) aus der Theorie der direkten Deutung.

2. Fall: "F" = "$Id^n_{m,\bar{A}}$" für $n, m \in \omega$ und $m < n$.

Dann ist:

$$b^*(F(\vec{\alpha})) = b^*(Id^n_{m,\bar{A}}(\vec{\alpha})) = b^*(\alpha_m)$$
$$= Id^n_{m,\bar{\mathbb{B}}}(b^*(\alpha_1), \dots, b^*(\alpha_n)) = F^*(b^*(\alpha_1), \dots, b^*(\alpha_n)).$$

3. Fall: "F" = "$Cn^n_{\beta,\bar{A}}$" für $n \in \omega$ und $\beta \in \bar{A}$.

Dann ist:

$$b^*(F(\vec{\alpha})) = b^*(Cn^n_{\beta,\bar{A}}(\vec{\alpha})) = b^*(\beta)$$
$$= Cn^n_{b^*(\beta),\bar{\mathbb{B}}}(b^*(\alpha_1), \dots, b^*(\alpha_n)) = F^*(b^*(\alpha_1), \dots, b^*(\alpha_n)).$$

Induktionsschritt: $\rho(\text{"F"}) = n+1$ und (*) sei für solche "G" mit $\rho(\text{"G"}) \leq n$ bewiesen.

Offenbar gilt: "F" = "$G_0 < G_1, \dots, G_k >$", wobei $\rho(\text{"}G_0\text{"}) \leq n, \dots, \rho(\text{"}G_k\text{"}) \leq n$. Dann ist:

$$b^*(F(\vec{\alpha})) = b^*(G_0 < G_1, \dots, G_k > (\vec{\alpha}))$$
$$= b^*(G_0(G_1(\vec{\alpha}), \dots, G_k(\vec{\alpha})))$$
$$= G_0^*(b^*(G_1(\vec{\alpha})), \dots, b^*(G_k(\vec{\alpha}))) \text{, nach der Ind.-Vor. für "}G_0\text{"}$$
$$= G_0^*(G_1^*(b^*(\alpha_1), \dots, b^*(\alpha_n)), \dots, G_k^*(b^*(\alpha_1), \dots, b^*(\alpha_n))),$$

nach der Ind.-Vor. für "G_1", ..., "G_k"

$$= G_0^* < G_1^*, \dots, G_k^* > (b^*(\alpha_1), \dots, b^*(\alpha_n))$$
$$= F^*(b^*(\alpha_1), \dots, b^*(\alpha_n)) .$$

[(*) ist bewiesen!]

Aus (*) folgern wir nun die Konsistenz von (S)! Seien also "F" und "G" Namen für dieselbe polynomische Operation F über $\bar{A}$. Zu zeigen ist, daß "F"* und "G"* dieselbe Operation über $\bar{B}$ bezeichnen.

"F"* bezeichne F^*, "G"* bezeichne G^*. Wir müssen zeigen:

$$(\forall u_1,\dots,u_n \in \bar{B})\ F^*(u_1,\dots,u_n) = G^*(u_1,\dots,u_n).$$

Da $\bar{B}$ der Wertebereich von b^* ist, gibt $\xrightarrow{\text{für } u_1,\dots,u_n \in \bar{B}}$ es $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \bar{A}$, so daß gilt:

$$u_1 = b^*(\alpha_1),\dots,\ u_n = b^*(\alpha_n).$$

Also ist für solche $u_1,\dots,u_n$:

$$F^*(u_1,\dots,u_n) = F^*(b^*(\alpha_1),\dots,b^*(\alpha_n))$$

und: $$G^*(u_1,\dots,u_n) = G^*(b^*(\alpha_1),\dots,b^*(\alpha_n))$$

Wegen (*) gilt dann:

$$F^*(u_1,\dots,u_n) = b^*(F(\alpha_1,\dots,\alpha_n))$$

und: $$G^*(u_1,\dots,u_n) = b^*(G(\alpha_1,\dots,\alpha_n))$$

Da aber n. V. $F = G$, ist auch

$$F^*(u_1,\dots,u_n) = G^*(u_1,\dots,u_n).$$ QED

[4] Zu zeigen ist:

$$(!) \quad b_+{}^*(\alpha) = b^*(ü^*(\alpha))$$

für beliebige $\alpha \in A$. Wir argumentieren induktiv über α's Aufbau:

Induktionsanfang: $\alpha \in G_k$ (für ein $k \in K$).

Dann ist: $b_+{}^*(\alpha) \underset{\substack{\alpha \text{ lexi-}\\ \text{kalisch}}}{=} b_+(\alpha) \underset{\substack{\text{Def.}\\ \text{von } b_+}}{=} b^*(ü(\alpha)) \underset{\substack{\alpha \text{ lexi-}\\ \text{kalisch}}}{=} b^*(ü^*(\alpha))$

Induktionsschritt: $\alpha = F_i(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ (für ein $i \in I$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n \in A$).

Dabei die Induktionsvoraussetzung: (!) ist bewiesen für $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Dann ist:

$b_+{}^*(\alpha)$

$= b_+{}^*(F_i(\beta_1, \ldots, \beta_n))$

$= P_i{}^*(b_+{}^*(\beta_1), \ldots, b_+{}^*(\beta_n))$ [nach der Def. v. $b_+{}^*$]

$= P_i{}^*(b^*(ü^*(\beta_1)), \ldots, b^*(ü^*(\beta_n)))$ [nach Induktionsvor.]

$= b^*(P_i(ü^*(\beta_1), \ldots, ü^*(\beta_n)))$ [nach (*) aus Aufg. [3]]

$= b^*(ü^*(F_i(\beta_1, \ldots, \beta_n)))$ [nach Def. [3]]

$= b^*(ü^*(\alpha))$ [nach Voraussetzung]

QED

Zimmermann: Montaguesche Semiotik [SS 7]

Literaturhinweise:

1. Syntaxtheorie [entspricht "Universal Grammar", 2.]

- Sebastian Löbner: Einführung in die Montague-Grammatik. Kronberg 1976, Kapitel 2 und 3.

2. Theorie der direkten Deutung [entspr. UG, 3. + 4.]

- Rudolf Carnap: Meaning and Necessity. Chicago 1947, Kapitel I.
- Gottlob Frege: "Über Sinn und Bedeutung" in: ders.: Funktion, Begriff, Bedeutung. Göttingen 1961
- Löbner, a.a.O., Kapitel 4 und 5.
- Charles Perry: "Frege on Demonstratives" in: Philosophical Review
- Thomas Zimmermann: Intensionale Logik und natürliche Sprache. Konstanz 1979 [SFB 99], Kapitel 1 bis 3.

3. Theorie der indirekten Deutung [entspr. UG, 5.]

s. Skript!

4. Intensionale Logik [UG, 6.]

- Löbner, a.a.O., Kapitel 7.
- Zimmermann, a.a.O., Kapitel 4.

5. Englisch [UG, 7.]

- Richard Montague: "The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English" in: ders.: Formal Philosophy, New Haven/London 1974.
- Barbara Partee "Montague Grammar and Transformational Grammar" in: dies. Montague Grammar

6. <u>Kritisches</u>

- Max J. Cresswell: "Review of <u>Formal Philosophy</u>" in: <u>Philosophia</u> 6 (1976)
- William S. Cooper: "The Logico-Linguistic Evidence Underlying Montague's Language Description" in: <u>Synthèse</u> 38 (1978)
- Asa Kasher: "The Proper Treatment of Montague Grammars in Natural Logic and Linguistics" in: <u>Theoretical Linguistics</u> 2 (1975).