Begleitskript zum Proseminar *Logische Grundlagen der Semantik*

Vorbemerkung

Die moderne, formale Semantik basiert ganz wesentlich auf logisch-mathematischen Methoden. Um einen einführenden Semantikkurs – wie das parallel angebotene Proseminar *Formale Semantik* (donnerstags, 10–12) – nicht mit formalen Detailproblemen zu überfrachten, empfiehlt es sich, diese formalen Grundlagen unabhängig zu erarbeiten. Dafür ist dieser Kurs da, in dem der Bezug der zu erlernenden Techniken und Begriffsbildungen zur Semantik nicht – oder allenfalls am Rande – hergestellt wird. Der Methodenkurs und das Semantikproseminar sind so aufeinander abgestimmt, dass beide gleichzeitig besucht werden können.

Der Kurs beginnt mit einigen grundlegenden Annahmen, Begriffen und Techniken der *Mengenlehre*, die für die darauffolgenden logischen Teile benötigt werden. Danach wenden wir uns der sog. *Aussagenlogik* zu, die bestimmte Verknüpfungen von Sätzen (z.B. durch *und* und *oder*) untersucht. Den dritten und letzten Teil bildet die *Prädikatenlogik*, eine Formelsprache, mit der sich beliebige mathematische – aber auch außermathematische – Sachverhalte präzise ausdrücken und mit Hilfe von ‘Rechenregeln’ herleiten lassen.

1. Mengen

1.1 Grundprinzipien der (naiven) Mengenlehre

Eine *Menge* ist die Zusammenfassung beliebig vieler, beliebiger Objekte zu einem abstrakten Ganzen. Altkanzkler Kohl, die Zahl 17 und der Eiffelturm, insgesamt also drei Objekte, lassen sich zum Beispiel zu einer Menge M_1 zusammenfassen; ebenso lassen sich alle durch 5 teilbaren geraden Zahlen, insgesamt also unendlich viele Objekte, zu einer Menge M_2 zusammenfassen; ebenso lässt sich gar nichts, insgesamt also null Objekte, zu einer Menge M_3 zusammenfassen.

Die Objekte, die zu einer Menge M zusammengefasst werden, nennt man die *Elemente von M*. *Elementschaft* ist also ein relativer Begriff, eine Beziehung, die *zwischen* einem Objekt und einer Menge bestehen kann. Um auszudrücken, dass ein Objekt x Element einer Menge M ist, schreibt man '$x \in M$'; um das Gegenteil auszudrücken, dass also die Elementschaftsbeziehung zwischen x und M nicht besteht, schreibt man: '$x \notin M$'. Es gilt also: $17 \in M_1$, $30 \in M_2$, Kohl$\notin M_3$, etc.

Im allgemeinen handelt es sich bei den Elementen einer Menge um gerade diejenigen Objekte, die einer bestimmten Bedingung genügen. Die Elemente von M_2 sind z.B. gerade diejenigen Objekte, die der Bedingung *ist eine gerade Zahl und ist durch 5 teilbar* genügen. Es wird sich im folgenden als geschickt erweisen, Bedingungen stets in der folgenden Form anzugeben:

(*) *so ein x zu sein, dass gilt: ...*

Die eben genannte, für M_2 einschlägige Bedingung lautet dann: *so ein x zu sein, dass gilt: x ist eine gerade Zahl, und x ist durch 5 teilbar*. Die Menge aller x, die einer Bedingung der Form (*) genügen, wird dann durch folgende Notation angegeben:

(+) $\{x \mid \ldots\}$

Nach dieser Konvention gilt also:

$$M_2 = \{x \mid x \textit{ ist eine gerade Zahl, und } x \textit{ ist durch 5 teilbar}\}$$

Das Gleichheitszeichen '=' drückt dabei die *Identität* aus, also dass es sich um ein einziges Objekt handelt.

Auch die Kraut-und-Rüben-Menge M_1 lässt sich in der Form (+) angeben; denn offensichtlich ist ein beliebiges Objekt Element dieser Menge, wenn es entweder mit Helmut Kohl, mit der Zahl 17 oder mit dem Eiffelturm identisch ist:

$$M_1 = \{x \mid x \textit{ ist Helmut Kohl oder } x \textit{ ist 17 oder } x \textit{ ist der Eiffelturm}\}.$$

Um auch M_3 in die Form (+) bringen, braucht man irgendeine Bedingung, der überhaupt kein Objekt genügt. Da jedes Ding mit sich selbst identisch ist, wird z.B. die Bedingung *so ein x zu sein, dass gilt: x ist verschieden von x* von keinem Objekt erfüllt:

$M_3 = \{x \mid x \neq x\}$.

Das Symbol '$\neq$' steht dabei für *Verschiedenheit*, im Sinne von Nicht-Identität.

Es ist zu beachten, dass es sich bei (+) um eine *Notationskonvention* handelt, also eine Verabredung darüber, wie bestimmte Formeln – in diesem Falle die der Form (+) – zu verstehen sind – nämlich als *Bezeichnungen* für entsprechende Mengen: die Notation '{*x* | *x ist ist verschieden von x*}' *bezeichnet* die Menge M_3 – ebenso wie die Bezeichnung 'M_3'. (Man beachte die Verwendung der Anführungszeichen!) Die durch Formeln der Form (+) bezeichneten Mengen fassen jeweils diejenigen Objekte zusammen, die einer bestimmten Bedingung genügen. Die Notation macht natürlich nur dann Sinn, wenn es eine solche Menge überhaupt gibt, wenn sich also alle Objekte, die der betreffenden Bedingung genügen, überhaupt zu einer Menge zusammenfassen *lassen*, wovon wir stets ausgehen werden. Wir unterstellen damit das sogenannte

Komprehensionsprinzip

Für jede Bedingung gibt es eine Menge, die genau diejenigen Objekte zusammenfasst, die dieser Bedingung genügen.

Braucht man überhaupt ein solches Prinzip? Ist es nicht klar, dass jedermann auf ganz willkürliche Weise Objekte zu abstrakten Ganzen zusammenfassen kann, wie wir das eben im Falle von M_1 – M_3 getan haben? Erstaunlicherweise ist dies nicht so klar, wie es zunächst scheint. Denn bei unkontrollierter Verwendung des Komprehensionsprinzips kann man sich sogar in Widersprüche verstricken (s.u.)! Die Entdeckung dieses Sachverhalts (durch B. Russell Anfang des 20. Jahrhunderts) hat die damalige Mathematik in eine tiefe Krise gestürzt und zur Aufgabe des Komprehensionsprinzips geführt; denn wenn in einer Theorie ein Widerspruch steckt, ist sie wertlos, weil sich in ihr jede Aussage 'beweisen' lässt, also auch jede falsche Aussage. Wir werden uns in diesem Kurs dennoch dieses Prinzips bedienen, um die wichtigsten mengentheoretischen Konstruktionen durchzuführen. Im Fortsetzungskurs (im nächsten Semester) schauen wir uns dann an, wie diese Konstruktionen mit harmloseren, aber komplizierteren Prinzipien zu erreichen sind. Dieses Vorgehen, sich auf vorsichtige Weise des bekanntermaßen widersprüchlichen Komprehensionsprinzips zu bedienen, wird als *naive Mengenlehre* bezeichnet.

Die einfachste Art, aus dem Komprehensionsprinzip einen Widerspruch herzuleiten, ist die sog. Russellsche Antinomie, bei der man die *Russellsche* Bedingung (R) *so ein x zu sein, dass x nicht Element von x ist* betrachtet. Nach dem Komprehensionsprinzip gibt es eine Menge aller Objekte, die der Bedingung (R) genügen; nennen wir diese Menge einfach *R*.
R ist offenbar sehr groß, denn sehr viele Objekte erfüllen (R), angefangen mit all denjenigen, die keine Mengen sind (weil sie sowieso keine Elemente haben, also auch nicht sich selbst); aber auch die Mengen M_1 – M_3 enthalten sich nicht selbst als Element und genügen damit der Bedingung *R*. Es gilt also: $M_1 \in R$, $M_2 \in R$, $M_3 \in R$. Andererseits gibt es durchaus Objekte, die (R) nicht erfüllen – z.B. die Menge *aller*

Mengen, also die Zusammenfassung U aller Objekte, die der Bedingung (M) genügen, *so ein x zu sein, dass gilt: x ist eine Menge*; denn U genügt selbst der Bedingung (M) und ist demnach ein Element von U. Damit genügt U nicht der Bedingung (R), und somit gilt: $M_1 \notin R$.
Genügt R selbst der Bedingung (R)? Gilt also: $R \in R$? Das kann nicht sein, denn in R sind nur solche Objekte, die *nicht* Element von sich selbst sind. Also muss gelten: $R \notin R$. Aber das kann auch nicht sein, denn dann würde R ja gerade der Bedingung (R) genügen! R kann also weder ein Element noch kein Element von R sein – ein glatter Widerspruch!

Eine Menge bestimmt sich einzig und allein durch die Dinge, die in ihr zusammengefasst werden, also ihre Elemente; d.h. es gilt das:

Extensionalitätsprinzip
Wenn eine Menge A genau dieselben Elemente besitzt wie eine Menge B, dann ist $A = B$.

Das Extensionalitätsprinzip kann man weder beweisen noch widerlegen. Es handelt sich vielmehr um eine begriffsbildende Annahme: der Mengenbegriff, also der Begriff der Zusammenfassung von Objekten zu einem abstrakten Ganzen, ist so zu verstehen, dass er dieses Prinzip erfüllt. Stellt man fest, dass zwei Objekte A und B zwar dieselben Elemente haben, aber doch nicht dasselbe sind – d.h. $A \neq B$ – dann kann es sich bei A und B nicht um Mengen im Sinne der Mengenlehre gehandelt haben (und man hätte in diesem Fall auch nicht von *Elementen* sprechen sollen).

Extensionalititäts- und Komprehensionsprinzip werden manchmal zu einem einzigen Prinzip zusammengezogen – dem *Extensionalen Komprehensionsprinzip*, nach dem es für jede Bedingung *genau eine* Menge gibt, die die Objekte zusammenfasst, die der Bedingung genügen.

Das Extensionaliätsprinzip klingt banal, hat aber einige wichtige Konsequenzen, z.B. für die Menge M_3. Diese Menge hat 0 Elemente; sie ist, wie man sagt, *leer*. Eine unmittelbare Folgerung aus dem Extensionaliätsprinzip ist nun, dass es nur eine solche leere Menge geben kann. Wenn nämlich A und B Mengen sind, die beide kein Element besitzen, dann besitzen sie insbesondere genau dieselben Elemente, womit nach dem Extensionalitätsprinzip gilt: $A = B$. Statt von *einer* leeren Menge darf man also getrost von *der* leeren Menge sprechen. In der Mengenlehre spielt die leere Menge eine wichtige Rolle; sie wird durch das Symbol 'Ø' bezeichnet. Es gilt also: $M_3 = \emptyset$.

Eine weitere wichtige Konsequenz des Extensionalitätsaxioms ergibt sich aus dem Zusammenspiel mit dem Komprehensionsprinzip. Denn wenn es bei einer Menge nur darauf ankommt, welche Elemente sie besitzt, dann spielen viele Details in der Formulierung der Elementschaftsbedingung keine Rolle – es kommt nur darauf an, welche Objekte die Bedingung erfüllen. Zum Beispiel erfüllen jeweils genau dieselben Objekte die folgenden beiden Bedingungen:

Bedingung 1:
so ein x zu sein, dass gilt:x ist Helmut Kohl oder x ist 17 oder x ist der Eiffelturm

Bedingung 2:
so ein x zu sein, dass gilt: x ist die einzige Primzahl zwischen 14 und 18 oder x ist der (körperlich) größte ehemalige BRD-Kanzler oder x ist das Wahrzeichen der Pariser Weltausstellung im Jahre 1900 oder x ist die Summe von 13 und 4

Jedes Objekt, das die erste dieser beiden Bedingungen erfüllt, erfüllt auch die zweite, und umgekehrt. Damit besitzt die Menge M_4 der Objekte, die die zweite Bedingung erfüllen, genau dieselben Elemente wie die Menge M_1. Nach dem Extensionalitätsaxiom gilt dann: $M_4 = M_1$. Natürlich ist es etwas umständlich, wenn man diese Menge als {*x* | *x ist die einzige Primzahl zwischen 14 und 18 oder x ist der (körperlich) größte ehemalige BRD-Kanzler oder x ist das Wahrzeichen der Pariser Weltausstellung im Jahre 1900 oder x ist die Summe von 13 und 4*} charakterisiert. Aber dieser Unterschied in der Charakterisierung entspricht keinem Unterschied in der charakterisierten Sache. Das folgt aus dem Extensionalitätsprinzip.

AUFGABE
Geben Sie jeweils zwei weitere Charakterisierungen der Mengen M_2 und M_3.

Sehr kleine Mengen wie M_1 werden oft statt durch eine Bedingung durch *Auflistung* ihrer Elemente charakterisiert:

M_1 = {17, Dr. Helmut Kohl, Eiffelturm}

Diese *Listennotation* ist natürlich nur praktikabel, wenn es sich um sehr wenige Elemente handelt und wenn diese Elemente einigermaßen knapp bezeichnet werden können. (Man muss dabei aufpassen, dass diese Bezeichnungen kein Komma enthalten, weil dieses sonst als Trennstrich zwischen den Elementen gelesen werden kann; die Menge, die aus den Zahlen 0,5 und 1,7 besteht, sollte man also nicht als {0,5,1,7} notieren!)

Die Listennotation bringt gegenüber der Charakterisierung durch Bedingungen nichts wirklich Neues: Listen lassen sich als Abkürzungen für Bedingungen auffassen. Bezeichnungen der Form

$\{a_1,\ldots,a_n\}$

stehen dann für entsprechende Charakterisierungen der Form

$\{x \mid x = a_1 \textit{ oder } \ldots \textit{ oder } x = a_n\}$.

Damit ist auch klar, dass es bei der Listennotation weder auf die Reihenfolge der Elemente noch auf ihre Häufigkeit noch auf ihre genaue Benennung ankommen kann. Zum Beispiel gilt:

$$
\begin{aligned}
& \{2+2,\ 4^2+1,\ 2\cdot 2,\ 20-3\} \\
= \quad & \{x \mid x = 2+2 \textit{ oder } x = 4^2+1 \textit{ oder } x = 20-3 \textit{ oder } x = 2\cdot 2\} \\
= \quad & \{x \mid x = 4 \textit{ oder } x = 17 \textit{ oder } x = 17 \textit{ oder } x = 4\}
\end{aligned}
$$

$$= \{x \mid x = 17 \text{ oder } x = 4\}$$
$$= \{17, 4\}$$

Listen können beliebig lang sein – oder kurz. Der Grenzfall sind Listen mit nur einem Eintrag; sie charakterisieren *Einermengen*, die nur ein einziges Element enthalten. Zum Beispiel ist {17} die Menge, der Objekte, die der Bedingung *so ein x zu sein, dass gilt: x = 17* genügen. Natürlich gibt es nur ein einziges Objekt dieser Art, nämlich die Zahl 17. Diese Zahl darf man nicht mit der Einermenge {17} verwechseln. 17 ist keine Menge und enthält also auch kein Element; {17} dagegen ist eine Menge mit genau einem Element. Es gilt insbesondere: $17 \notin 17$, aber $17 \in \{17\}$.

Aus dem Extensionalitätsprinzip ergibt sich eine spezielle Konsequenz für Einermengen:

Behauptung
Für beliebige Objekte a und b gilt: $\{a\} = \{b\}$ gdw. $a = b$.

Die Abkürzung ‘gdw.’ steht dabei für *genau dann, wenn*, was soviel heißt wie *wenn das eine, so das andere*.

Ist die Behauptung wirklich richtig? Ja, denn sie lässt sich beweisen, und zwar so:

Beweis
Um die Richtigkeit der Behauptung nachzuweisen, nehmen wir einmal an, wir hätten irgendwelche Objekte a und b. Wir müssen dann zweierlei zeigen: zuerst (“$\Rightarrow$”) zeigen wir, das $a = b$ ist, wenn $\{a\} = \{b\}$; und dann (“$\Leftarrow$”) zeigen wir, das $\{a\} = \{b\}$ ist, wenn $a = b$.
“$\Rightarrow$”: Es gelte $a = b$. Dann wird die Bedingung, mit a identisch zu sein, von genau denselben Objekten erfüllt wie die Bedingung, mit b identisch zu sein. Also ist auch die Menge der Objekte, die die eine Bedingung erfüllen, mit der Menge der Objekte, die die andere Bedingung erfüllen, identisch, d.h.: $\{a\} = \{b\}$.
“$\Leftarrow$”: Es gelte $\{a\} = \{b\}$. Nach dem Extensionalitätsprinzip heißt das, dass jedes Element von $\{a\}$ auch ein Element von $\{b\}$ ist. Da $a \in \{a\}$ – a erfüllt ja die Bedingung, mit a identisch zu sein – ist dann insbesondere auch $a \in \{b\}$, d.h. a ist Element der Menge der Objekte, die mit b identisch sind und erfüllt somit selbst diese Bedingung: $a = b$.

Mit dem Komprehensions- und dem Extensionalitätsprinzip sind die Grundlagen der (naiven) Mengenlehre gelegt. Alles weitere lässt sich aus diesen beiden Prinzipien herleiten.

1.2 Mengenoperationen

Mengen lassen sich auf vielfältige Weise miteinander kombinieren. In diesem Abschnitt werden wir die elementarsten dieser Kombinationen einführen, *Schnitt*, *Vereinigung* und *Differenz*:

Definitionen

Für beliebige Mengen A und B ist:

- der *Schnitt* von A *mit* B die Menge derjenigen Objekte x, für die gilt: x ist ein Element von A und x ist ein Element von B; symbolisch:

  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$.
- die *Vereinigung* von A *und* B die Menge derjenigen Objekte x, für die gilt: x ist ein Element von A oder x ist ein Element von B (oder beides); symbolisch:

  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$.
- die *Differenz* von A *und* B die Menge derjenigen Objekte x, für die gilt: x ist ein Element von A, aber x ist kein Element von B (oder beides); symbolisch:

  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$.

Die Notation '$A \cap B$' liest man auch als 'A vereinigt (mit) B'; $A \cup B$' liest man als 'A geschnnitten (mit) B'; und $A \setminus B$' liest man 'A minus B' oder 'A ohne B'.

Hier sind ein paar Beispiele (Stadt-Land-Fluss)

- für Schnitte:

{Frankfurt, Kassel, Stuttgart} ∩ {Kassel, Franfurt, Berlin} = {Kassel, Frankfurt}

{*x*| *x hat mehr als 500 000 Einwohner*} ∩ {*x*| *x liegt in Hessen*} = {Frankfurt}

{Frankfurt, Kassel, Stuttgart} ∩ {*x*| *x liegt in Hessen*} = {Kassel, Frankfurt}

{Frankfurt, Kassel, Stuttgart} ∩ {Kassel,Stuttgart} = {Kassel,Stuttgart}

{*x*| *x ist Landeshauptstadt*} ∩ {Kassel,Frankfurt} = **???**

- für Vereinigungen:

{Belgien, Niederlande,Luxemburg} ∪ {Frankreich, Belgien, Schweiz} =
{Belgien, Niederlande, Luxemburg, Frankreich, Schweiz}

{*x*| *x ist Nachbarland von Frankreich*} ∪ {*x*| *x ist Nachbarland von Belgien*} =
{*x*| *x ist Nachbarland von Frankreich*} ∪ {Frankreich, Niederlande}

{Belgien, Niederlande} ∪ {Belgien} = {Belgien, Niederlande}

Ø ∪ {Frankreich, Niederlande} = **???**

- für Differenzen:

{Rhein, Main} \ {Rhein} = {Main}
{Rhein, Main} \ {Elbe} = **???**
{*x* | *x* fließt durch Hessen} \ {*x* | *x* fließt durch Deutschland} = **???**
Ø \ {Rhein} = **???**

AUFGABE

Ersetzen Sie die ???

Für diese drei, auch als als *Boolesche Mengenoperationen* bekannten Kombinationen gelten ein paar einfache Rechenregeln:

Satz 1

Für beliebige Mengen A, B und C gilt:

(IS)	$A \cap A = A$	Idempotenz von $\cap$
(KS)	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
(AS)	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Assoziativität von $\cap$
(LS)	$A \cap \emptyset = \emptyset$	
(IV)	$A \cup A = A$	Idempotenz von $\cup$
(KV)	$A \cup B = B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
(AV)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Assoziativität von $\cup$
(LV)	$A \cup \emptyset =$ **???**	
(Diff1)	$A \setminus A =$ **???**	
(Diff2)	$A \setminus \emptyset =$ **???**	
(Dis1)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivgesetz
(Dis2)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivgesetz

AUFGABE

Ersetzen Sie die ???

Diese Rechenregeln sind keine neuen Prinzipien, sondern folgen allesamt aus den Definitionen der genannten Operationen. Sie lassen sich also *beweisen*. Die Beweise sind nicht schwer. Wir führen zwei vor, die vor allem die Explizitheit der mathematischen Argumentation illustrieren sollen:

Beweis für (KV):
Gegeben seien Mengen A und B. Für den Nachweis von (KV) reicht – wegen des Extensionalitätsprinzip, der Nachweis der folgenden Behauptung:
Für beliebige a gilt: (!) $a \in A \cup B$ gdw. $a \in B \cup A$.
Sei also a ein beliebiges Objekt. Um die Behauptung (!) nachzuweisen, brechen wir sie in zwei Teile auf:

“$\Rightarrow$”: Wenn $a \in A \cup B$, bleibt zu zeigen, dass $a \in B \cup A$. Nach der obigen Definition ist: $A \cup B = \{x \mid x \in A \textit{ oder } x \in B\}$. Also ist entweder $a \in A$ oder $a \in B$. In jedem Falle gilt auch insbesondere: $a \in B$ oder $a \in A$, d.h.: $a \in \{x \mid x \in B \textit{ oder } x \in A\} = B \cup A$, was zu zeigen war.

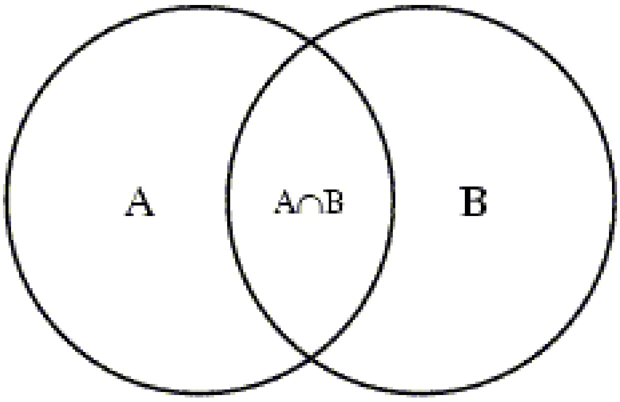
“$\Leftarrow$”: Der Beweis erübrigt sich (“aus Symmetriegründen”, wie man sagt; denn er wird schon von “$\Rightarrow$” abgedeckt! (Warum genau?)

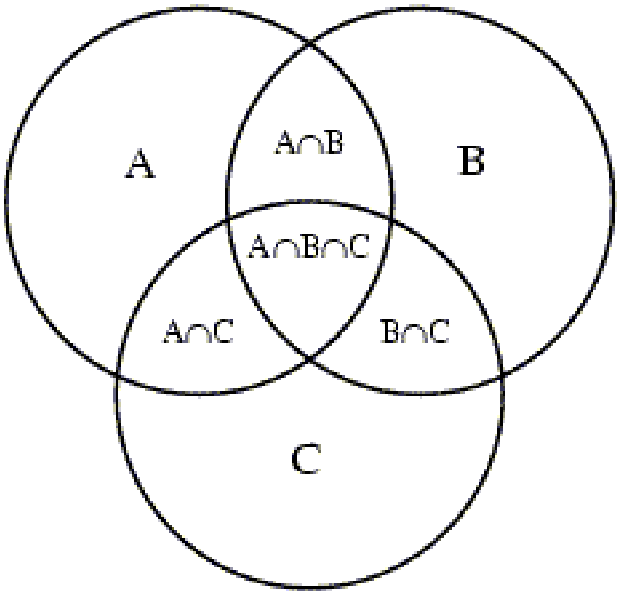
Beweis für (Dis1):

“$\Rightarrow$”: Sei $a \in A \cup (B \cap C)$; es bleibt zu zeigen, dass $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, d.h. (nach der Definition des Schnitts), dass (i) $a \in (A \cup B)$ und dass (ii) $a \in (A \cup C)$. Nach Voraussetzung gilt aber (wegen der Definition der Vereinigung) entweder (a) $a \in A$ oder (b) $a \in (B \cap C)$. Wenn (a) zutrifft, gilt (i) – denn $a \in A$ heißt insbesondere: $a \in A$ oder $a \in B$; und analog gilt auch dann auch (ii). Aber auch wenn (b) zutrifft, gilt (i), denn $a \in B$ heißt auch insbesondere: $a \in A$ oder $a \in B$; und (ii) folgt ebenso.

“$\Leftarrow$”: Es gelte jetzt: $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, d.h. (nach der Definition der Vereinigung), dass (i) $a \in (A \cup B)$ und dass (ii) $a \in (A \cup C)$. Um zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $a \in A \cup (B \cap C)$ gilt, unterscheiden wir zwei Möglichkeiten (I) $a \in A$; oder (II) $a \notin A$. Gilt (I), ist a insbesondere in A oder in $B \cap C$, d.h. $a \in A \cup (B \cap C)$. Gilt dagegen (II), muss a in B sein – denn wegen (i) ist a in A oder in B, aber wir hatten (II) angenommen. Ebenso muss dann wegen (ii) gelten: $a \in C$. Also ist $a \in B \cap C$, und damit insbesondere: $a \in A \cup (B \cap C)$.

Jede der obigen Formeln lässt sich in diesem (etwas umständlichen) Stil beweisen. Wir werden uns damit nicht weiter aufhalten, aber wer an dieser Stelle Verständnisprobleme hat, sollte die beiden Musterbeweise im Detail studieren, den Argumentationsgang nachvollziehen und eine der anderen Formeln selbst beweisen. Die Sachverhalte, die diese Formeln ausdrücken, sind relativ durchsichtig. Sie lassen sich auch graphisch einsehen, und zwar anhand so genannter *Venn-Diagramme*, in denen Mengen als Kreise (oder andere Flächen) dargestellt werden:





Vorsicht: In einem Venn-Diagramm steht jede Region (= Fläche zwischen zwei Begrenzungen) für eine Menge, die allerdings leer sein kann!

1.3 Potenzmengen

Mengen können in verschiedenen Beziehungen zueinander stehen. Betrachten wir dazu ein paar Beispiele:

$$A = \{1,2,3,4\};\ B = \{2,4\};\ C = \{3,4,5\};\ D = \{6,7\}$$

Die letzte Menge, *D*, fällt insofern aus dem Rahmen, als keines ihrer Elemente in einer der drei anderen Mengen zu finden ist; *D* ist von jeder drei anderen Mengen *disjunkt*. Ansonsten *überlappen* sich die Mengen in dem Sinne, dass jeweils zwei von ihnen (mindestens) ein Element gemeinsam haben. *B* hat mit *A* sogar alle seine Elemente gemeinsam; es ist eine *Teilmenge* von *A*:

Definition

Es seien *A* und *B* beliebige Mengen.

A ist disjunkt von B heißt: $A \cap B = \emptyset$.

A überlappt sich mit B heißt: $A \cap \mathrm{B} \neq \emptyset$.

A ist eine Teilmenge von B heißt: jedes Element von *A* ist ein Element von *B*.

(Man überlege sich, dass diese Definition von Disjunktheit und Überlappung dasselbe besagen wie die informellen Charakterisierungen im Absatz davor!)

Statt 'A ist eine Teilmenge von B' schreibt man auch kurz: '$A \subseteq B$'. Die Teilmengenbeziehung ist für die Mengenlehre ebenso wichtig wie die Elementbeziehung, aber man darf die beiden nicht miteinander verwechseln. Sie haben auch vollkommen verschiedene Eigenschaften. Zum Beispiel gelten die folgenden allgemeinen Gesetze nur für die Teilmengenbeziehung:

Satz 2

Es seien A, B und C beliebige Mengen. Dann gilt:

1. $A \subseteq A$.
2. $\emptyset \subseteq A$.
3. Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann ist $A = B$.
4. Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann ist $A \subseteq C$.

Beweis

ad 1.: Jedes Element einer Menge A ist natürlich ein Element von A.

ad 2.: Das mag überraschen. Zu zeigen ist aber nur, dass für jedes x gilt: wenn $x \in \emptyset$, dann ist $x \in A$. Hier argumentiert man am besten *per Kontraposition*, also indirekt, indem man zeigt: wenn $x \notin A$, dann ist. $x \notin \emptyset$. Sei also $x \notin A$. Dann bleibt zu zeigen, dass $x \notin \emptyset$. Aber das ist sowieso klar, denn Ø enthält per definitionem keine Elemente!

ad 3.: Das ist das Extensionlitätsprinzip!

ad 4.: Angenommen,(i) jedes Element von A ist ein Element von B und (ii) jedes Element von B ist ein Element von C. Wir müssen dann für beliebige $x \in A$ zeigen, dass $x \in C$. Aber nach (i) gilt mit $x \in A$ auch: $x \in B$, woraus nach (ii) folgt: $x \in C$, was zu zeigen war.

AUFGABE

Zeigen Sie anhand von Gegenbeispielen, dass die Gesetze 1.–4. für die Element-Beziehung nicht immer gelten. Finden Sie also für jede der Aussagen 1'. – 4'. ein Beispiel, das die Aussage widerlegt. (Für verschiedene Aussagen kann man verschiedene Gegenbeispiele nehmen!)

1.' $A \in A$.

2.' $\emptyset \in A$.

3.' **Wenn** $A \in B$ **und** $B \in A$, **dann ist** $A = B$.

4.' **Wenn** $A \in B$ **und** $B \in C$, **dann ist** $A \in C$.

Lassen sich für 1.'–4.' auch (positive) Beispiele finden?

Das allgemeine Gesetz 1. zeigt, dass man mit dem Teilmengenbegriff vorsichtig umgehen muss: im Gegensatz zum alltäglichen Sprachgebrauch ist in der Mengenlehre jede Menge Teil von sich selbst. Die Aussage, dass $A \subseteq B$ schließt also im allgemeinen nicht aus, dass $A = B$. Will man dagegen zum Ausdruck bringen, dass jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B ist, aber nicht umgekehrt, muss man einen anderen Begriff als den der Teilmenge wählen:

Definition

A ist eine echte Teilmenge von B – symbolisch: $A \subsetneqq B$ – heißt: $B \neq A \subseteq B$.

Wir haben hier die Beziehungen 'durchgeschrieben': $B \neq A \subseteq B$ ist zu verstehen im Sinne der doppelten Bedingung: $B \neq A$ und $A \subseteq B$.

Die Teilmengen einer Menge A erfüllen alle die Bedingung *so ein x zu sein, dass gilt:* $x \subseteq A$. Nach dem Komprehensionsprinzip lassen sich also wieder zu einer Menge zusammenfassen:

Definition

Sei A eine beliebige Menge. Die *Potenzmenge* von A – symbolisch: $\wp(A)$ – ist die Menge $\{x \mid x \subseteq A\}$.

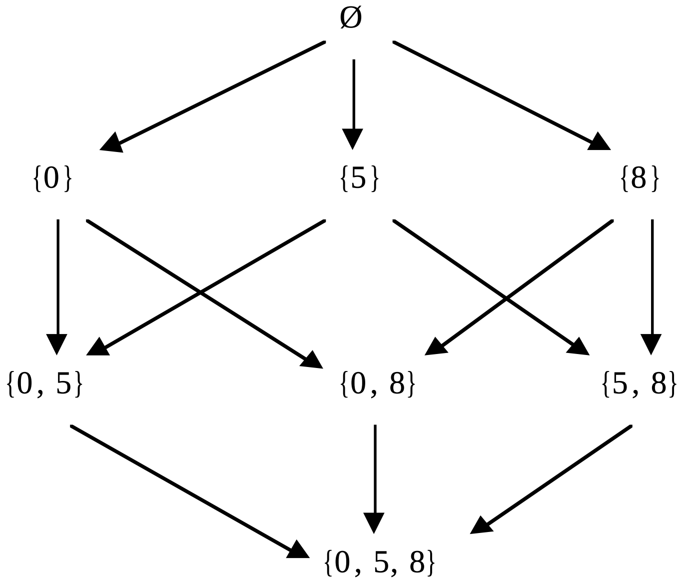
Wie sieht die Potenzmenge einer Menge A im allgemeinen aus? Zunächst enthält sie für jedes Element $x \in A$ auch dessen Einermenge $\{x\}$ und außerdem noch – nach Punkt 2. von Satz 2 – die leere Menge . $\wp(A)$ enthält also mindestens ein Element mehr als A; wir werden noch sehen, dass $\wp(A)$ im allgemeinen sehr viel größer ist als A. Anhand eines konkreten Beispiels lässt sich das aber schon jetzt erahnen. Die Teilmengen der drei-elementigen Menge {0,5,8} etwa sind – geordnet nach ihrer Größe:

0 Elemente	Ø	1
1 Element	{0}, {5}, {8}	3
2 Elemente	{0,5}, {0,8}, {5,8}	3
3 Elemente	{0,5,8}	1

(Die rechte Spalte gibt die Anzahl der Mengen in der mittleren Spalte an.) Insgesamt handelt es sich also um 8 Teilmengen, d.h. $\wp(\{0,5,8\})$ enhält 8 Elemente:

$$\wp(\{0,5,8\}) = \{\ \emptyset, \{0\}, \{5\}, \{8\}, \{0,5\}, \{0,8\}, \{5,8\}, \{0,5,8\}\ \}$$

Die Teilmengen einer Menge A – also die Elemente von $\wp(A)$ – können untereinander wieder in der Teilmengenbeziehung stehen. Wie man an der obigen Tabelle leicht nachprüft, ist jede Menge in den oberen drei Reihen Teilmenge mindestens einer Menge in der Reihe unter ihr. Die folgende Graphik veranschaulicht sämtliche Teilmengen-beziehungen in $\wp(\{0,5,8\})$:



Die Graphik erklärt sich praktisch von selbst: $A \subseteq B$ gilt gerade, wenn es eine (direkte oder indirekte) Pfeilverbindung gibt, die bei A anfängt und mit B aufhört.

Ein genauerer Blick auf die Graphik zeigt, dass sich die Vereinigung zweier Teilmengen von {0, 5, 8} immer an der Stelle befindet, die von den beiden Mengen aus mit der geringsten Anzahl von Pfeilen erreichbar ist; das gleiche gilt für den Schnitt – nur dass man in dem Fall die Pfeile *rückwärts* verfolgen muss. Die graphischen Darstellung der Potenzmenge von {0, 5, 8} birgt also mehr Struktur, als man auf den ersten Blick sieht. Jede Potenzmenge lässt sich im Prinzip mit einem solchen Pfeildiagramm darstellen, das oben bei der leeren Menge beginnt, zur Mitte hin breiter wird, dann wieder abnimmt und schließlich bei der Gesamtmenge endet. Es ist oft zweckmäßig, sich diese Zwiebelstruktur vor Augen (!) zu halten, wenn von einer Potenzmenge die Rede ist.

Die im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Mengenoperationen lassen sich immer innerhalb einer Potenzmenge durchführen: der Schnitt, die Vereinigung und die Differenz zweier Teilmengen einer Menge U sind stets auch wieder in $\wp(U)$. (WARUM???) Für das Rechnen mit Mengenoperationen *innerhalb einer Potenzmenge* gelten – neben den in Satz 1 aufgelisteten – einige spezielle Rechenregeln, die auf die Gesamtmenge U Bezug nehmen:

<u>Satz 3</u>
Es sei U eine beliebige Menge. Dann gilt für alle Teilmengen A und B von U:
- $\overline{\emptyset} = U$
- $\overline{U} = \emptyset$

(N)	$A \cap U = A$	Neutralität von U
($\widehat{\text{N}}$)	$A \cup U = U$	
(TND)	$(A \cup \bar{A}) = U$	Tertium non datur
(W)	$(A \cap \bar{A}) = \emptyset$	Satz vom Widerspruch
(DM1)	$\overline{(A \cup B)} = (\bar{A} \cap \bar{B})$	de Morgansches Gesetz
(DM2)	$\overline{(A \cap B)} = (\bar{A} \cup \bar{B})$	de Morgansches Gesetz

Die Überstreichung bezeichnet dabei das so genannte *Komplement*, das ist die Differenz relativ zum 'Universum' U: $\bar{A} = (U \setminus A)$. Diese Notation ist hochgradig kontextabhängig (und deswegen leicht irreführend), denn sie nimmt implizit auf eine vorgegebene Menge U Bezug, ohne sie explzit zu nennen. Man sollte sie also nur verwenden, wenn vorher klar und deutlich gesagt wird, was diese Menge U (das betrachtete 'Universum') genau ist. Ohne eine solche Angabe ist eine Bezeichnung wie '$\overline{\{0,1,5\}}$' nicht eindeutig.

<u>Beweis von (W)</u>

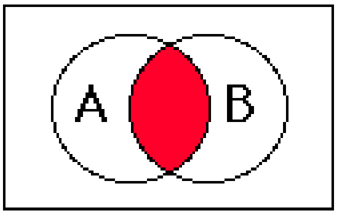
Nach dem Extensionalitätsprinzip genügt es zu zeigen, dass $A \cap \bar{A}$ und Ø dieselben Elemente haben. Da Ø definitionsgemäß keine Elemente hat, muss man zeigen, dass auch $A \cap \bar{A}$ keine Elemente hat. Angenommen aber, $A \cap \bar{A}$ besäße ein Element a. Dann wäre (wegen der Definition des Schnitts) einerseits <u>$a \in A$</u> und andererseits $a \in \bar{A} = U \setminus A$. Aber dann wäre zugleich <u>$a \notin A$</u>. Das kann nicht sein, folgte aber aus der Annahme, dass $A \cap \bar{A}$ besäße ein Element a. $A \cap \bar{A}$ ist also leer, was zu zeigen war.

<u>Beweis von (DM2)</u>

"⇒": Sei $a \in \overline{(A \cap B)}$; es ist zu zeigen, dass $a \in (\bar{A} \cup \bar{B})$, d.h., dass $a \in \bar{A}$ oder $a \in \bar{B}$. Angenommen, $a \notin \bar{A}$ und $a \notin \bar{B}$. Wir zeigen, dass das nicht sein kann. Da $a \notin \bar{A} = U \setminus A$, ist es nicht der Fall, dass (i) $a \in U$ *und* (ii) $a \notin A$; aber (i) ist der Fall, denn $a \in \overline{(A \cap B)} = U \setminus (A \cap B)$, d.h.: $a \in U$, und <u>$a \notin A \cap B$</u>. Wenn also (i) *und* (ii) falsch ist, muss es an (ii) liegen, d.h.: $a \in A$. Ganz analog folgt aus $a \notin \bar{B}$, dass $a \in B$. Dann ist aber $a \in A \cap B$. Das kann nicht sein, denn wir hatten gerade gesehen, dass<u>$a \notin A \cap B$</u>. Unsere Annahme, dass $a \notin \bar{A}$ und $a \notin \bar{B}$, hat also in einen Widerspruch geführt. Also muss entweder gelten: $a \in \bar{A}$ oder aber: $a \in \bar{B}$ (oder beides).

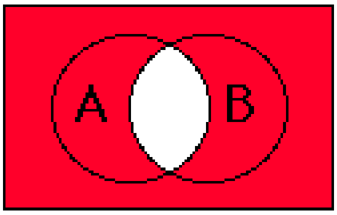
"⇐": Es gelte jetzt: $a \in (\bar{A} \cup \bar{B})$, d.h., $a \in \bar{A}$ oder $a \in \bar{B}$. Aus Symmetriegründen reicht es wieder, die erste Möglichkeit durchzurechnen. Wir müssen zeigen, dass $a \in \overline{(A \cap B)} = U \setminus (A \cap B)$. Dass $a \in U$, ist klar, denn $a \in \bar{A} = U \setminus A$. Es bleibt damit zu zeigen, dass $a \notin A \cap B$. Da aber $a \in \bar{A} = U \setminus A$, gilt insbesondere, dass $a \notin A$. Wäre nun $a \in A \cap B$, dann wäre aber auch $a \notin A$. Also ist $a \notin A \cap B$, was zu zeigen war.

(DM2) lässt sich auch mit Hilfe von Venn-Diagrammen einsehen. Dazu stellen wir das Universum U als Rechteck dar, in dem die Teilmengen A und B liegen. Der Schnitt von A und B sieht dann so aus:



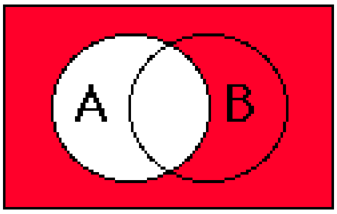
$A \cap B$

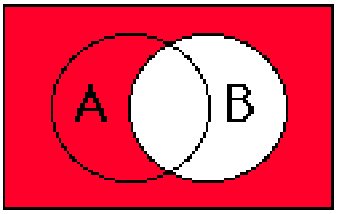
Auf der linken Seite von (DM2) steht das Komplement dieses Schnittes (relativ zu U), also die Menge aller Elemente von U, die *nicht* in diesem Schnitt sind:



$\overline{(A \cap B)}$

Um zu sehen, wie die Menge auf der rechten Seite aussieht, betrachtet man zunächst die beiden Komplemente, aus denen sie gebildet ist, also:





$\bar{A}$ $\bar{B}$

Die Vereinigung dieser beiden Mengen deckt alles ab, was in *einer* von beiden liegt, also die Regionen, die links oder rechts (oder links und rechts) markiert sind – also alles außer der Schnittregion in der Mitte. Und das ist dieselbe Menge wie das oben dargestellte $\overline{(A \cap B)}$.

<u>AUFGABE</u>
Beweisen Sie den Rest von Satz 3. Benutzen Sie für (DM1) Venn-Diagramme.

Wir beenden unsere Betrachtungen zu Potenzmengen mit einem Spezialfall, der leeren Menge. Wie sieht ihre Potenzmenge aus? Was sind die Teilmengen von Ø? Man könnte meinen, gar keine, aber das ist falsch. Denn lt. Satz 1 besitzt jede Menge schon einmal sich selbst als Teilmenge; eine der Teilmengen von Ø ist also Ø selbst. (Ebenso ist Ø Teilmenge jeder Menge, aber das bringt hier nichts Neues.) Hat Ø sonst noch irgendwelche Teilmengen? Es sieht nicht so aus, aber können wir das auch beweisen? Wir können. Wäre $A \subseteq Ø$, aber $A \neq Ø$, dann müsste A ein Element enthalten; denn sonst hätten ja A und Ø dieselben Elemente (Extensionalitätsprinzip!). Wäre aber $a \in A$, dann wäre auch $a \in Ø$ (weil $A \subseteq Ø$) was nicht sein kann, weil Ø keine Elemente hat. Also kann es nicht angehen, dass $A \subseteq Ø$, aber $A \neq Ø$. M.a.W.: Ø ist die einzige Teilmenge von Ø: $\wp(Ø) = \{Ø\}$. Man beachte, dass das nicht heißt, dass die leere Menge gleich ihrer Potenzmenge ist. Denn $\{Ø\}$ ist nicht leer, sondern enthält vielmehr ein Element, nämlich Ø; $\wp(Ø)$ ist also eine Einermenge.

<u>AUFGABE</u>

Wie viele Elemente enthält $\wp(\wp(Ø))$? Welche? Stellen Sie $\wp(\wp(Ø))$ durch ein Pfeildiagramm dar.

2. Relationen

2.1 Tupel

Das Extensionalitätsprinzip besagt, dass es bei einer Menge nur auf die Elemente ankommt. Insbesondere kommt es bei der Listendarstellung einer Menge weder auf die Reihenfolge noch auf die Häufigkeit der Nennung eines Elements an. Manchmal ist es jedoch zweckmäßig, einzelne Objekte auf geordnete Weise zusammenzufassen, so dass gerade Reihenfolge und Häufigkeit eine Rolle spielen.

Das gilt zum Beispiel für die Darstellung einfacher mathematischer Strukturen wie dem kartesischen Koordinatenkreuz. Es liegt nahe, das gesamte Kreuz als Menge aller Punkte (x,y) aufzufassen, wobei x und y reelle Zahlen sind. Aber was ist ein Punkt wie $(-1,+1)$? Man darf ihn jedenfalls nicht mit der Menge $\{-1,+1\}$ identifizieren, denn dann ginge der Unterschied zum spiegelbildlichen Punkt $(+1,-1)$ verloren.

Ein weiteres Beispiel ist die Anordnung der natürlichen Zahlen nach ihrer Größe und die sich daraus ergebende Beziehung *ist größer als*, symbolisch: '>'. Diese Beziehung besteht immer zwischen zwei Zahlen. Lässt sich diese Beziehung mengentheoretisch darstellen? Man könnte es mit der Menge aller Mengen $\{n,m\}$ versuchen, so dass $n < m$, aber wie wollte man dann die Größer-Beziehung – symbolisch '>' – modellieren?

Neben Mengen muss es also noch strukturierte Zusammenfassungen von Objekten geben. Solche strukturierten Zusammenfassungen heißen in der Mengenlehre *Tupel*. Wenn n eine natürliche Zahl ist (0, 1, 2,…) hat ein *n-Tupel* die Gestalt $(a_1,\ldots,a_n)$. Dabei sind $a_1,\ldots,a_n$ irgendwelche Objekte. Statt des Extensionalitätsprinzips, das die Identität zwischen Mengen erklärt, gilt für Tupel die folgende Festlegung:

Identitätskriterium für Tupel

Es sei n eine natürliche Zahl, $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$ seien irgendwelche Objekte. Dann gilt: $(a_1,\ldots,a_n) = (b_1,\ldots,b_n)$ gdw. $a_1 = b_1$ und … und $a_n= a_n$.

Mit den Tupeln haben wir scheinbar das Begriffsinventar der Mengenlehre – *Menge* und *Element* – erweitert, aber nur scheinbar. Denn im Prinzip lassen sich Tupel aus Mengen fabrizieren – mit der sog. *Kuratowski-Paar*-Konstruktion (auf die wir im Vertiefungskurs im nächsten Semester zu sprechen kommen). Wir verzichten hier aus Zeitgründen auf diese Möglichkeit und tun stattdessen so, als handele es sich beim *Tupel* um einen weiteren Grundbegriff.

Um das Kriterium und den Tupelbegriff wirklich auf *alle* natürlichen Zahlen anzuwenden, müssen wir noch festlegen, was 0-Tupel sind. Da für $n = 0$ die Liste der $a_1,\ldots,a_n$ keinen Eintrag hat, hat das einzige 0-Tupel die Gestalt: (). Wir werden dieses leere Klammerpaar mit der leeren Menge identifizieren: $() = \emptyset$. 1-Tupel haben dagegen die Gestalt (a), wobei a jeweils irgendein Objekt ist. Es würde nichts ausmachen, wenn wir *in diesem Fall* die runden Klammern als Mengenklammern auffassen; praktischer ist es aber (für diverse Zwecke), wenn man die Klammern im Falle von 1-Tupeln 'überliest' und für beliebige Objekte a festlegt: $(a) = a$. Man beachte, dass daraus unmittelbar folgt: $((a)) = (a) = a$.

Man beachte, dass ein Tupel immer endlich lang ist. Z.B. lassen sich nicht alle natürlichen Zahlen in einem Tupel unterbringen. Um unendlich viele Objekte aufzureihen, benötigt man den in Teil 3. eingführten Begriff der *Folge*.

Nach dem obigen Identitätskriterium gilt z.B.: $(1,1,0) \neq (0,1,1)$, denn die beiden 3-Tupel unterscheiden sich z.B. im ersten Glied. Andererseits sind $(1+1,2)$ und $(2,1+1)$ dasselbe 2-Tupel; denn bekanntlich ist $1 + 1 = 2$. Apropos 2-Tupel und 3-Tupel: in der Mengenlehre bezeichnet man diese auch gern als (geordnete) *Paare* bzw. *Tripel*. 4-Tupel heißen entsprechend *Quadrupel*, 5-Tupel *Quintupel* etc.; aber so lange Tupel werden wir ohnehin nur selten betrachten.

Wie das n-Tupel $(a_1,\ldots,a_n)$ von der Menge $\{a_1,\ldots,a_n\}$ zu unterscheiden ist, ist auch die Beziehung eines einzelnen a_i zur Menge $\{a_1,\ldots,a_n\}$ von der zwischen a_i und dem Tupel $(a_1,\ldots,a_n)$ zu unterscheiden. Erstere ist die Elementbeziehung; letztere werden wir als *Komponenten*-Beziehung bezeichnen: a_i ist die i-te Komponente des n-Tupels $(a_1,\ldots,a_n)$. Es gilt also: die zweite Komponente des Paares $(+1,–1)$ ist die Zahl $–1$, das Tripel $(0,0,0)$ hat drei gleiche Komponenten etc.

Aus Tupeln lassen sich wieder Mengen bilden. Zum Beispiel kann man alle Paare (x,y) von Elementen einer Menge A zu einer neuen Menge A^2 zusammenfassen:

$$A^2 = \{(x,y) \mid x\in A \text{ und } y\in A\}.$$

Die Notation ist dabei so zu verstehen, dass man hier die Bedingung betrachtet, *so ein Paar der Gestalt (x,y) zu sein, dass gilt: $x\in A$ und $y\in A$.*

Wenn A die Menge der reellen Zahlen ist, ist A^2 gerade die Menge der Punkte des schon erwähnten Koordinatenkreuzes. Wegen dieses Zusammenhangs bezeichnet man im allgemeinen (d.h. für beliebige A) die Menge A^2 als das *kartesische Produkt von A (mit sich selbst)*. Hier ist eine noch allgemeinere:

<u>Definition</u>

Es sei n eine natürliche Zahl, $A_1,\ldots,A_n$ seien irgendwelche Mengen. Dann ist das *n-stellige kartesische Produkt von $A_1,\ldots,A_n$* wie folgt definiert:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1 \in A_1 \text{ und } \ldots\ x_n\in A_n\}.$$

Für den Fall, dass $A_1 = \ldots = A_n = B$ schreibt man statt '$A_1 \times \ldots \times A_n$' auch '$B^n$'.

Wir werden es im folgenden vor allem mit dem Fall $n = 2$ und $A_1 = A_2$ zu tun haben, gelegentlich aber auf die allgemeinere Definition zurückgreifen.

Geordnete Paare lassen sich nun auch verwenden, um Beziehungen durch Mengen zu modellieren. Mengentheoretisch gesprochen ist die Kleiner-Bezienhung zwischen natürlichen Zahlen die Menge

$R_< = \{(n,m) \mid n \text{ und } m \text{ sind natürliche Zahlen und } n < m\}$.

AUFGABE

Geben Sie die mengentheoretische Entsprechung $R_>$ der Größer-Beziehung zwischen natürlichen Zahlen an und zeigen Sie, dass $R_<$ und $R_>$ disjunkt sind.

Jedes Element (n,m) der Menge $R_<$ ist ein Paar, dessen Komponenten Elemente der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen sind. $R_<$ ist also ein eine Teilmge von $\mathbb{N}^2$ oder, wie man in der Mengenlehre sagt, eine *zweistellige Relation über* $\mathbb{N}$. Hier ist die allgemeine:

Definition

Es sei A eine Menge und n eine natürliche Zahl. Eine *n-stellige Relation (über A)* ist eine Teilmenge von A^n.

Wenn R eine zweistellige Relation ist, schreibt man auch '$x\ R\ y$' statt '$(x,y) \in R$' und '$x\ R\ y\ R\ z$' statt '$(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$'. Die Menge der Objekte, zwischen denen R besteht, heißt der *Bereich von R*; der Bereich besteht also aus allen $x \in A$, die zu irgendeinem $y \in A$ in der Beziehung R stehen und aus allen $y \in A$, zu denen irgendein $x \in A$ in der Beziehung R steht. A ist also eine Teilmenge des Bereichs von R; aber A kann durchaus mehr Elemente enthalten.

2.2 Die Klassifikation zweistelliger Relationen

Relationen – und vor allem zweistellige – spielen in allen Anwendungen der Mengenlehre eine zentrale Rolle. Es ist üblich, sie ihrer Struktur nach zu klassifizieren. Schauen wir uns dazu erst ein paar Beispiele an:

$R_\alpha = \{(x,y) \mid y \text{ folgt unmittelbar auf } x \text{ im lateinischen Alphabet}\}$.
$R_\leq = \{(n,m) \mid n \text{ und } m \text{ sind natürliche Zahlen und } n \leq m\}$.
$R_N = \{(n,m) \mid n \text{ und } m \text{ sind natürliche Zahlen und } m = n+1\}$.
$R_A = \{(A,B) \mid A \text{ und } B \text{ sind Personen und } A \text{ ist (an Jahren) jünger als } B\}$.
$R_P = \{(M,N) \mid M \subseteq \{0,5,8\}, N \subseteq \{0,5,8\}, \text{ und } M \subseteq N\}$.
$R_V = \{(A,B) \mid A \text{ und } B \text{ sind Personen mit demselben Vornamen}\}$.

In der Definition von R_α werden '*x*' und '*y*' natürlich als Variablen für Buchstaben benutzt. Die Relation lässt sich graphisch sehr einfach durch Pfeile darstellen:

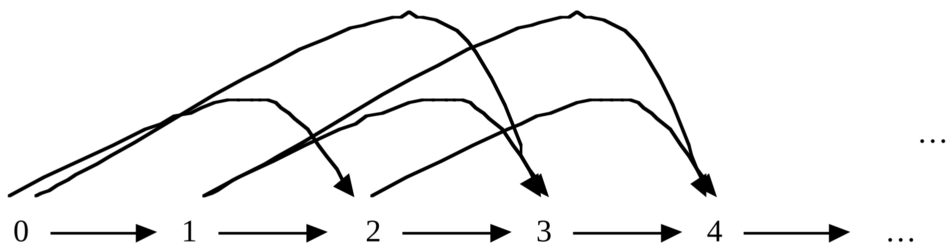
A $\longrightarrow$ **B** $\longrightarrow$ **C** $\longrightarrow$ … $\longrightarrow$ **X** $\longrightarrow$ **Y** $\longrightarrow$ **Z**

Hier besagt ein Pfeil von einem Buchstaben *x* zum nächsten (*y*), dass *y* der alphabetische Nachfolger von *x* ist, dass also gilt: $x\ R_\alpha\ y$. Man beachte, dass in dieser Darstellung von R_α die Relation wirklich nur dort besteht, wo auch ein Pfeil eingezeichnet ist.

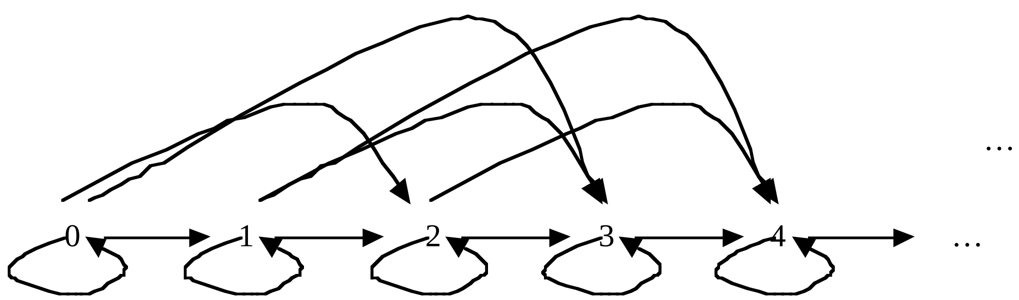
Man kann sich jede Relation über einer Menge *A* als ein Geflecht von Pfeilen vorstellen, die immer dann Elemente *x* und *y* von *A* verbinden, wenn $x\ R\ y$. Allerdings kann man im Falle einer unendlich großen Relation das entsprechende Diagramm nur ausschnittsweise zu Papier bringen. Das gilt z.B. für $R_\leq$. Man könnte zunächst meinen, dass die Pfeile ähnlich wie bei $R_\leq$ verlaufen, nur unenendlich lange, also etwa so:

0 $\longrightarrow$ 1 $\longrightarrow$ 2 $\longrightarrow$ 3 $\longrightarrow$ 4 $\longrightarrow$ …

Doch halt! Hier haben wir den einen oder anderen Pfeil vergessen. In dieser Darstellung stehen die Pfeile immer nur zwischen einer Zahl und ihrem Nachfolger. Die dargestellte Relation ist also R_N und nicht $R_\leq$! Aber $R_\leq$ besteht z.B. auch zwischen 0 und 2, 1 und 4 usw. – also müssen wir auch zwischen diese Zahlen Pfeilverbindungen einbauen:



Aber auch das genügt nicht. Denn die so dargestellte Relation ist $R_\leq$ – die sich sich ja von $R_<$ dadurch unterscheidet, dass jede Zahl zu sich selbst in dieser Relation steht, dass also stets gilt: $n\ R_\leq\ n$ (aber nicht $n\ R_<\ n$). Wir müssen die Zeichnung also noch um 'Selbstverweise' ergänzen:



Sowohl die oberen als auch die unteren Pfeile in dieser Darstellung sind in gewisser Weise vorhersagbar:

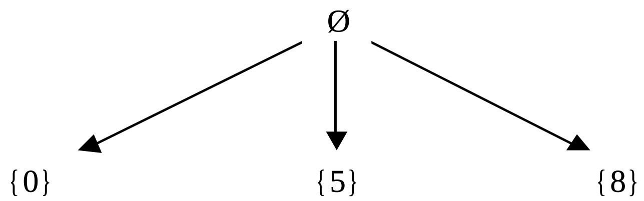
- Die unteren Pfeile ergeben sich , weil *jedes Element* von $\mathbb{N}$ zu sich in der Relation $R_\leq$ steht. Die Relation $R_\leq$ is – im Gegensatz zu R_α, $R_<$ und R_N – *reflexiv*.
- Die unteren Pfeile ergeben sich aus den mittleren Pfeilen, wenn man voraussetzt, dass jede indirekten Pfeil-Verbindung – also jeder Verbindung über eine Zwischenstation – durch eine direkte Verbindung abgekürzt werden kann: wenn man von n über m zu k kommt (d.h. $n \leq m \leq k$), dann kommt man auch direkt von n zu k (d.h. $n \leq k$). Die Relation $R_\leq$ ist *transitiv*, eine Eigenschaft, die sie mit R_α, $R_<$ und R_N teilt.

Reflexivität und Transitivität sind *strukturelle Eigenschaften* zweistelliger Relationen, also Eigenschaften, die sich ausschließlich aus der Konstellation der Pfeile ergeben (im Gegensatz z.B. zu der Eigenschaft, nur zwischen Zahlen zu bestehen). Zweistellige Relationen lassen sich nach ihren strukturellen Eigenschaften klassifizieren. Bevor wir das für unsere Beispiele tun, müssen wir noch weitere solche Eigenschaften kennenlernen.

Wenn man also voraussetzt, dass die Relation R reflexiv und transitiv ist, dann versteht sich die (vollständige) Darstellung von R_N als (unvollständige) Darstellung von $R_\leq$. (Auf dieses spezielle Verhältinis zwischen R_N und $R_\leq$ kommen wir in Abschnitt 2.4 zurück.)

Eine ähnliche Voraussetzung hatten wir bei dem Pfeildiagramm auf S. 12 gemacht, das man als verkürzte Darstellung der folgenden Relation R_P verstehen kann. Wie man sich leicht überlegt, ist R_P transitiv und reflexiv; auch hier musste man sich die aus der Reflexivität und Transitivität von R_P ergebenden Pfeile dazudenken.

R_P hat eine Eigenschaft, die sie mit R_N teilt, die aber keine der anderen bisher betrachteten Relationen hat. Ein Blick auf den oberen Teil des Diagramms zeigt dies:



Ø steht in der Teilmengenbeziehung zu allen drei Einermengen, aber natürlich ist keine Teilmenge der anderen. Es gilt also insbesondere weder $\{5\} \subseteq \{8\}$ noch $\{8\} \subseteq \{5\}$. Diese Situation kann bei den anderen Relationen nicht vorkommen. Im Gegensatz zu R_P sind sie *konnex*: je zwei Elemente ihres Bereichs sind immer durch einen Pfeil verbunden.

Auch R_N ist reflexiv, transitiv und nicht konnex. Dennoch würde eine Pfeil-Diagramm ganz anders aussehen. (Auf die graphische Darstellung von Relationen wie R_N kommen wir in Abschnitt 2.3 zu sprechen.) Das liegt daran, dass R_N im Gegensatz zu den anderen hier betrachteten Relationen *symmetrisch* ist: wenn *A* so heißt wie *B*, dann heißt *B* so wie *A*. Die anderen Relationen waren allesamt *antisymetrisch*: man kann sie nur in dem Fall umkehren, indem sie zwischen einem Objekt und sich selbst bestehen.

Hier sind die allgemeinen Definitionen für die genannten strukturellen Eigenschaften zweistelliger Relationen:

Definitionen

Sei *A* eine beliebige Menge und *R* eine zweistellige Relation über *A*.
R ist *reflexiv* gdw. für jedes *x* in *R*s Bereich gilt: *x R x*.
R ist *transitiv* gdw. für alle *x*, *y* und *z* gilt: wenn *x R y* und *y R z*, so *x R z*.
R ist *konnex* gdw. für alle *x* und *y* in *R*s Bereich gilt: *x R y* oder *y R x* (oder beides).
R ist *symmetrisch* gdw. für alle *x* und *y* gilt: wenn *x R y* , dann *y R x* .
R ist *antisymmetrisch* gdw. für alle *x* und *y* gilt: wenn *x R y* und *y R x*, dann ist *x* = *y*.

AUFGABE
a) Zeigen Sie, dass R_P reflexiv und transitiv ist.
b) Finden Sie eine Relation, die weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist.

2.3 Äquivalenzrelationen und Partitionen

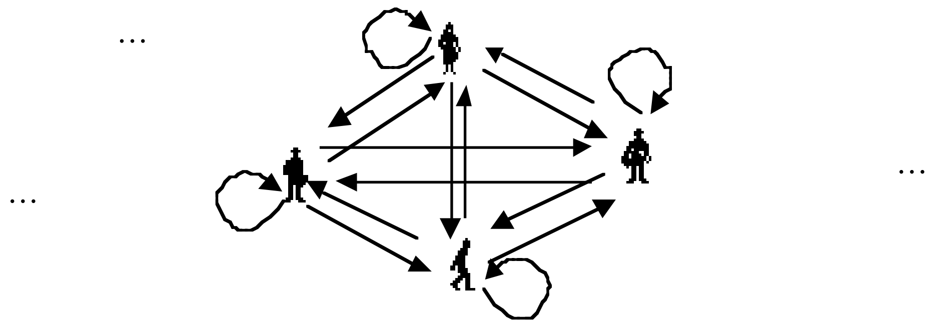
Die Relation R_N ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Für diese spezielle Kombination von Eigenschaften gibt es einen Namen:

Definition

Eine Relation *R* über einer Menge *A* ist eine *Äquivalenzrelation* [*über A*] gdw. *R* reflexiv, transitiv und symmtetrisch ist [und *A* der Bereich von *R* ist].

Weitere Beispiele für Äquivalenzrelationen sind:
$Id_A = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in A,\ und\ x = y\}$. Identität über einer Menge *A*
$R_B = \{(A,B) \mid A\ hat\ dieselben\ Bücher\ gelesen\ wie\ B\}$.

Äquivalenzrelationen lassen sich auf verschiedene Weisen darstellen. Eine davon werden wir in diesem Abschnitt kennenlernen, eine weitere im Abschnitt 3. Zunächst einmal schauen wir uns an, wie das Pfeil-Diagramm von R_V aussieht. Der Bereich der Relation ist sehr groß; wir beschränken uns auf einen winzigen Ausschnitt:



Alle vier auf diesem Diagramm eingezeichneten Personen heißen *Eike*. Da jede so heißt wie die andere, führt von jeder ein Pfeil zu jeder anderen. Da jede so heißt wie sie selbst, führt von jeder ein Pfeil zu sich selbst. Wenn wir einmal annehmen, dass niemand anders *Eike* heißt, dann führt von keiner dieser vier Personen ein Pfeil zu irgendeiner anderen Person außerhalb dieser Zeichnung; und keine der vier Personen wird von einem Pfeil von außerhalb erreicht. Die Vier bilden, wie man sagt, eine *Zelle*. Geht man einmal davon aus, dass alle Personen einen Vornamen haben, dann zerlegt offenbar R_V das gesamte Pfeil-Diagramm in lauter einzelne, verschieden große Zellen: eine, in der alle Fritze miteinander verbunden sind, eine mit allen Marias etc.

Intuitiv gesprochen bestehen Äquivalenzrelationen R zwischen Objekten, die etwas gemeinsam haben: den Vornamen, die Identität, die Leseerfahrung etc., also zwischen Objekten die (in einem für R spezifischen Sinn) hinreichend ähnlich (eben *äquivalent*) sind. Dass das so ist, sieht man, wenn man sich Beispiele überlegt. Warum das so ist, werden wir in Abschnitt 3. sehen.

<u>AUFGABE</u>

Sei

$$R_G = \{(A,B) \mid A \text{ und } B \text{ sind Personen mit demselben Geburtstag}\}.$$

Zeigen Sie, dass R_G ein Äquivalenzrelation ist. In wie viele Zellen zerlegt sie die Menge der Personen?

Jede Äquivalenzrelation unterteilt ihren Bereich in Zellen, aus denen keine Pfeile herausführen, in die keine Pfeile hineingehen und innerhalb derer alle Objekte miteinander durch Pfeile verbunden sind. Bei R_B bestehen die Zellen aus Personen, die jeweils dieselben Bücher gelesen haben, bei Id_A besteht jede Zelle aus einem Element von A usw. Man nennt diese Zellen die *Äquivalenzklassen von R* und schreibt

$$|x|_R$$

für die Äquivalenzklasse, in der ein gegebenes Element x zu finden ist, also $\{y \mid x\, R\, y\}$. Man kann zeigen, dass nicht nur jede Äquivalenzrelation ihren Bereich in Zellen zerlegt ('partitioniert', wie man auch sagt), sondern dass auch umgekehrt zu jeder beliebigen Zerlegung einer Menge eine entsprechende Äquivalenzrelation passt. Als Vorbereitung dafür dient dieser kleine:

Hilfssatz

Für beliebige Äquivalenzrelationen R über einer Menge A gilt: $x\ R\ y$ gdw. $|x|_R = |y|_R$.

Beweis:
Wenn ("⇒") xRy, dann gilt wegen der Symmetrie von R auch yRx. Wenn also $z \in |x|_R$, dann haben wir: $yRxRz$ und somit: yRz wegen der Transitivität von R. Also ist $z \in |y|_R$. Damit gilt $|x|_R \subseteq |y|_R$ und (mit vertauschten Rollen von x und y) auch das Gegenteil. – Wenn ("⇐") $|x|_R = |y|_R$, gilt zunächst wegen der Reflexivität von R: $y \in |y|_R$, d.h. also auch: $y \in |x|_R$ und deshalb: xRy.

Um nun den angesprochenen Zusammenhang aufzuzeigen, müssen wir ihn überhaupt erst einmal genau formulieren. Dazu dient die folgende:

Definition

Eine *Partition* einer Menge A ist eine A 'abdeckende' Menge Π von nicht-leeren, paarweise disjunkten Teilmengen von A, d.h.:

$$\Pi \subseteq \wp(A) \setminus \{\emptyset\},$$

$$\bigcup \Pi = A, \text{ und:}$$

$$X \cap Y = \emptyset, \text{ sobald } X, Y \text{ und } X \neq Y.$$

Die Menge $\bigcup\Pi$ ist dabei die *große Vereinigung über* Π, also die Menge aller Objekte, die in einem Element von Π auftauchen:

$$\bigcup \Pi = \{x \mid \text{es gibt ein } X \in \Pi \text{, so dass gilt: } x \in X\}$$

Wenn also (wie bei R_N) Π aus lauter Zellen besteht, in denen gleichnamige Personen sitzen, dann ist die Menge Π aller Personen, die überhaupt in irgendeiner dieser Zellen sitzen, also (nach unserer Annahme) die Menge aller Personen überhaupt.

Man bezeichnet die Menge der Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation R über einer Menge A – also: $\{X \in \wp(A) \mid X = |x|_R$, für ein $x \in A\}$ – als die *von R induzierte Partition* Π_R.

Satz 4a

Π_R heißt nicht nur so, Π_R *ist* auch eine Partition (wenn R eine Äquivalenzrelation über einer Menge A ist).

Beweis:
Man muß zeigen, daß (i) Π_R nicht die leere Menge (als Element) enhält, (ii) daß jedes $x\in A$ in einer Abteilung von Π liegt und daß (iii) zwei verschiedene Elemente von Π_R stets disjunkt sind. (i) folgt aus der Reflexivität von R: xRx gilt immer (für $x\in$ A) und impliziert $x\in |x|_R \neq \emptyset$. (ii) gilt ebenfalls wegen der Reflexivität von R: da xRx für alle $x\in A$ gilt, ist auch $x \in |x|_R \in \Pi_R$ für alle $x\in A$. Für (iii) argumentieren wir indirekt und nutzen dabei den obigen Hilfssatz aus: wäre $|x|_R \cap |y|_R \neq \emptyset$ und $|x|_R \neq |y|_R$, müßte irgendein z sowohl in $|x|_R$ als auch in $|y|_R$ liegen. Wir hätten dann also: xRz und yRz. Mit Symmetrie und Transitivität bedeutet dies aber: xRy. Mit dem Hilfssatz folgt dann: $|x|_R = |y|_R$, was der Voraussetzung widerspricht.

Jetzt wissen wir also, dass Äquivalenzrelationen tatsächlich ihre Bereiche zerlegen. Und die Umkehrung gilt auch:

Satz 4b
Jede Partition wird von einer Äquivalenzrelation induziert.

Beweis
Es sei Π eine Partition einer Menge A. Die Idee ist, dass *in der gleichen Zelle sitzen* eine Äquivalenzrelation ist. Wir setzen also:

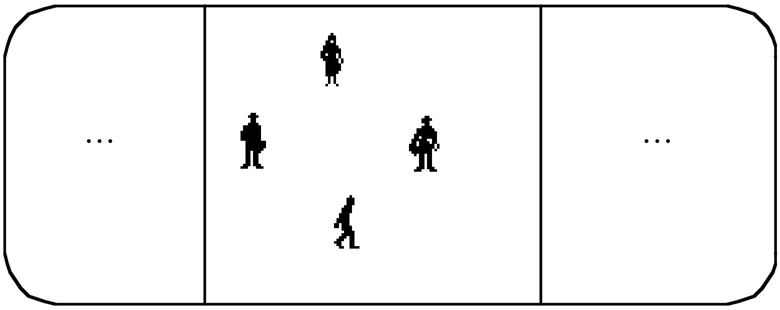
$$R = \{(x,y) \mid \{x,y\} \subseteq X, \text{ für irgendein } X\in\Pi\}$$

und zeigen, daß R (a) eine Äquivalenzrelation ist und (b) Π induziert.

ad (a): *Reflexivität*: wenn $x\in$ A, dann gibt es ein $X\in\Pi$ mit $x\in X$ (weil Π A abdecken muß) und somit gilt: $\{x\} = \{x,x\} \subseteq X \in A$; d.h.: xRx. – *Symmetrie*: wenn xRy, dann ist $\{x,y\} = \{y,x\} \subseteq X \in \Pi$ (für ein X), d.h.: yRx. – *Transitivität*: wenn $xRyRz$, dann gibt es X_1 und X_2, so daß gilt: $\{x,y\} \subseteq X_1 \in \Pi$ und $\{y,z\} \subseteq X_2 \in \Pi$. Aber dann ist $y \in X_1 \cap X_2$, d.h. $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ und somit: $X_1 = X_2$. Aber dann ist $\{x,z\} \subseteq X_1 = X_2 \in \Pi$, d.h.: xRz.

ad (b): Wir müssen zeigen, daß $\Pi = \Pi_R$. Sei also ("$\Rightarrow$") $X\in\Pi$. Dann gibt es ein $x \in X$ (denn $X \neq \emptyset$). Aber $X = |x|_R$: für beliebige $y\in A$ ist $y\in X$ gdw. $\{x,y\} \subseteq X$ (denn $x\in X$) gdw. xRy. Also ist $X \in \Pi_R$. – Sei umgekehrt ("$\Leftarrow$") $|x|_R$ eine R-Äquivalenzklasse, d.h.: $|x|_R = \{y| \, xRy\} = \{y| \, \{x,y\} \subseteq X$, für ein $X\in\Pi\}$.
Da Π eine Partition ist, gibt es genau ein $X\in\Pi$, so dass $x \in X$, sagen wir: X_0. Also ist $|x|_R = \{y| \, \{x,y\}\subseteq X_0\} = X_0$.

Es gibt also einen (wie man in der Mathematik sagt) 'ein-eindeutigen' Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionen: jeder Äquivalenzrelation entspricht genau eine Partition und umgekehrt. Um eine Äquivalenzrelation graphisch darzustellen, stellt man daher für gewöhnlich die entsprechende Partition dar; denn das geht im allgemeinen sehr viel leichter und übersichtlicher als eine Darstellung per Pfeildiagramm. Statt der vielen Pfeile auf S. 20 oben tun es auch zwei einfache Linien zur Abgrenzung der Zelle der Eikes:



Wegen der engen Verwandtschaft zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionen ist es üblich, erstere mit letzteren zu 'identifizieren', was bedeutet, dass man in der Praxis nicht immer ausdrücklich zwischen ihnen unterscheidet. So kann man z.B. sagen, dass zwei Ojekte äquivalent im Sinne einer gegebenen Partition sind, dass sie in derselben Zelle der Äquivalenzrelation sitzen etc. Diese Art der 'Identifikation' strenggenommen verschiedener mengentheoretischer Objekte werden wir noch öfter kennenlernen. Insbesondere werden wir in Abschnitt 3. eine weitere Art von Objekt kennenlernen, die wir mit Äquivalenzrelationen (und Partitionen) idenfizieren können. Auf diese Weise wird dann auch klar, warum eine Äquivalenzrelation immer nur zwischen Objekten zu bestehen scheinen, die etwas gemeinsam haben.

AUFGABE

Eine zweistellige Relation *R* über einer Menge *A* ist *euklidisch*, falls für *x*, *y* und *z* gilt: Wenn *xRy* und *xRz*, dann ist auch *yRz*. Zeigen Sie:

(i) Jede Äquivalenzrelation ist euklidisch.

(ii) Jede reflexive euklidische Relation ist eine Äquivalenzrelation.

(iii) Nicht jede euklidische Relation ist transitiv.

2.4 Abschlüsse von Relationen

Wir hatten gesehen, dass man bei einem Pfeildiagramm gelegentlich Pfeile weglassen kann, wenn sie sich aus allgemeinen Eigenschaften der Relation ergeben.

Wenn man weiß, dass die dargestellte Relation reflexiv ist, verstehen sich die Selbstverweise von selbst; wenn man weiß, dass sie transitiv ist, braucht man keine indirekten Verbindungen. Ebenso überlegt man sich leicht, dass man zur Darstellung einer symmetrischen Relation die Pfeile durch Verbindungslinien (oder z.B. Doppelpfeile '↔') ersetzen kann. Aber es ist wichtig, dass man beim Weglassen von Pfeilen darauf hinweist, welche von ihnen man sich dazudenken muss; sonst könnte es bei graphischen Darstellungen wie denen weiter oben auf S. 19 zu Verwechslungen zwischen $R_<$ und $R_\leq$bzw. R_N und $R_<$ kommen. Aber wenn eine entsprechende *Verabredung* über das Weglassen von Pfeilen getroffen wird, dann *gelten* z.B. die Pfeildiagramme von R_N und $R_<$ als eindeutige Darstellungen von $R_<$ bzw. $R_\leq$. Denn die Pfeile lassen sich auf eindeutige Weise ergänzen.

Der eindeutigen Ergänzung der Diagramme entspricht eine eindeutige *Erweiterung* der dargestellten Relation. Die Nachfolger-Relation R_N kann man auf genau eine Weise zu einer transitiven Relation erweitern, nämlich die Kleiner-Relation $R_<$, die sich wiederum auf eindeutige Weise zu einer reflexiven Relation $R_\leq$erweitern lässt. Genauer gesagt, gibt es jeweils genau eine Möglichkeit, die Relation so zu erweitern, dass das Ergebnis einerseits die erwünschte Eigenschaft (Transitivität oder Reflexivität, …) hat und andererseits keine überflüssigen Pfeile eingefügt wurden (aber natürlich auch keine weggenommen wurden, aber das soll gerade duch den Begriff der Erweiterung zum Ausdruck gebracht werden). Die jeweiligen Erweiterungen sind also in einem naheliegenden Sinne *minmal*. Minimale Erweiterungen einer Relation in diesem Sinne bezeichnet man der Mengenlehre als *Abschlüsse* der betreffenden Relation *bezüglich* der erwünschten Eigenschaft: $R_<$ ist der *transitive Abschluss* von R_N, $R_\leq$ ist der *reflexive Abschluss* von $R_<$ usw. In diesem Abschnitt werden wir diese Begriffe zunächst präzisieren und dann zeigen, wie man die einzelnen Abschlüsse aus einer beliebig vorgegebenen Relation konstruieren kann.

Der hier benutzte Begriff der Erweiterung ist sehr einfach: die Relation $R_<$ erweitert R_N in dem Sinne, dass beim Übergang von R_N zu $R_<$ alle R_N-Pfeile erhalten bleiben. Im allgemeinen ist eine (zweistellige) Relation R^* eine *Erweiterung* einer (zweistelligen) Relation R, falls gilt: $R \subseteq R^*$. Und dass R^* eine transitive, symmetrische etc. Erweiterung von R ist heißt natürlich nur, dass R^* transitiv, symmetrisch etc. und zugleich eine Erweiterung von R ist. Aber dieser Begriff reicht nicht aus, um R^* im allgemeinen eindeutig zu charakerisieren: das kartesische Produkt $\mathbb{N}^2$ über der Menge aller natürlichen Zahlen ist z.B. (wie man sich leicht überlegt) eine transitive Erweiterung von R_N.

Wir brauchen also noch einen Begriff von *Minimalität*. Wir hatten gesagt, dass z.B. $R_\leq$ in dem Sinne eine minimale reflexive Erweiterung von $R_\leq$ ist, das beim Übergang von $R_<$ zu $R_\leq$ keine überflüssigen Pfeile hinzugefügt werden, also nur solche, die auch wirklich für die Reflexivität des Resultats benötigt werden. Hätten wir z.B. außer den Selbstverweisen noch einen Pfeil von 3 nach 2 hinzgefügt, wäre das Resultät zwar eine reflexive Relation gewesen, aber eben keine minimale; und durch Hinzunahme von noch mehr Pfeilen (wie etwa in $\mathbb{N}^2$) hätten wir uns noch weiter von einer minimalen Erweiterung entfernt. Ähnlichhes lässt sich vom Übergang von R_N zu $R_<$ sagen. Auch hier kommen nur die Pfeile hinzu, die man wirklich braucht, um eine transitive Erweiterung von R_N zu erhalten.

<u>AUFGABE</u>

<u>a</u>. Charakterisieren Sie die Menge R_{neu} der beim Übergang von R_N zu $R_<$ neu hinzukommenden Pfeile als Relation zwischen Zahlen:

$$R_{neu} = \{(n,m) \mid ???\}$$

<u>b</u>. Zeigen Sie, dass jeder neue Pfeil, also jedes Paar in R_{neu} wirklich für die Transitivität der Relation benötigt wird. [Tip: Gehen Sie indirekt vor.]

<u>c</u>. Geben Sie eine (vom kartesischen Produkt $\mathbb{N}^2$ verschiedene) transitive Erweiterung von R_{neu} an, die nicht minimal ist.

Das Fazit aus diesen Beobachtungen ist, dass eine minimale Erweiterung mit einer bestimmten Eigenschaft eine solche ist, die weniger Pfeile enthält als alle anderen Erweiterunge mit der entsprechenden Eigenschaft. Weniger Pfeile zu enthalten als eine Relation S heißt für eine Relation R^* , dass $R^* \subseteq S$. Wir gelangen damit zu der folgenden

Definition

R und R^* seien zweistellige Relation über einer Menge M, und E sei eine Eigenschaft zweistelliger Relationen.

- R^* ist eine *minimale Relation* (über M) mit der Eigenschaft E, falls R^* selbst die Eigenschaft E besitzt und für alle Relationen S (über M) gilt: wenn S die Eigenschaft E hat, dann ist S eine Erweiterung von R^* (d.h. $R^* \subseteq S$).
- R^* ist der E-*Abschluss von* R, wenn R^* eine minimale Erweiterung von R mit der Eigenschaft E ist.

Um die Definition besser zu verstehen, kann man den Fall E = Transitivität betrachten. Der transitive Abschluss einer Relation R ist nach der zweiten Definition eine minimale Erweiterung von R, die transitiv ist, also eine minimale transitive Erweiterung von R. Nach dem ersten Teil der Definition heißt das, dass der transititve Abschluss von R selbst eine transitive Erweiterung von R ist und zugleich Teilmenge jeder transitiven Erweiterung von R. R^* ist also transitiv, eine Obermenge von R, und jeder Pfeil von R^* ist auch in jeder anderen transitiven Erweiterung von R^* zu finden.

Man beachte, dass die Definition nur festlegt, unter welchen Umständen eine *gegebene* Relation R^* eine bestimmte andere Relation R abschließt. Damit garantiert sie natürlich weder, dass es ein solches R^* überhaupt gibt noch dass dieses eindeutig bestimmt ist. Lezteres ist allerdings kein echtes Problem: wenn nämlich sowohl $R_0{}^*$ als auch $R_1{}^*$ E-Abschlüsse von R sind, sind beide insbesondere Erweiterungen von R mit der Eigenschaft E. Also gilt nach der obigen Definition insbesondere: $R_1{}^* \subseteq R_0{}^*$, und $R_0{}^* \subseteq R_1{}^*$, d.h. $R_1{}^* = R_0{}^*$. Ob es nun allerdings überhaupt einen E-Abschluss einer Relation gibt, hängt im allgemeinen von E (und der Relation selbst) ab.

AUFGABE

Wann besitzt eine Relation einen antisymmetrischen Abschluss?

Für manche Eigenschaften E gibt es allerdings immer einen entsprechenden Abschluss:

Satz 5a - c

Jede zweistellige Relation R über einer Menge M besitzt (genau) einen

$$\left\{\begin{array}{l}\text{a) reflexiven}\\ \text{b) symmetrischen}\\ \text{c) transitiven}\end{array}\right\}\text{Abschluß}\ .$$

Der Beweis von Satz 5c macht ausgiebig vom sog. *Prinzip der vollständigen Induktion Gebrauch*, nach dem eine Aussage für jede natürliche Zahl gilt, wenn sie für die 0 gilt und sich von jeder Zahl *n* auf ihren Nachfolger *n+1* überträgt:

Für alle Eigenschaften E gilt:
Wenn: E(0) "Induktiosanfang (IA)"
und: E (*n*+1), sobald E(*n*) "Induktionsschritt (IS)"
Dann: E(*n*), für alle natürlichen Zahlen *n*
(Der unterstrichene Teil des IS heißt "Induktionsvoraussetzung".)

Beweisskizze

ad b): Es sei *R* eine zweistellige Relation über einer Menge *M*. Wir konstruieren zunächst die sog. inverse Relation R^{-1}, indem wir die Pfeile in *R* einfach umdrehen:

$$R^{-1} = \{(x,y) \mid yRx\}.$$

Dann zeigen wir, dass $R \cup R^{-1}$ der symmetrische Abschluss von *R* ist: jedes Element von *R* ist auch ein Element von $R \cup R^{-1}$, also ist $R \cup R^{-1}$ eine Erweiterung von *R*. $R \cup R^{-1}$ ist auch symmetrisch: denn wenn $(x,y) \in R \cup R^{-1}$, dann ist entweder $(x,y) \in R$, und deshalb $(y,x) \in R^{-1} \subseteq R \cup R^{-1}$ – oder umgekehrt $(x,y) \in R^{-1}$, und somit $(y,x) \in R \subseteq R \cup R^{-1}$. Und wenn *S* eine symmetrische Erweiterung von *R* ist, dann gilt für jedes Element $(x,y) \in R \cup R^{-1}$: entweder gilt xRy und damit auch xSy, weil *S* eine Erweiterung von *R* ist; oder es gilt $xR^{-1}y$, und somit yRx – aber dann ist auch ySx (aus demselben Grund) und somit: xSy, denn *S* ist symmetrisch.

ad c): Im Falle des transitiven Abschlusses (auch als *transitive Hülle* bekannt) konstruiert man zunächst Relationen $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ die jeweils alle '*R*-Ketten' der Länge $\leq n$ enthalten, d.h. Paare (x_1,x_n), so daß $x_1Rx_2\ldots Rx_n$. R_1 enthält also die direkten Pfeilverbindungen, R_2 die indirekten mit einer Zwischenstation etc. Die genaue Konstruktion macht Gebrauch vom Prinzip der vollständigen Induktion: wir definieren R_1 und sagen dann für eine beliebige Zahl *n*, wie man R_{n+1} aus R_n gewinnt:

$$R_1 = R;$$

$$R_{n+1} = R_n \cup \{(x,z) \mid \text{es gibt ein } y \text{, so dass gilt: } x\ R_n\ y\ R\ z\}.$$

Man überlege sich, dass die Relationen R_n mit wachsendem *n* immer größer werden: wenn $n \leq m$, dann ist $R_n \subseteq R_m$. (Den Beweis, der ebenfalls vom Induktionsprinzip Gebrauch macht, lassen wir weg.)
Jetzt sammeln wir alle diese Verlängerungen von *R* auf:

$$R^* = \{(x,y) \mid \text{es gibt ein } n \text{, so dass gilt: } x\ R_n\ y\}.$$

R^* ist offensichtlich eine Erweiterung von *R*. R^* ist auch transitiv: wenn nämlich xR^*yR^*z, dann muss es irgendwelche *n* und *m* geben, so dass gilt: $x\ R_n\ y\ R_m\ z$. Aber eines der beiden, *k*, ist die größere Zahl oder $i = m = k$. Also gilt für dieses *k* (s.o.): $x\ R_k\ y\ R_k\ z$ – und damit: $x\ R_{k+1}\ z$. Also ist auch xR^*z, denn $R_{k+1} \subseteq R^*$. Damit bleibt zu zeigen, dass R^* minimal ist. Wenn aber *S* eine transitive Erweiterung von *R* ist, dann gilt für jedes *n*, dass $R_n \subseteq S$: $R_0 \subseteq S$ gilt, weil *S* eine Erweiterung von $R = R_0$ ist; und wenn $R_n \subseteq S$, dann folgt $R_{n+1} \subseteq S$ aus der Transitivität von *S*. (WIE?) Da aber aus xR^*y folgt, dass xR_ny *für ein k* gilt und $R_n \subseteq S$ für *jedes n* – also auch für *k* – richtig ist, gilt: $R^* \subseteq S$.

AUFGABE

Beweisen Sie Satz 5a.

3. Funktionen

3.1 Grundlegendes

Der in díesem Abschnitt einzuführende Funktionsbegriff ist ein zentraler Begriff der Mengenlehre und der modernen Mathematik überhaupt. Daher zunächst ein paar motivierende Worte. Eine Funktion ist, intuitiv gesprochen, ein Objekt – z.B. in der Mathematik in der Regel eine Zahl – in Abhängigkeit von irgendetwas – z.B. einer anderem Zahl oder irgendeinem anderen Objekt. Das mathematische Standardbeispiel ist die aus der Schulmathematik bekannte *Quadratfunktion*; ein Beispiel aus dem Alltagsleben ist der Begriff der *Einwohnerzahl*. In beiden Fällen handelt es sich um eine von einem anderen Objekt abhängige Zahl: was x^2 ist, hängt davon ab, welche Zahl x ist, die Einwohnerzahl hängt vom Ort ab. Die Objekte, von denen die Zahl abhängt, bezeichnet man als die *Argumente* der betreffenden Fuktion; die Zahl, die für ein einzelnes Argument herauskommt, ist der *Wert* der Funktion (für dieses Argument). Die Zahl 25 ist demnach der Wert der Quadratfunktion für die Zahl 5 (aber auch für –5), die Argumente der Einwohnerzahl-Funktion sind die Orte, etc. pp. Im allgemeinen sind die Funktionswerte, wie gesagt, nicht immer Zahlen. Zum Beispiel bezeichnet der Begriff *Nationalitätszeichen* eine Funktion, deren Argumente Länder und deren Werte Buchstabenfolgen (‘CH’ für die Schweiz usw.) sind.

Funktionen stellt man sich am besten als Tabellen vor, in deren Spalten die Funktionswerte den Argumenten zugeordnet werden. Die drei genannten Funktionen sehen danach so aus:

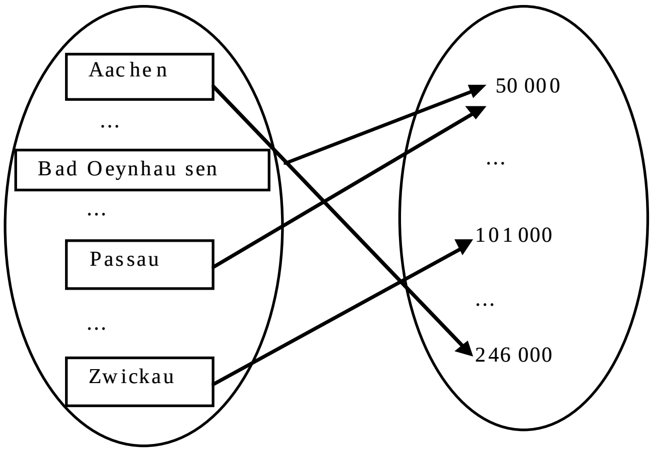
…	…	Aachen	246 000	Afghanistan	AFG
–1	–1	Aalen	66 000	Albanien	AL
0	0	Ahlen	56 000	Algerien	DZ
1	1	…	…	…	…
2	4	Zweibrücken	36 000	Zaire	ZRE
…	…	Zwickau	101 000	Zentralafrikanische Rep.	RCA

Quadratfunktion *Einwohnerzahlfunktion* *Nationalitätszeichenfunktion*

Für die gleich zu liefernde mengentheoretische Präzisierung des allgemeinen Funktionsbegriffs macht man sich am besten einige strukturelle Eigenschaften anhand dieser Beispiele klar. Zunächst einmal ist zu beobachten, dass die Reihenfolge, in der die Argumente in der Funktionstabelle (auch als *Wertetafel* bekannt) offenbar keine Rolle spielt. Wir haben hier konventionelle Reihenfolgen (nach Größe oder Alphabet) gewählt, aber für die Quadratfunktion an sich macht es z.B. keinen Unterschied, in welcher Reihenfolge die Zahlen genannt werden. (Strenggenommen kann man die Tabelle sowieso nicht vollständig hinschreiben, weil es viel zu viele Zahlen gibt, womit sich die Frage der

Reihenfolge erübrigt!) Wichtig ist nun allerdings, dass jedes Argument nur einmal vorkommt. Denn hätte Göttingen z.B. zwei Einträge, wäre die Tabelle entweder redundant (weil dieselbe Einwohnerzahl zweimal erscheint) oder widersprüchlich (weil Göttingen dann zwei Einwohnerzahlen haben müsste).

Neben der Tabellenform gibt es auch die Darstellung einer Funktion durch Pfeile. Üblicherweise gibt man in dem Fall die Menge der Argumente – den *Definitionsbereich* der Fuktion – getrennt von der Menge der Werte – den *Wertebereich* – an, selbst wenn es sich (wie im Falle der Quadratfunktion) um dieselbe Menge handelt. Eine Pfeildarstellung der Einwohnerzahlfunktion sieht z.B. so aus:



Diese Pfeil-Darstellung verdeutlicht die Hauptcharakteristika von Funktionen. Danach jedem Element des Definitionsbereichs ein (und nur ein) Element des Wertebereichs zugeordnet, wobei es zwar vorkommen kann, dass ein Wert – in diesem Falle die Zahl 50 000 – mehr als einmal zugeordnet wird, niemals dagegen ein Argument mehr als einen Wert zuwegiesen bekommt.

Die Pfeildarstellung legt nun nahe, den Funktionsbegriff in ähnlicher Weise wie den der Relation zu präzisieren:

Definition

Eine *Funktion von* einer Menge A *in* eine Menge B ist eine Teilmenge f des kartesischen Produkts $A \times B$, so dass es für jedes $x \in A$ genau ein $y \in B$ gibt, für das gilt: $(x,y) \in f$.

NB: Eine Funktion von A nach B ist immer auch eine zweistellige Relation über $A \cup B$. Alle für Relationen definierten Begriffe und Notationen übertragen sich damit auf Funktionen.

Notationskonventionen

Statt 'f ist eine Fuktion von Anach B' schreibt man kürzer: 'f: $A \rightarrow B$'.

Wenn f: $A \rightarrow B$ und $x \in A$, dann bezeichnet '$f(x)$' dasjenige y, so dass $(x,y) \in f$.

Da Funktionen Mengen sind, gilt für

Wenn also f die Nationalitätszeichenfunktion, S die Menge aller Staaten und F die Menge aller Buchstabenfolgen ist, dann gilt: $f: A \to F$, und f(Liechtenstein) = ‘FL’ (schon gewusst?).

AUFGABE

Zeigen Sie, dass $f: A \to B$ und $f: A' \to B'$ impliziert, dass $A = A'$.
Zeigen Sie, dass $f: A \to B$ und $f: A' \to B'$ nicht impliziert, dass $B = B'$.
Zeigen Sie: Wenn $f: A \to B$, $g: A \to B'$, und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$, dann ist $f = g$.

Wenn $f: A \to B$, ist also A eindeutig bestimmt . B ist dagegen nicht eindeutig bestimmt; aber es gibt immer eine minimale Wertemenge:

Definition

Wenn $f: A \to B$ heißt A der *Definitionsbereich von* f. Notation: $dom(f)$.
Wenn $f: A \to B$ heißt $\{y \in B \mid$ es gibt ein x, so dass $f(x) = y\}$ der *Wertebereich von* f.
Notation: $rge(f)$; $f: A \xrightarrow[\text{auf}]{} B$.

Es gilt also für beliebige Funktionen f: $f: dom(f) \to rge(f)$.

Die Abkürzung ‘$f: A \xrightarrow[\text{auf}]{} B$’ liest man als: ‘$f$ ist eine Funktion von A *auf* B’, was also heißt, dass jedes Element von B mindestens einmal als Wert fungiert. Man sagt in diesem Falle auch, dass die Funktion f *surjektiv auf* B ist. *Jede* Funktion ist demnach surjektiv auf ihren Wertebereich.

3.2 Eigenschaften von Funktionen

Am Beispiel der (gerundeten) Einwohnerzahlen hatten wir gesehen, dass bei einer Funktion die Pfeile zusammenlaufen können. Sie müssen es aber nicht, wie das Beispiel der Autokennzeichen zeigt. Im letzteren Falle spricht man von einer *injektiven* Funktion:

Definition

Eine Funktion f ist *injektiv*, falls es keine voneinander verschiedene Elemente x und x' des Definitionsbereichs von f gibt, so dass gilt: $f(x) = f(y)$.
Notation: $f: A \xrightarrow{1\text{-}1} B'$

Oft findet man die Injektivitätsbedingung positiv ausgedrückt: $f(x) = f(x')$ impliziert $x = x'$.

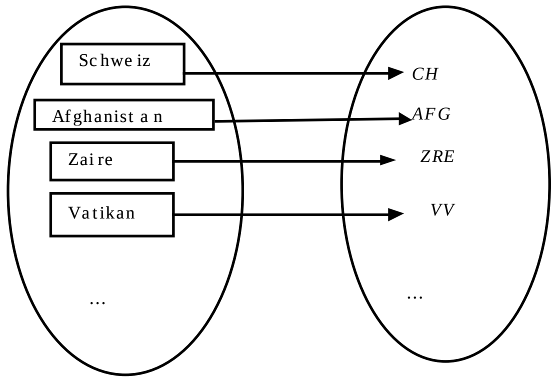
Es ist oft zweckmäßig, injektive Funktionen als Funktionen auf ihren Wertebereich zu betrachten. Die folgende Begriffsbildung unterstreicht dies:

Definition

Eine *Bijektion zwischen* einer Menge A *und* einer Menge B ist eine injektive Funktion mit Wertebereich B. Notation: $f: A \xrightarrow[\text{auf}]{1\text{-}1} B$.

Man beachte, dass zwar nicht jede Funktion eine Bijektion ist, wohl aber jede injektive Funktion.

Das einfachste Beispiel für eine Bijektion ist die schon als zweistellige Relation betrachtete *Identität* über einer Menge A: $Id_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$. Ein weiteres Beispiel zeigt, wie man sich Bijektionen im allgemeinen vorzustellen hat. Da niemals zwei Länder dasselbe Nummernschild haben, ist die Nationalitätskennzeichenfunktion ν injektiv. Der Wertebereich von ν ist die Menge aller Buchsgtabenfolgen, die überhaupt als Kennzeichen fungieren. Insbesondere landet also bei jedem dieser Buchstabenfolgen ein ν-Pfeil. Wegen der Injektivität von ν geht auch bei jedem Land nur ein Pfeil los. Länder und Buchstabenfolgen (im Wertebereich von ν) lassen sich also so untereinander anordnen, dass jeweils ein Pfeil jeweils ein Land mit einer Abkürzung verbindet:



Zwei Dinge fallen auf. Zum einen kann so eine Zurodnung nur funktionieren, wenn Definitions- und Wertebereich *gleich viele Elemente* besitzen. In der Mengenlehre wird diese Tatsache ausgenutzt, um den Begriff der Anzahl auf unendlich große Mengen zu verallgemeinern; wir kommen darauf zurück. Eine andere Auffälligkeit von Bijektionen ist, dass man sie 'umdrehen' kann und dann offenbar wieder ein Bijektion erhält:

Satz 6

Es sei $f: A \xrightarrow[\text{auf}]{1\text{-}1} B$. Dann ist $f^{-1}: B \xrightarrow[\text{auf}]{1\text{-}1} A$.

Zur Erinnerung: f^{-1} war die zu f inverse Relation, also $\{(y,x) \mid f(x) = y\}$.

Beweis

Drei Dinge sind zu zeigen: (i) dass f^{-1} eine Funktion von B nach A ist; (ii) dass f^{-1} injektiv ist; (iii) dass f^{-1} surjektiv auf A ist.

ad (i): Da f surjektiv auf B ist, gibt es für jedes $y \in B$ ein $x \in A$, so dass $(x,y) \in f$, d.h. $(y,x) \in f^{-1}$. Es bleibt zu zeigen, dass es nie mehr als ein solches x gibt. Wenn aber $(y,x) \in f^{-1}$ und $(y,x') \in f^{-1}$, dann ist $f(x) = f(x')$ und somit $x = x'$, denn f ist injektiv.

ad (ii): $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$ bedeutet, dass es ein $x \in A$ gibt, so dass $(y,x) \in f^{-1}$ und $(y',x) \in f^{-1}$, d.h.: $(x,y) \in f$ und $(x,y') \in f$. Aber dann ist $y = y'$, denn f ist eine Funktion.

ad (iii): Da $f: A \xrightarrow[\text{auf}]{1\text{-}1} B$, gibt es insbesondere für jedes $x \in A$ ein $y \in B$, so dass $(x,y) \in f$, d.h. es gibt für jedes $x \in A$ ein $y \in B$, so dass $(y,x) \in f^{-1}$.

Da jede injektive Funktion eine Bijektion auf ihren Wertebereich ist, erhalten wir das folgende:

Korollar

Es sei $f: A \xrightarrow{1\text{-}1} B$. Dann ist $f^{-1}: rge(f) \xrightarrow[\text{auf}]{1\text{-}1} A$.

Neben der Inversenbildung ist die sog. *Verknüpfung* von Funktionen eine häufig benötigte Operation. Dabei handelt es sich um das 'Hintereinanderausführen' zweier Funktionen auf denselben Ausgangswert. So kann man zum Beispiel eine Zahl zuerst quadrieren und dann das Ergebnis durch 2 teilen; oder man bestimmt zunächst das Kennzeichen eines Landes und dann die Anzahl dessen Buchstaben. In jedem Fall kann man sich diese Hintereinanderausführung zweier Operationen (= Funktionen) als eine einzige, komplexe Operation vorstellen: *die Hälfte des Quadrats* bzw. *die Länge des Nationalitätskennzeichens*. Die folgende Begriffsbildung erfasst genau diese Idee:

Definition

A, B und C seien irgendwelche Mengen, so dass gilt: $f: A \rightarrow B$, und $g: B \rightarrow C$. Dann ist $g \circ f = \{(x,z) \mid z = g(f(x))\}$.

Es ist klar, dass in diesem Fall $g \circ f : A \rightarrow C$.

Wenn also q die Quadratfunktion ist und h die Funktion, die jeder Zahl die Hälfte dieser Zahl zuordnet, dann ist $h \circ q$ die Hälfte-des-Quadrats-Funktion. Man beachte, dass $h \circ q \neq q \circ h$, denn z.B. ist $h \circ q(2) = h(q(2)) = h(4) = 2 \neq 1 = q(1) = q(h(2)) = q \circ h(2)$. Wenn dagegen ν die Nationalitätskennzeichenfunktion ist und λ für jede (endliche) Folge von Buchstaben die Länge angibt, ist $\lambda \circ \nu$ die Länge des Kennzeichens – also z.B. $\lambda \circ \nu$(Schweiz) = 2 – während es $\nu \circ \lambda$ gar nicht gibt, denn ν lässt sich nur auf Länder anwenden, während es sich bei den Werten von λ um Zahlen handelt. Man sieht, dass man zwei beliebige Funktionen nicht unbedingt miteinander verknüpfen kann. Der folgenden Satz betrifft nur solche Funktionen, deren Verknüpfung auch tatsächlich existiert:

Satz 7

f, g und h seien Funktionen. Dann gilt:

(a) $(f^{-1})^{-1} = f$

(b) $f \circ Id_{rge(f)} = Id_{rge(f)} \circ f = f$

(c) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_{rge(f)}$ … wenn f injektiv ist

(d) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ … wenn es diese Funktionen gibt

Beweis

ad *(a)*: $(f^{-1})^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in f^{-1}\}$ Definition von '$^{-1}$'
$= \{(x,y) \mid (x,y) \in f\}$ Definition von '$^{-1}$'
$= f$ Extensionalität

ad *(b)*: Sei $\iota = Id_{rge(f)}$. Dann gilt für jedes $x \in rge(f)$:
$f \circ \iota(x) = f(\iota(x))$ Definition von '$\circ$'
$= f(x)$ Definiton von ι
$= \iota(f(x))$ Definiton von ι
$\iota \circ f(x)$ Definition von '$\circ$'

Also sind $f \circ \iota$ und $\iota \circ f$ dieselbe Funktion.

ad *(c)*: $(x,y) \in f \circ f^{-1}$ gdw. $y = f^{-1}(f(x))$ Definition von '$\circ$'
gdw. $(f(x),y) \in f^{-1}$ Definition des Funktionswerts
gdw. $(y,f(x)) \in f$ Definition von '$^{-1}$'
gdw. $f(y) = f(x)$ Definition des Funktionswerts
gdw. $y = x$ Injektivität von f

Somit ist $f \circ f^{-1}$ die Identität, sobald f injektiv ist. Außerdem ist nach *(a)*: $f^{-1} \circ f = f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1}$, also auch die Identität, denn f^{-1} ist injektiv, wenn f injektiv ist.

ad *(c)*: $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x))$ Definition von '$\circ$'
$= f(g(h(x)))$ Definition von '$\circ$'
$= f((g \circ h)(x))$ Definition von '$\circ$'
$= f \circ (g \circ h)(x)$ Definition von '$\circ$'

Die Satz 7 genannten Rechenregeln erinnern an einige der Rechenregeln für die Mengenoperationen (welche?) und bilden einen der Ausgangspunkte der modernen Algebra (Gruppentheorie).

Wir beschließen unsere Durchgang durch die allgemeinsten Eigenschaften von Funktionen mit dem schon angekündigten Zusammenhang zu Äquivalenzrelationen und Partitionen. Zunächst machen wir dazu die folgende:

Beobachtung

Denselben Funktionswert zu besitzen ist eine Äquivalenzrelation.

Genauer: Wenn f: $A \rightarrow B$, ist $\{(x,y) \in A^2 \mid f(x) = f(y)\}$ eine Äquivalenzrelation über A. R nennt man die *Wertgleichheit* unter f.

Das liegt an den entsprechenden Eigenschaften der Identität (als zweistelliger Relation): $f(x) = f(x)$ (Reflexivität); $f(y) = f(x)$, sobald $f(x) = f(y)$ (Symmetrie); und $f(x) = f(z)$, sobald $f(x) = f(y) = f(z)$.

Die Beobachtung macht deutlich, dass das Bestehen einer Äquivalenzrelation zwischen zwei Objekten oft auf einer Gemeinsamkeit zwischen ihnen zu beruhen scheint. Im Falle der Wertgleichheit ist das Gemeinsame der Funktionswert. Das Interessante ist nun, dass sich *jede* Äquivalenzrelation als Wertgleichheit unter einer Funktion verstehen lässt. Wenn also R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, besteht R zwischen zwei Objekten x und y, wenn denselben f-Wert einer bestimmten Funktion f besitzen. In den meisten konkreten Beispielen lässt sich so ein f einigermaßen leicht angeben. Die Relation der Gleichaltrigkeit ist z.B. die Wertgleichheit der Altersfunktion, also der Funktion, die jeder Person ihr Alter (z.B. in Jahren) zuweist; die weiter oben betrachtete Relation R_B , die gleichen Bücher gelesen zu haben, lässt sich als Wertgleichheit der Funktion f_B auffassen, die jeder Person die Menge der von ihr gelesenen Bücher zuweist; usw. Jetzt zeigen wir, dass diese Beispiele keine Einzelfälle sind; dabei machen wir ganz wesentlich von dem in Abschnitt 2. dargestellten Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionen Gebrauch:

Satz 8

Wenn R eine Äquivalenzrelation über einer Menge A ist, gibt es eine Menge B und eine Funktion f_R von A nach B, so daß R die Wertgleichheit zu f_R ist.

Beweis

Der ist erstaunlich einfach: man nimmt als B einfach die von R induzierte Partition Π_R von A und setzt $f_R := \{(a, |a|_R) \mid a \in A\}$. Dass f_R eine Funktion von A nach B ist, ist klar. Gezeigt werden muss, dass R die Wertgleichheit zu f_R ist, dass also für beliebige Elemente a und b von A gilt: $a\ R\ b$ gdw. $f_R(a) = f_R(a)$, was nach der Definition von f_R heißt, dass $|a|_R = |b|_R$. Aber das hatten wir schon bewiesen – als Vorbereitung zum Beweis von Satz 4!

Man beachte, dass die im Satz genannte Funktion f_R nicht eindeutig bestimmt ist. Im Falle der Altersgleichheit etwa könnte man ja statt der Äquivalenzklassen Gleichaltriger genausogut natürliche Zahlen, z.B. das Alter der jeweiligen Personen, nehmen; welche Zahlen man dafür nimmt, ist egal, solangegleichaltrige Personen dieselbe und verschieden alte Personen verschiedene Zahl zugewiesen bekommen.

In Fällen, in denen man nicht so genau weiß, welche Objekte man den Personen als Gemeinsamkeit zuordnen soll, hilft die im Beweis benutzte Methode weiter. Man betrachte z.B. die Relation G, die zwischen Personen a und b besteht, wenn a und b denselben Geschmack haben. Eine entsprechende Funktion f_G, für die G gerade die Wertgleichheit ist, müsste (intuitiv gesprochen) jeder Person ihren Geschmack zuordnen. Aber was ist der Geschmack einer Person? Es handelt sich offenbar um irgendetwas Abstraktes, schwer Fassbares, von dem wir höchstens wissen, wann sich zwei Personen ihn teilen. Wenn letzteres der Fall ist und es sich – wie jedenfalls die Redeweise vom *gleichen Geschmack* suggeriert – bei G tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt, können wir die Konstruktion des obigen Beweis ausnutzen, in dem wir den Geschmack einer Person a einfach mit der Äquivalenzklasse $|a|_G$ identifizieren. Das garantiert einerseits, dass die Existenz eines ansonsten recht diffus und dubios erscheinden Objekts (*a*s Geschmack) zumindest im Rahmen der Mengenlehre außer Frage steht, ohne dass andererseits das, was wir über den Geschmack von Personen wissen, mit dieser Identifikation unvereinbar wäre. Wollten wir z.B. die Geschmäcker verschiedener Personen vergleichen oder bewerten, liefe dies – die genannte Idenfikation vorausgesetzt – auf Vergleiche und Bewertungen von Äquivalenzklassen von in ihren Geschmacksurteilen ununterscheidbaren Personen hinaus. Diese Art der Konstruktion abstrakter Gegenstände geht auf den Begründer der modernen Logik, Frege, zurück und wird als *Abstraktion durch Äquivalenzklassenbildung* bezeichnet. Sie spielt in der Wissenschaftstheorie, aber vor allem in der Mathematik eine große Rolle. So kann man z.B. die *Ladung* von Partikeln als Menge von ladungsgleichen Partikeln auffassen, die *Richtung* einer Geraden als die Menge der zu ihr parallelen Geraden (das war eines von Freges Originalbeispielen) oder – wie wir noch genauer sehen werden – die *Größe* einer Menge als die Klasse der ihr gleichgroßen Mengen.

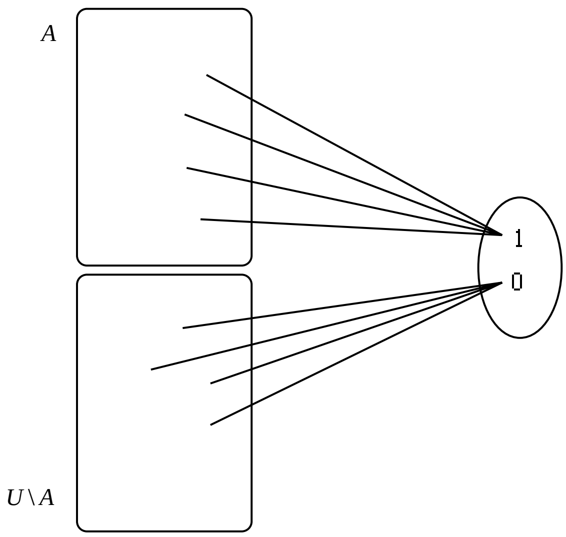
3.3 Charakteristische Funktionen

Wie schon im Zusammenhang mit Mengeoperationen werden wir jetzt eine beliebige Menge U festhalten, die wir als das *Universum* (bestehen aus *Individuen*) ansehen wollen. Den Teilmengen A von U, also den Elementen von $\wp(U)$, entsprechen nun gewisse Funktionen, die die Elemente von U danach sortieren, ob sie in A sind oder nicht: wenn ja, weisen sie die Zahl 1 zu, wenn nein, bekommt das Element von U die 0 zugeordnet:

Definition

Sei $A \subseteq U$.Eine Funktion f: $U \to \{0,1\}$ *charakterisiert* A (*relativ zu* U), falls für alle $x \in U$ gilt: $f(x) = 1$ gdw. $x \in A$.

Es gilt: $f = \{(x,1) \mid x \in A\} \cup \{(x,0) \mid x \in U \setminus A\}$.



Bemerkung:

Falls $A \subseteq U$, gibt es genau ein f das A relativ zu U charakterisiert; umgekehrt charakterisiert jedes f: $U \to \{0,1\}$ genau eine Teilmenge von U.

Man bezeichnet solche f mit Definitionsbereich U und Werten in $\{0,1\}$ als *charakteristische Funktionen* (über U). Charakteristische Funktionen spielen in der Semantik eine große Rolle, wo es sich oft als zweckmäßiger erweisen als die charakterisierten Mengen, zu denen sie in einer Eins-zu-eins-Beziehung stehen. Doch damit nicht genug. Auch *Relationen* über einem gegebenen Universum U werden durch entsprechende Funktionen ersetzt. Um zu sehen, wie das geht, betrachten wir am besten ein Beispiel. Sei U die Menge der Personen und B die (zweistellige) Relation der Bruderschaft, d.h.: $B = \{(x,y) \mid$ *die Person* x *ist Bruder der Person* $y\}$. Für jede einzelne Person y sei nun B_y die Menge von ys Brüdern. $x\ B\ y$ gilt genau dann, wenn $x \in B_y$.

Da die B_y Teilmenge von U sind, lassen sie sich durch Funktionen f_y charakterisieren. Es gilt also: $x\ B\ y$ genau dann, wenn $f_y(x) = 1$. Da es für jedes y so ein f_y gibt, bildet die Menge der Paare (y, f_y) eine Funktion g von U in die Menge der charakteristischen Funktionen über U, und es gilt: $g(y)(x) = 1$ gdw. $f_y(x) = 1$ gdw. $x\ B\ y$, d.h. g enthält alle Informationen über B. Dieses g wird in der Semantik als Ersatz für die Relation B benutzt. Das Verhältnis zwischen B und g bezeichnet man als *Schönfinkelei* (engl. *currying*) – nach den Erfindern Moses Schönfinkel bzw. Greg Curry. Hier ist die allgemeine:

<u>Definition</u>

Sei R eine zweistellige Relation über einer Menge U, und $f: U \rightarrow [U \rightarrow \{0,1\}]$. f *schönfinkelt* R *(relativ zu* U*)*, falls für alle $y \in U$ und $x \in U$ gilt:

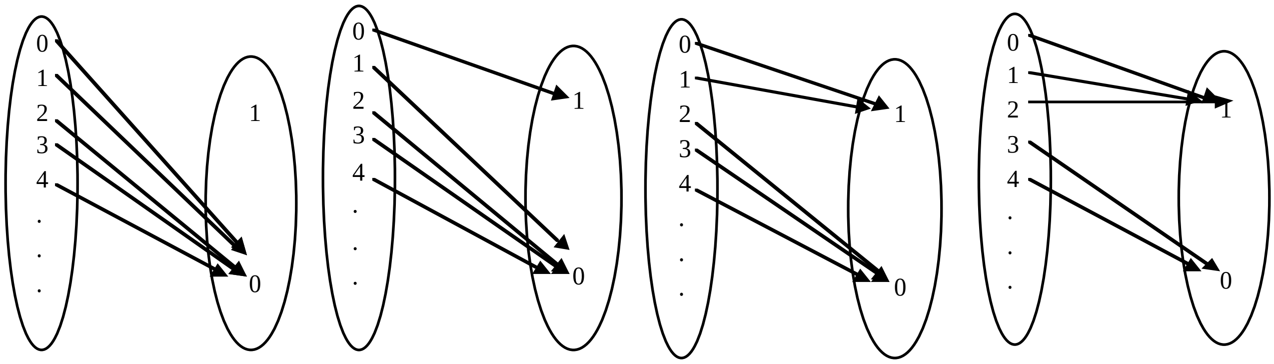
$$f(y)(x) = 1 \text{ gdw. } xRy.$$

(Die Notation $f: U \rightarrow [U \rightarrow \{0,1\}]$ drückt dabei aus, dass die Werte von f selbbst wieder Funktionen von U nach $\{0,1\}$ sind.)

Ein konkretes Beispiel hilft, sich diese abstrakten Begriff klarzumachen. Es sei R die Kleiner-Beziehung zwischen den natürlichen Zahlen, d.h.:

$$R = \{(n,m) \mid n \text{ und } m \text{ sind natüliche Zahlen, und } n<m\}.$$

Wie sieht die Schönfinkelei von R aus? Zunächst bestimmt man dazu für jedes m die Menge M_m der 'R-Vorgänger', d.h. $\{n \mid n<m\}$. Z.B. ist $M_0 = \emptyset$, $M_1 = \{0\}$, $M_2 = \{0,1\}$, etc. pp. (Man beachte, dass M_m stets m Elemente enthält!) Jede dieser Mengen M_m lässt sich nun durch eine Funktion f_m charakterisieren, die gerade den Elementen von M_m die 1 und allen anderen Zahlen die 0 zuordnet. Zum Beispiel sehen $f_0 – f_3$ so aus:



Jedes f_m sagt also für eine gegebene Zahl n, ob $n$kleiner ist als m. Die Schönfinkelung der Kleiner-Beziehung R ist nun einfach die Funktion g, die jeder Zahl m ihre entsprechende Funktion f_m zuordnet: $g(0)$ ist die Funktion ganz links, dann kommt $g(1)$ usw.

AUFGABEN

a) Zeigen Sie, dass jede Funktion f: $U \rightarrow [U \rightarrow \{0,1\}]$ genau eine zweistellige Relation über U schönfinkelt und dass jede zweistellige Relation über U von genau einer Funktion schögefinkelt wird.
b) Zeigen Sie, dass die Schönfinkelung der Kleiner-Beziehung injektiv ist. Geben Sie ein Beispiel für eine zweistellige Relation, deren Schönfinkelung nicht injektiv ist.

Die Technik der Schönfinkelei lässt sich auch auf mehrstellige Relationen verallgemeinern. Wir verzichten hier auf die (umständliche) Darstellung dieses Sachverhalt, werden aber im Semantikkurs nicht darum herumkommen.

3.4 Indizierungen und Folgen

Funktionen f können dazu benutzt werden, um sich mit den Elementen einer Menge I auf die Elemente einer anderen Menge M zu beziehen. Die $i \in I$ dienen dann quasi als Labels oder Namen für die $m \in M$. In diesem Falle nennt man f auch eine *Indizierung von M* (mit einer *Indexmenge I*). Ein typisches Beispiel sind numerische Indizierungen, wie man sie in vielen alltäglichen Bereichen verwendet. Ein handelsüblicher Fernseher verfügt z.B. über eine (virtuelle und programmierbare) *Sendertabelle*, in der Zahlen Fernsehsender (genauer: Kanäle, aber diese Feinheit werden wir ignorieren) zugeordnet sind: 1-> ARD, 2-> ZDF, etc. Bei einer solchen Zuordnung handelt es sich um eine Indizierung s, also eine (übrigens oft nicht einmal injektive) Funktion, deren Zweck es ist, die einzelnen Funktionswerte (Sender) über entsprechende Argumente (Zahlen) zu identifizieren (anzuklicken). In so einem Falle schreibt man die Funktion gern – wie der Name *Indizierung* schon andeutet – mit Hilfe von Indizes: s_1, s_2, s_3, usw. statt $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$,… Und wenn man s selbst bezeichnen will, nennt man die Indexmenge oft mit und schreibt: $(s_i)_{i \in I}$, wobei I die Menge der beim Fernseher einstellbaren Zahlen (z.B. $\{0,\ldots,99\}$) ist.

Wie in diesem Beispiel eignen sich natürliche Zahlen – und vor allem *Anfangsstücke I* von $\mathbb{N}$, also Mengen der Form $\{0,1,2,\ldots,n\}$ – wegen ihrer (eben: natürlichen) Ordnung dazu, beliebige Gegenstandsbereiche zu indizieren und dabei gleichzeitig anzuordnen. Da für die Indexmenge eine Ordnungsstruktur vorausgesetzt werden darf, überträgt sich letztere auf die indizierte Menge. Man schreibt dann die Indizierung auch als: $<m_i>_{i \leq n}$ oder $<m_0,m_1,\ldots,m_n>$ und nennt sie ein *n-stellige (endliche) Folge*. n-stellige Folgen sind insofern wie n-Tupel, als auch für sie gilt: $<a_0,a_1,\ldots,a_n> = <b_0,b_1,\ldots,b_n>$ gdw. für alle i zwischen 0 und n gilt: $a_1 = b_i$, aber sie können nicht alle Aufgaben der n-Tupel übernehmen: als Funktionen sind sie Mengen von geordneten Paaren und setzen also schon den Paarbegriff voraus! Im Unterschied zu Tupeln könnnen Folgen auch unendlich lang sein, d.h. von der Gestalt $<a_0,a_1,\ldots,a_n,a_{n+1},\ldots>$, was man auch als $<a_i>_{i \rightarrow \omega}$ oder $<a_i>_{i \in \mathbb{N}}$ schreibt. Die Folge bricht dann also niemals ab und sie bestimmt sich einzig und allein durch die Reihenfolge ihrer Glieder. Übrigens: wie jede Funktion sind Indizierungen und Folgen nicht notwendigerweise injektiv, d.h. einzelne Glieder können mehr als einmal auftreten.

3.5 Unendlichkeit und Kardinaltiät

Wir hatten beobachtet, dass man offenbar nur dann eine Bijektion zwischen zwei Mengen finden kann, wenn diese gleich viele Elemente haben. Dieser Umstand wird in der Mengenlehre dazu genutzt, den Begriff der Anzahl von Elementen einer Menge – ja, den Begriff der Zahl überhaupt – zu definieren (oder, wie man sagt: 'mit mengentheoretischen Mitteln zu *rekonstruieren*'). Wir definieren dazu zunächst eine Beziehung zwischen beliebigen Mengen:

Definition: Es seien A und B Mengen. Dann gilt:
A und B sind genau dann *gleichmächtig* – symbolisch: $A \sim B$ – wenn es eine Bijektion von A nach B gibt.

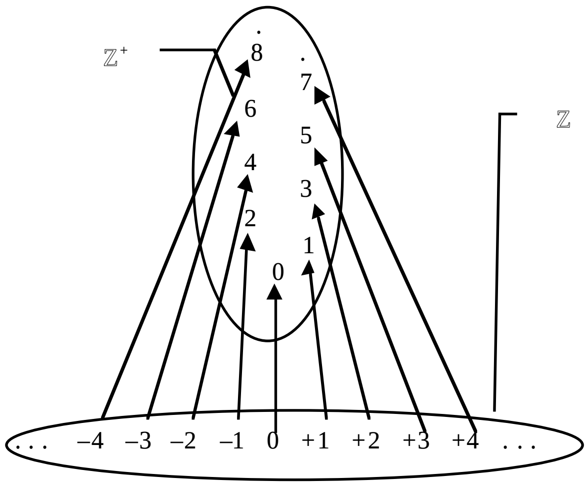
Satz 9
Für beliebige Mengen A, B und C gilt:
a) $A \sim A$;
b) wenn $A \sim B$, dann auch $B \sim A$;
c) wenn $A \sim B$ und $B \sim C$, dann auch $A \sim C$.

Beweis: **a)** gilt, weil Id_A eine Bijektion ist.
b) gilt, weil nach Satz 6 f^{-1} eine Bijektion von B nach A ist, wenn f eine Bijektion von A nach B ist.
c) gilt, weil $f'\circ f$ eine Bijektion von A nach C ist, wenn f und f' Bijektionen von A nach B bzw. von B nach C sind; den Beweis schenken wir uns.

~ ist demnach eine Äquivalenzrelation auf dem Universum aller Mengen. Wie sehen die Äquivalenzklassen aus? Im endlichen Bereich handelt es sich jeweils um alle Mengen, die eine bestimmte Anzahl von Elementen haben: eine Äquivalenzklasse enthält nur die leere Menge (als einzige Menge mit 0 Elementen), eine andere alle Einermengen, etc. Frege hat diese Äquivalenzklassen als logische Rekonstrukte der natürlichen Zahlen betrachtet. Die Konstruktion ist außer Mode geraten, weil sie sich im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre in dieser Form nicht nachvollziehen lässt.

Im endlichen Bereich sind rasch Beispiele für Gleichmächtigkeit gefunden: $\{0,1,2\} \sim \{3,5,6\}$, $\{a,b\} \sim \{a\}$, wenn $a = b$ usw – was bestätigt, dasss Gleichmächtigkeit im endlichen Falle auf gleiche Elementanzahl hinausläuft. Aber die Definition funktioniert auch im Unendlichen. Z. B. ist $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}^+$ [$= \mathbb{N} \setminus \{0\}$], denn man kann die beiden Mengen durch 'Verschieben' bijektiv aufeinander abbilden, indem man jeder natürlichen Zahl ihren Nachfolger zuordnet; denn die in Abschnitt 2.2 betrachtete Relation R_N ist in der Tat eine

Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}^+$. Man beachte, dass diese Bijektion eine Menge ($\mathbb{N}$) mit einer ihrer *echten* Teilmengen ($\mathbb{Z}^+$) in eine Eins-zu-eins-Beziehung setzt, was nur im Unendlichen funktioniert. (Das ist eine der sogenannten *Paradoxien des Unendlichen*). Doch es kommt noch toller. Denn die echte Teilmenge kann in dem Sinne unendlich viel kleiner sein, als das Komplement selber wieder unendlich ist. Ein Beispiel ist: $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}^+$. Eine entsprechende Bijektion sieht so aus:



Sogar die rationalen Zahlen lassen sich bijektiv auf die positiven ganzen Zahlen abbilden. Wir führen die Idee (die vom Begründer der Mengenlehre, Georg Cantor, stammt) hier nur anhand der positiven Brüche vor; der Rest wird sich aus allgemeinen Überlegungen ergeben. Um eine Bijektion zu finden, ordnet man die (positiven) Brüche in einer unendlichen Tabelle an:

Nenner

Zähler	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	…
0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	…
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	…	…
2	2/1	2/2	2/3	2/4	…	…	…
3	3/1	3/2	3/3	…	…	…	…
4	4/1	4/2	…	…	…	…	…
5	5/1	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Aber die $\mathbb{Z}^+$ lässt sich auch in einer solchen Tabelle anordnen:

Nenner

Zähler	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	…
0	1	2	4	7	11	16	…
1	3	5	8	12	17	…	…
2	6	9	13	18	…	…	…
3	10	14	19	…	…	…	…
4	15	20	…	…	…	…	…
5	21	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Wir fangen dabei links oben mit dem Zählen an und arbeiten uns langsam nach rechts unten durch, Diagonale für Diagonale. Offenkundig stehen die beiden Tabellen in einer Eins-zu-eins-Beziehung und somit auch die positiven Brüche und die positiven ganzen Zahlen.

Angesichts des letzten Beispiels liegt der Verdacht nahe, dass man zwischen zwei unendlichen Mengen immer eine Bijektion finden kann, dass sich also Größengleichheit zwischen unendlichen Mengen – wenn überhaupt – jedenfalls nicht mit Gleichmächtigkeit definieren läßt, weil man so keine Abstufungen im Unendlichen bekäme. Dieser Eindruck ist grottenfalsch:

<u>Satz von Cantor</u>
Keine Menge ist gleichmächtig mit ihrer Potenzmenge.

<u>Beweis</u>
Angenommen, es gäbe eine Menge A, so daß $A \sim \wp(A)$ und somit auch eine Bijektion f von A nach $\wp(A)$. Wir setzen $X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$. Da $X \in \wp(A)$ und f surjektiv ist, muß es ein $x \in A$ geben, so daß $f(x) = X$. Aber dann wäre $x \in f(x)$ gdw. $x \in \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ gdw. $x \notin f(x)$, was nicht sein kann.

Für den Fall $A = \mathbb{N}$, lässt sich der Beweis auch mit Hilfe charakteristischer Funktionen veranschaulichen. Wir hatten gesehen, dass die Teilmengen einer Menge – also die Elemente der Potenzmenge – in einer Eins-zu-eins-Beziehung zu den charakeristischen Funktionen über dieser Menge stehen. Die Teilmengen der natürlichen Zahlen werden durch Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\{0,1\}$ charakterisiert und entsprechen demnach unendlichen Folgen (im Sinne von Abschnitt 3.5) von Nullen und Einsen: die Menge $\mathbb{N}$ selbst entspricht der Folge <1,1,1,…> aus lauter Einsen, weil jede Zahl von der charakteristischen Funktion den Wert 1 zugewiesen bekommt; die leere Menge entspricht der Folge <0,0,0,…> aus lauter Nullen, weil die charakteristische Funktion von Ø stets die 0 zuordnet; die Einermenge {1} der Folge <0,1,0,0,0,…>, die nur an der zweiten Stelle die Zahl 1 zuordnet, denn die 1 steht an der zweiten Stelle der natürlichen Zahlen (nach der 0) und nur der 1 ordnet diese Funktion die 1 zu; die Menge der geraden Zahlen entspricht der Folge <0,0,1,0,1,0,1,0,1,.>, die – außer ganz am Anfang (weil 0 nicht gerade ist) immer zwischen 0 und 1 alterniert; etc. pp. Angenommen, wir könnten die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ aufzählen, also in eine Eins-zu-eins-Beziehung zu $\mathbb{N}$ selbst setzen. Schematisch sähe eine solche Aufzählung so aus:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	…
0	w^0_0	w^0_1	w^0_2	w^0_3	w^0_4	w^0_5	…
1	w^1_0	w^1_1	w^1_2	w^1_3	w^1_4	w^1_5	…
2	w^2_0	w^2_1	w^2_2	w^2_3	w^2_4	w^2_5	…
3	w^3_0	w^3_1	w^3_2	w^3_3	w^3_4	w^3_5	…
4	w^4_0	w^4_1	w^4_2	w^4_3	w^4_4	w^4_5	…
5	w^5_0	w^5_1	w^5_2	w^5_3	w^5_4	w^5_5	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Dabei ist die erste Zeile die Folge, mit der Nummer 0 (also der Wert der hypothetischen Bijektion für das Argument 0), dann kommt Folge Nummer 1 usw. Jede Folge Nummer *n* besteht selbst wieder aus dem Wert für die 0 (w_0^n), gefolgt von dem für die 1 (w_1^n) etc. – wobei jeder dieser Werte entweder 0 oder 1 ist. Im Cantorschen Beweis passiert nun folgendes: wir betrachten zunächst die Diagonalfolge, also die Folge von Nullen und Einsen, die gerade auf den Punkten der Diagonale erscheinen und *drehen diese Werte um*: wo auf der obigen Diagonalen 0 stand, schreiben wir eine 1, wo eine 1 war, steht jetzt eine 0:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \ldots \\
\mathbf{0} & \boxed{\overline{w}_0^0} & w_1^0 & w_2^0 & w_3^0 & w_4^0 & w_5^0 & \ldots \\
\mathbf{1} & w_0^1 & \boxed{\overline{w}_1^1} & w_2^1 & w_3^1 & w_4^1 & w_5^1 & \ldots \\
\mathbf{2} & w_0^2 & w_1^2 & \boxed{\overline{w}_2^2} & w_3^2 & w_4^2 & w_5^2 & \ldots \\
\mathbf{3} & w_0^3 & w_1^3 & w_2^3 & \boxed{\overline{w}_3^3} & w_4^3 & w_5^3 & \ldots \\
\mathbf{4} & w_0^4 & w_1^4 & w_2^4 & w_3^4 & \boxed{\overline{w}_4^4} & w_5^4 & \ldots \\
\mathbf{5} & w_0^5 & w_1^5 & w_2^5 & w_3^5 & w_4^5 & \boxed{\overline{w}_5^5} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Die hervorgehobenen Werte $\overline{w}_j^i$ stehen dabei gerade immer gerade für das Gegenteil des ursprünglichen Wertes w_j^i (also für $1-w_j^i$!). Diese Werte bilden offenbar wieder eine (unendliche) Folge von Nullen und Einsen, also eine charakteristische Funktion einer Teilmenge von $\mathbb{N}$. Da wir angenommen hatten, dass die Tabelle *jede*charakteristische Funktion erfasst, muss sie auch diese erfassen. Aber das kann nicht sein: wenn eine Folge auf der Tabelle die Nummer *n* hat (d.h. in der *n*ten Zeile steht), stimmt die hervorgehobene 'Antifolge' an der *n*ten Stelle nicht mit ihr überein!

4. Aussagenlogik

4.1 Wahrheitswerte und Modelle

Die Aussagenlogik bildet den Ausgangspunkt und das Herzstück der formalen Logik. Sie ist Teil der Prädikatenlogik, die den Gegenstand des nächsten Abschnitts bildet. Aussagen- und Prädikatenlogik sind *formale Sprachen*, d.h. exakte Formelsprachen mit genau spezifizierten Ausdrücken, die genau spezifizierte Bedeutungen haben und in denen man nach gewissen Rechenregeln Formeln auseinander herleiten kann. Die Grundidee ist die der *Formalisierung* des mathematischen Beweises: Jeder mathematische Begriff wird in der Formelsprache ausgedrückt, und die Sätze der Mathematik werden dann mit Hilfe der formallogischen Rechenregeln aus den mathematischen Grundannahmen, den Axiomen, hergeleitet. Dieses (im 19. Jahrhundert begonnene) Formalisierungsunternehmen war so erfolgreich, dass man bald begonnen hat, die Techniken auch auf andere Bereiche zu übertragen. In der linguistischen Semantik dienen die in der Logik entwickelten formalen Sprachen einerseits als Modelle für die (kompliziertere, aber in Grundzügen ähnliche) Deutung natürlicher Sprachen und andererseits als Vehikel und Hilfsmittel zum ‘Rechnen’ mit Bedeutungen und Informationen.

Die Sprache der Aussagenlogik ist in ihrem Inventar sehr begrenzt. Es geht nur um die Kombination von (wie der Name schon sagt) *Aussagen*, genauer: um gewisse einfache Mittel, um Aussagen zu immer komplexeren Aussagen zu verknüpfen. Um welche Aussagen es sich dabei handelt, spielt keine Rolle – Hauptsache, sie sind überhaupt (jeweils) entweder wahr oder falsch – oder, wie man in der Logik sagt: sie haben einen *Wahrheitswert*. Es gibt zwei Wahrheitswerte, die man (aus Gründen auf die wir hier nicht weiter eingehen) mit den Zahlen 0 und 1 identifiziert: der Wahrheitswert einer wahren Aussage ist die Zahl 1, falsche Aussagen haben den Wahrheitswert 0.

Dass eine Aussage einen Wahrheitswert hat, heißt nicht unbedingt, dass auch nur irgendjemand weiß, welcher der beiden Wahrheitswerte dies ist. Ob es am 12. Januar 1317 im heutigen Stadtgebiet von New York geregnet hat, weiß sicherlich niemand, wahrscheinlich wird es auch niemand je in Erfahrung bringen, und möglicherweise hat es auch nie jemand gewusst. Aber entweder hat es an jenem Tag in besagtem Gebiet geregnet oder nicht. Im ersten Fall hat die Aussage, dass es am 12. Januar 1317 an der Mündung des Hudson geregnet hat, den Wahrheitswert 1, im zweiten Fall hat sie den Wahrheitswert 0. Die folgenden Sätze machen dagegen keine wahrheitswertigen Aussagen:

- *Der Koch singt ein Gewürz.*
- *Wer hat als erster den Mount Everest bestiegen?*
- *Die Heidelberger U-Bahn ist immer pünktlich.*

Der erste Satz ist kaum zu verstehen; er ergibt keinen Sinn und macht insofern auch keine Aussage (bzw. man kann mit ihm nichts aussagen). Der zweite Satz macht auch keine Aussage, sondern stellt eine Frage. (D.h. man kann mit ihm eine Frage stellen.) Der dritte Satz macht insofern keine wahrheitswertige Aussage, als er etwas voraussetzt, was einfach nicht stimmt, dass nämlich Heidelberg eine U-Bahn hat; da es ein solches Verkehrsmittel aber nicht gibt, ist die Aussage, dass es pünktlich ist, weder richtig noch falsch – und deshalb nicht wahrheitswertig.

Beispiele wie diese werden also in der Aussagenlogik nicht berücksichtigt, weil es sich nicht um wahrheitswertige Aussagen handelt. Etwas anders liegt der Fall bei sog. *indexiaklischen Aussagen*, deren Wahrheitswert situations- oder personenabhängig ist – wie fast alle natürlichsprachlichen Sätze. Zum Beispiel hängt der Wahrheitswert des Satzes *Es regnet* vom Ort und von der Zeit ab, auf die man sich bezieht; und der Wahrheitswert von *Ich sehe Sie nicht* hängt obendrein davon ab, wer mit wem spricht. Bei der logischen Formalisierung geht man (bis auf weiteres) stillschweigend davon aus, dass diese Situationsabhängigkeiten 'festgeklopft' werden und ein Satz wie *Es regnet* je nach (Äußerungs- oder Bezugs-) Situation formalisiert werden muss. Wird also der Satz am 1.3.2000 in Berlin geäußert, wird eine andere Aussage mit ihm gemacht (nämlich dass es am 1.3.2000 in Berlin regnet) als würde er einen Tag später in Frankfurt geäußert, und diesen beiden Aussagen entsprechen dann verschiedenen aussagenlogischen Formeln mit möglicherweise verschiedenen Wahrheitswerten.

Da man sich in der Aussagenlogik nur für die Zusammenfügung von kleineren Aussagen zu größeren Aussagen interessiert, spielt die interne Struktur der kleinsten Aussagen keine weitere Rolle. (Dieser Umstand wird vor allem erwähnt, weil dies in der Prädikatenlogik anders ist.) Wir gehen deshalb davon aus, dass es ein unbegrenztes Inventar von sog. *atomaren Aussagen* gibt, auf die wir uns mit kleinen Buchstaben p, q, r, p', q_1 usw. beziehen. Die – unendlich große – Menge der atomaren Aussagen bezeichnen wir als AT. Welches Element von AT welcher Aussage entspricht, werden wir dabei von Fall zu Fall festlegen, als Teil der *Formalisierung*, also der Übersetzung natürlichsprachlicher Sätze in aussagenlogische Formeln. Allerdings werden wir – soweit nicht explizit anders gesagt – stets davon ausgehen, dass atomare Aussagen in dem Sinne voneinander *unabhängig* sind, als prinzipiell jede Verteilung von Wahrheitswerten unter ihnen möglich ist. Wenn also p und q atomare Aussagen sind, soll es möglich sein, dass beide wahr sind; es soll aber auch möglich sein, dass beide falsch sind; und schließlich soll es möglich sein, dass eine von ihnen wahr, die andere aber falsch ist. Damit kann z.B. p nicht für die Aussage stehen, dass es (hier und jetzt) regnet, wenn q für die Aussage steht, dass es weder regnet noch schneit; denn p kann dann unmöglich wahr sein, wenn q wahr ist. Die Aussage, dass es weder regnet noch schneit, muss vielmehr mit logischen Mitteln aus der Aussage, dass es regnet, konstruiert werden. (Wie das geht, werden wir gleich sehen.) Jede Verteilung von Wahrheitswerten unter den atomaren Aussagen entspricht also einer logischen – d.h.: zumindest prinzipiell nicht ausgeschlossenen – Möglichkeit. Was ist aber eine Verteilung von Wahrheitswerten? Offenkundig handelt es sich dabei um eine Zuordnung von Nullen und Einsen an atomare Aussagen, d.h. eine charakteristische Funktion über der Menge AT. In der Logik bezeichnet man eine solche, einer logischen Möglichkeit entsprechenden Zuordnung, als ein *Modell*:

Definition
Ein *(aussagenlogisches) Modell* ist eine Funktion von *AL* in {0,1}.

Modelle sind also mögliche Verteilungen von Wahrheitswerten und entsprechen somit denkbaren Tatsachenkonstellationen. Wenn nun p eine atomare Aussage ist und g ein Modell, dann kann p entweder als wahr oder als falsch herauskommen, d.h. dann ist entweder $g(p) = 1$ oder $g(p) = 0$. Im ersteren Fall sagt man auch, dass das Modell g die Aussage p *realisiert*. Jede atomare Aussage lässt sich trivialerweise in irgendeinem Modell realisieren, aber – wie wir noch sehen werden – nicht jede Aussage überhaupt.

KLEINE FRAGE
Welche Modelle sind surjektiv auf {0,1}?

4.3 Wahrheitstafeln

Komplexe Aussagen entstehen in der Aussagenlogik, indem man weniger komplexe Aussagen miteinander *verknüpft*. Es gibt verschiedene Arten, dies zu tun. Man bezeichnet diese Verknüpfungsarten als *Junktoren*. Das einfachste Beispiel für einen Junktor ist die *Konjunktion*, die dem deutschen Wort *und* entspricht (soweit dieses Aussagesätze verbindet). In der Logik notiert man die Konjunktion mit dem Symbol '$\wedge$'. Wenn also p, q und r atomare Aussagen sind, dann auch '$(p \wedge q)$', '$(p \wedge (p \wedge q))$', '$((p \wedge r) \wedge (q \wedge r))$' usw. Der Junktor '$\wedge$' verbindet also nicht nur atomare Aussagen miteinander, sondern kann auch zwischen komplexen Aussagen, die mit '$\wedge$' (oder anderen Junktoren) gebildet sind stehen, oder zwischen einer komplexen und einer atomare Aussage.

Verbindet man zwei Aussagen durch '$\wedge$', erhält man wieder eine Aussage, deren Wahrheitswert nur von den Wahrheitswerten der verbundenen Aussage abhängt. Schreibt man 'A' und 'B' für beliebige Aussagen kann man sich den Zusammenhang in einer Tabelle klarmachen. Wenn beide Teilsätze wahr sind, also den Wahrheitswert 1 haben, dann auch der Gesamtsatz; andernfalls ist der Gesamtsatz falsch, hat also den Wahrheitswert 0. Man kann diese simple Beobachtung in Form einer Tabelle, einer sog. Wahrheitstafel, darstellen:

A	B	$(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Konjunktion

Der Wahrheitswert einer Konjunktion ergibt sich also durch *Multiplikation* der Wahrheitswerte der Konjunkte: $1 \cdot 1 = 1$, aber sonst kommt immer 0 heraus.

In der Wahrheitstafel stehen 'A' und 'B' für beliebige Aussagen. Die ersten beiden Spalten decken je Zeile die vier Möglichkeiten ab, welche Wahrheitswerte diese beiden Aussagen haben können. Die dritte Spalte sagt dann, welcher Wahrheitswert herauskommt, wenn man unter diesen Umständen die Sätze mit '$\wedge$' verknüpft. Zeile 3 der Tabelle besagt also: Wenn ein falscher Satz A und ein wahrer Satz B mit '$\wedge$' verbunden werden, ist das Ergebnis dieser Verbindung ein falscher Satz.

Hier ist noch eine Wahrheitstafel, die der sog. *Disjunktion*:

A	B	$(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disjunktion

Nach dieser Wahrheitstafel ist die Verknüpfung zweier Sätze durch '$\vee$' nur dann falsch, wenn beide verknüpfte Teil-Aussagen falsch sind. Der Junktor '$\vee$' entspricht also dem Wort *oder*.

Man mag einwenden, dass dies nicht dem alltäglichen Verständnis von *oder* entspricht, nach dem auch in der ersten Zeile der Wahrheitswert 0 herauskommen sollte. Denn wer z.B. sagt, dass Fritz zu Hause ist oder dass er noch unterwegs ist, schließt normalerweise aus, dass Fritz sowohl zu Hause als auch unterwegs ist. Allerdings kann Fritz auch nicht sowohl zu Hause als auch unterwegs sein; d.h. der Fall, dass beide Möglichkeiten zutreffen, tritt niemals ein und muss deswegen auch nicht eigens ausgeschlossen werden. Steht dagegen *oder* zwischen zwei miteinander vereinbaren Alternativen, wird die Möglichkeit, dass beide zutreffen, zumindest nicht immer ausgeschlossen. Wenn z.B. jemand behauptet, dass Fritz krank oder verreist ist (weil sein Büro leer ist), würde man normalerweise nicht sagen, er habe sich geirrt, wenn sich herausstellt, dass Fritz krank *und* verreist ist. Es gibt also einen *inklusiven* Gebrauch von *oder*, und dieser entspricht der Wahrheitstafel von '$\vee$'.

Ein anderer Typ von Junktor, der für die Logik besonders wichtig ist, ist die *Negation*, die dem deutschen Wort *nicht* entspricht. In der Logik geht man davon aus, dass die Aussage, das Fritz nicht hustet durch Kombination der Aussage, das Fritz hustet mit der Negation entsteht. Da der eine der beiden gerade dann wahr ist, wenn der andere falsch ist, lässt sich auch für diese Kombination eine Wahrheitstafel angeben:

A	$(\neg A)$
1	0
0	1

Negation

Junktoren entsprechen also Wahrheitstafeln, und Wahrheitstafeln sind offenkundig *Funktionen* mit Werten in {0,1}. Der Definitionsbereich hängt von der *Stelligkeit* des Junktors ab, d.h. wie viele Aussagen er miteinander verknüpft. Die Negation ist einstellig, und ihre Wahrheitstafel hat {0,1} (= $\{0,1\}^1$) als Definitionsbereich; Konjunktion und Disjunktion sind zweistellig, und die entsprechenden Wahrheitstafeln haben als Definitionsbereich $\{0,1\} \times \{0,1\}$ (= $\{0,1\}^2$). Im allgemeinen entspricht einem n-stelligen Junktor eine n-stellige Wahrheitstafel, also eine Funktion von $\{0,1\}^n$ nach {0,1}. (Solche Funktionen sind natürlich auch charakteristische Funktionen, aber dieser Zusammenhang ist eher verwirrend als hilfreich!)

Neben den genannten Junktoren lassen sich noch im Prinzip unendlich viele andere Junktoren definieren. In der Praxis benutzt man aber nur sehr wenige. Außer Konjunktion, Disjunktion und Negation sind vor allem die folgenden von Bedeutung:

A	B	$(A \rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

materiale Implikation (oder *Subjunktion*)

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

materiale Äquivalenz (oder *Bisubjunktion*)

'Material' heißt in diesem Zusammenhang: 'den Wahrheitswert betreffend'. Die Bezeichnungen für diese Junktoren sind historisch gewachsen und brauchen uns hier nicht weiter zu interessieren.

<u>AUFGABE</u>

Wie viele einstellige Wahrheitstafeln gibt es? Wie viele zweistellige? Welche von ihnen sind – wie '$\wedge$' und '$\vee$' durch *und* bzw. *oder* – im Deutschen leicht ausdrückbar?

Von den unendlich vielen Wahrheitstafeln entsprechen die meisten keinem sprachlichen Ausdruck. Aber das ist nicht der einzige Grund, warum nur so wenige von ihnen von Interesse sind. Man kann nämlich zeigen, dass ohnehin eine sehr geringe Anzahl von Junktoren ausreicht, um alle Wahrheitstafeln auszudrücken. In der Tat reichen schon Konjunktion und Negation aus – wenn man weiß, wie man sie kombinieren muss. Hier ist ein Beispiel: statt '$(A \rightarrow B)$' kann man ebensogut – wenn auch umständlicher – '$(\neg (A \wedge (\neg B)))$' schreiben, die resultierende Gesamtwahrheitstafel ist dieselbe. So kann man sie schrittweise berechnen:

A	B	$(\neg B)$	$(A \wedge (\neg B))$	$(\neg (A \wedge (\neg B)))$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Die Notation '$(A \rightarrow B)$' kann man also als Abkürzung für '$(\neg (A \wedge (\neg B)))$' verstehen, was wir auch tun werden (s.u.). Aber ebensogut hätten wir '$\rightarrow$' (neben der Negation '$\neg$') als Grundsymbol deklarieren und Konjunktionen als Abkürzungen definieren können:

<u>AUFGABE</u>

(a) Zeigen Sie, dass '$(A \wedge B)$' dieselbe Wahrheitstafel hat wie '$(\neg (A \rightarrow \neg B))$'.
(b) Finden Sie eine Formel, die als einzige Junktoren Negation und Konjunktion enthält, und dieselbe Wahrheitstafel hat wie die Disjunktion '$(A \vee B)$'.

<u>4.4 Offizielle Definitionen</u>

Um die Sprache der Aussagenlogik formal zu definieren, werden wir Formeln als Mengen auffassen, genauer: als (endliche) *Folgen* von Symbolen. Die Definition wird dabei *induktiv* vorgehen, d.h. dem Gesetz der vollständigen Induktion folgen. Die Idee ist, die Menge *Wff* aller aussagenlogischen Formeln nach und nach mit der wachsenden *Komplexität* dieser Formeln zu definieren: Zunächst werden wir (als *Definitionsanfang*) die aussagenlogischen Formeln der Komplexität 0 definieren, und dann werden wir sagen, wie eine Formel der Komplexität $n+1$ aus einer Formel der Komplexität n gewonnen werden kann:

Definition

Für jede Zahl n wird die Menge Wff_n der *aussagenlogischen Formeln der Komplexität n* wie folgt induktiv bestimmt:

(i) $Wff_0 = AT$;

(ii) $Wff_{n+1} = Wff_n \cup \{f \mid dom(f) = \{0,1,2,3\}$ & $f(0) =$ '(' & $f(1) =$ '¬' & $f(2) \in Wff_n$ & $f(3) =$ ')'$\}$ $\cup \{f \mid dom(f) = \{0,1,2,3,4\}$ & $f(0) =$ '(' & $f(1) \in Wff_n$ & $f(2) =$ '∧' & $f(3) \in Wff_n$ & $f(4) =$ ')'$\}$.

Diese Definition sieht komplizierter aus, als sie ist. Um zu sehen, was sie bewirkt, nehmen wir ein Beispiel, die Formel '(¬ ($p \wedge$ (¬ q)))', wobei p und q atomare Formeln sind. Betrachten wir zunächst die Formel '(¬ q)', die wir als Folge f aus Symbolen auffassen, also als Funktion mit Definitionsbereich {0,1,2,3}, die der 0 das Symbol '(', der 1 das Symbol '¬', der 2 die atomare Formel q und der das Symbol 3 ')' zuordnet: $f(0) =$ '(' etc. Da nun – nach (i) – $q \in Wff_0$, ist f nach (ii) Element von Wff_1, denn f ist in der zweiten der drei in Wff_{0+1} vereinigten Mengen. Als nächstes betrachten wir die Formel '($p \wedge$ (¬ q))' als Folge f' von Symbolen: $f' = \{(0,$'('$), (1,p), (2,$'∧'$), (3,$'(¬ q)'$), (4,$')'$)\}$. (Man beachte, dass f' keine Folge von *Grundsymbolen* ist, denn $f'(4)$ ist selbst eine *Folge* von Grundsymbolen!) Offenbar erfüllt f' die definierende Bedingung der dritten in Wff_{1+1} vereinigten Menge. Denn einerseits gilt, wie wir gerade gezeigt haben: $f'(3) =$'(¬ q)' $= f \in Wff_1$; und andererseits ist $p \in AT = Wff_0$ und ist somit (wegen der ersten Möglichkeit) auch in Wff_1. Also ist $f' \in Wff_2$. Aber dann ist auch $f'' = \{(0,$'('$), (1,$'¬'$),(2,f'), (3,$')'$)\}$ – also die Formel '(¬ ($p \wedge$ (¬ q)))' – in Wff_2.

AUFGABE

Zeigen Sie *per Induktion*, dass für jede Zahl *n* gilt: $Wff_n \subseteq Wff_{n+1}$.

Aussagenlogische Formeln sind jetzt einfach Formeln irgendeiner Komplexität, d.h. wir setzen:

$Wff = \{f \mid$ es gibt ein n, so dass $f \in Wff_n\}$. (Dafür schreibt man auch kürzer: $\bigcup_n Wff_n$.)

Jeder aussagenlogischen Formel kann nun ein Wahrheitswert zugeordnet werden – vorausgesetzt, die Wahrheitswerte der atomaren Formeln stehen fest. Die Wahrheitswerte sind somit modellabhängig:

Definition

Der *Wahrheitswert* $[\![A]\!]^g$ einer aussagenlogischen Formel A *nach* einem Modell g wird durch folgende Induktion bestimmt:

Wenn $A \in Wff_0$, gilt: $[\![A]\!]^g = g(A)$;

wenn $A \in Wff_{n+1}$, gilt:

entweder: $A \in Wff_n$ und $[\![A]\!]^g$ ist nach (Induktions-) Voraussetzung definiert;

oder: $A =$ '(¬ B)' (für irgendein $B \in Wff_n$ und $[\![A]\!]^g = 1 - [\![B]\!]^g$;

oder: $A =$ '($B \wedge C$)' (für irgendwelche B und $C \in Wff_n$ und $[\![A]\!]^g = [\![B]\!]^g \cdot [\![C]\!]^g$.

Die Definition legt nur fest, dass – wie wir bereits gesehen haben – die Wahrheitswerte komplexer Formeln mit Hilfe der Wahrheitstafen aus den Wahrheitswerten ihrer Teile berechnet werden. Das Format der Definition nimmt unmittelbar auf die induktive Definition von *Wff* Bezug. In Zukunft werden wir solche *Induktionen über den Formelaufbau* ohne explizite Bezugnahme auf die Formelkomplexität (das n in den Wff_n) geben. Die Definitionen werden dadurch kürzer und übersichtlicher. Im vorliegenden Fall hätten wir z.B. wie folgt vorgehen können:

Definition (Reformulierung)

Der *Wahrheitswert* $[\![A]\!]^g$ einer aussagenlogischen Formel A *nach* einem Modell g wird durch folgende Induktion bestimmt:

$$[\![p]\!]^g = g(p), \text{ wenn } p \in AT;$$
$$[\![\neg(A)]\!]^g = 1 - [\![A]\!]^g;$$
$$[\![(A \wedge B)]\!]^g = [\![A]\!]^g \cdot [\![B]\!]^g.$$

Wir hatten bereits erwähnt, dass die Verteilung der Wahrheitswerte unter atomaren Formeln vollkommen beliebig ist; die Wahrheitswerte komplexer Formeln sind dagegen nicht ganz so frei. Insbesondere gib es Formeln, die nach keinem Modell wahr sind, und solche, die nach jedem Modell wahr sind.

Definitionen

Es sei A eine aussagenlogische Formel.

(a) A ist *tautologisch* (oder eine *Tautologie*), wenn A nach jedem aussagenlogischen Modell g den Wahrheitswert $[\![A]\!]^g = 1$ hat.

(b) A ist *widersprüchlich* (oder *kontradiktorisch*), wenn A nach jedem aussagenlogischen Modell g den Wahrheitswert $[\![A]\!]^g = 0$ hat.

(c) A ist *kontingent*, wenn A weder tautologisch noch widersprüchlich ist.

Atomare Formeln sind also kontingent, während z.B. Formeln der Form '$(A \wedge (\neg A))$' widersprüchlich sind. Zwischen den in (a) und (b) definierten Begriffen gibt es einen einfachen Zusammenhang: eine Formel ist kontradiktorisch, wenn ihre Negation tautologisch ist, und umgekehrt. Es gibt – wie man sich leicht überlegt – unendlich viele Tautologien. Man prüft z.B. leicht anhand der Wahrheitstafeln nach, dass Aussagen der Form '$\neg(A \wedge (\neg A))$' in jedem Modell wahr sind – und egal, was die Aussage A ist. Das gleiche gilt vom Schema '$(A \vee (\neg A))$'. Dabei muss man natürlich die Disjunktionen '$(A \vee B)$' als Abkürzungen auffassen:

Abkürzungskonvention

Es seien A, B und C beliebige Aussagen. Dann stehen '$(A \vee B)$', '$(A \to B)$' und '$(A \leftrightarrow B)$' für die Aussagen '$(\neg (A) \wedge \neg (B))$', '$(\neg (A \wedge (\neg B))$' bzw. '$((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))) \}$'.

Man prüft leicht nach, dass diese Konventionen den im vorangehenden Abschnitt gegebenen Wahrheitstafeln entsprechen. Zum Beispiel reduziert sich die dritte Formel (nach Entwicklung der Disjunktion) auf die Negation der Formel ' $(\neg (A \wedge B) \wedge \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$ ', die unter einer Belegung g den Wahrheitswert $[\![A]\!]^g + [\![B]\!]^g - 2[\![A]\!]^g[\![B]\!]^g$ hat (wie man mit ein bisschen Schularithmetik nachrechnet) – der genau dann 1 ist, wenn A und B einen verschiedenen Wahrheitswert haben.

Bevor wir weitere Tautologien kennenlernen, brauchen wir noch ein paar allgemeine Begriffe:

Definitionen

(a) Ein aussagenlogischen Modell g ist eine *Realisierung* einer Menge Γ von aussagenlogischen Formeln, falls für jedes $B \in \Gamma$ gilt: $[\![B]\!]^g = 1$.
(b) Γ *impliziert* A (oder: A *folgt aus* Γ), falls für alle Realisierungen g von Γ gilt: $[\![A]\!]^g = 1$.
(c) Eine Formel B *impliziert* A, falls A aus der Einermenge $\{B\}$ folgt.
(d) Zwei Formeln A und B sind *logisch äquivalent*, falls A aus B folgt und umgekehrt.

Satz 10

Für alle aussagenlogischen Formeln A und B gilt:
(i) A ist eine Tautologie gdw. A aus Ø folgt.
(ii) B folgt aus A gdw. $(A \to B)$ eine Tautologie ist.
(iii) A und B sind logisch äquivalent gdw. $(A \leftrightarrow B)$ tautologisch ist.
(iv) Logische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelalation (auf *Wff*).

Beweis

ad (i): Das liegt daran, dass *jedes* Modell eine Realisierung der leeren Menge ist, denn in jedem Modell wird jedes Element der leeren Menge wahr! Aus Ø zu folgen heißt aber gerade, in jeder Realisierung der leeren Menge wahr zu sein, also in jedem Modell.
ad (ii): Wenn ("$\Rightarrow$") B aus A folgt und g ein beliebiges Modell ist, gibt es zwei Möglichkeiten: entweder g ist eine Realisierung von A, womit B wahr sein muss und damit (wegen der Wahrheitstafel der materialen Implikation) auch $[\![(A \to B)]\!]^g = 1$; oder g ist keine Realisierung von A, d.h. $[\![A]\!]^g = 0$, woraus (ebenfalls mit Wahrheitstafel folgt, dass $[\![(A \to B)]\!]^g = 1$.

Wenn ("$\Leftarrow$") $(A \to B)$ tautologisch ist und g eine Realisierung von $\{A\}$ ist, ist $[\![A]\!]^g = 1$; wäre $[\![B]\!]^g = 0$, wäre (wegen der Wahrheitstafel) auch $[\![(A \to B)]\!]^g = 0$. was nicht sein kann, weil $(A \to B)$ tautologisch ist. Also ist $[\![B]\!]^g = 1$.

ad (iii): Das liegt an der Wahrheitstafel der materialen Äquivalenz: $(A \leftrightarrow B)$ ist gerade nach den Modellen g wahr, nach denen A und B denselben Wahrheitswert haben: $[\![(A \leftrightarrow B)]\!]^g = 1$ gdw. $[\![A]\!]^g = [\![B]\!]^g$. Also ist $(A \leftrightarrow B)$ gerade dann tautologisch, wenn A und B nach allen Modellen jeweils denselben Wahrheitswert haben, d.h. wenn für alle g gilt: $[\![A]\!]^g = [\![B]\!]^g$, was gerade bedeutet, dass Aund B logisch äquivalent sind.

ad (iv): Sei F die *Interpretationsfunktion*, die jeder aussagenlogischen Formel A die Funktion $[\![A]\!]$ zuweist (wobei $[\![A]\!](g) = [\![A]\!]^g$). Dann besagt (iii), dass aussagenlogische Äquivalenz die Wertgleichheit zu F ist: $F(A) = F(A)$ gdw. (wegen der Extensionalität) für alle g gilt: $[\![A]\!]^g = [\![A]\!]^g$. Wie jede Wertgleichheit ist auch die zu F eine Äquivalenzrelation.

4.5 Tautologien

Hier sind zunächst ein paar der bekanntesten Tautologien, die allesamt verkappte Äquivalenzen sind, also Aussagen der Form $(A \leftrightarrow B)$:

Satz 11 a)

Es seien A, B und C beliebige Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen tautologisch:

- $(A \wedge A) \leftrightarrow A$ — Idempotenz von $\wedge$
- $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ — Kommutativität von $\wedge$
- $(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ — Assoziativität von $\wedge$
- $(A \vee A) \leftrightarrow A$ — Idempotenz von $\vee$
- $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ — Kommutativität von $\vee$
- $(A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ — Assoziativität von $\vee$
- $(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ — Distributivgesetz
- $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ — Distributivgesetz

Beweis

Das können Sie selbst nachrechnen, mit Wahrheitstafeln.

Die Tautologien in Satz 11a) weisen eine auffällige Ähnlichkeit zu einigen der mengentheoretischen Gleichungen in Satz 1 auf: wo immer dort ein Gleichheitszeichen stand, steht hier eine materiale Äquivalenz, wo immer dort eine Vereinigung stand, steht hier eine Disjunktion, und wo immer dort ein Schnitt stand, steht hier ein Konjuktion. Diese Übereinstimmung ist natürlich kein Zufall. Schnitt und Vereinigung wurden ja mit *und* und *oder* definiert, also durch Konjunktion und Disjunktion; und die materiale

Äquivalenz ist eine Gleichheit der Wahrheitswerte. Die mengentheoretischen Gleichungen erweisen sich so als Reflexe der Wahrheitstafeln; denn die zur Definition von Mengen benutzte Sprache enthält die üblichen aussagenlogischen Junktoren, die den üblichen aussagenlogischen Gesetzen folgen.

Machen wir uns den Zusammenhang an einem Beispiel klar. Um das erste Distributivitätsprinzip der Mengenlehre zu beweisen, muss man zeigen, dass für beliebige Mengen A, B, C und Objekte x gilt:
(!) $x \in A \cup (B \cap C)$ gdw. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Nach Definition der Vereinigung bedeutet die linke Seite von (!): $x \in A$ oder $x \in (B \cap C)$, was wiederum – wegen der Definition des Schnitts – bedeutet: entweder $x \in A$ oder: sowohl $x \in B$ als auch: $x \in C$. (Die Formulierung *entweder … oder* erspart uns hier die Klammern!) Ähnlich lässt sich die rechte Seite reduzieren. Zu zeigen ist also:
(!!) Entweder $x \in A$ oder: sowohl $x \in B$ als auch: $x \in C$ gilt genau dann, wenn sowohl (a) als auch (b) gilt: $x \in A$ oder $x \in B$; $x \in A$ oder $x \in C$.
Interpretiert man nun die in (!!) benutzten Ausdrücke als aussagenlogische Junktoren, ergibt sich die Gültigkeit von (!!) aufgrund der Wahrheitstafeln – als Spezialfall des ersten aussagenlogischen Distributivgesetzes.

Einige der Gleichungen aus Satz 1 haben keine Pendants in Satz 11a). Es handelt sich um die Gesetze (LS) und (LV) zu Vereinigung und Schnitt mit Ø sowie die beiden Gleichungen zur Differenz. Drei von ihnen nehmen auf die leere Menge Bezug; um sie auf aussagenlogische Gesetze zu reduzieren, muss man sich nur klarmachen, das für beliebiges x die Bedingung für die Zugehörigkeit zu Ø widersprüchlich ist: $x \in$ Ø gdw. es regnet und nicht regnet – denn beide Aussagen sind sowieso falsch. In der Sprache der Aussagenlogik benutzt man eine Abkürzung für eine solche widersprüchliche Aussage:

Abkürzungskonvention

'$\bot$' steht für '$(p \wedge (\neg p))$', wobei p eine beliebige (feste) atomare Formel ist.
'$\top$' steht für '$\neg \bot$'.

Beobachtung

$\bot$ ist widersprüchlich, $\top$ ist tautologisch.

Da außerdem für beliebige x und Mengen A und B gilt, dass $x \in A \setminus B$ gdw. $x \in A$ und nicht $x \in B$, ergeben sich die folgenden Pendants zu den fehlenden Gleichungen aus Satz 1:

Satz 11 b)

- $(A \wedge \bot) \leftrightarrow \bot$
- $(A \vee \bot) \leftrightarrow A$
- $(A \wedge (\neg A)) \leftrightarrow \bot$
- $(A \wedge (\neg \bot)) \leftrightarrow A$

Auch die Mengengleichungen in Satz 3 sind im wesentlichen aussagenlogischer Natur. Um sie auf entsprechende Tautologien zurückzuführen, muss man sich klarmachen, dass die Voraussetzung, dass man nur Teilmengen eines gegebenen Universums U betrachtet, aussagenlogisch auf eine Beschränkung des Möglichkeitsspielraums – der Modelle – hinausläuft: für beliebiges x ist die Aussage '$x \in U$' sowieso wahr und verhält sich insofern wie die Tautologie $\top$. Ebenso laufen Aussagen der Form '$x \in U$ *und* …' auf die Aussage A allein hinaus und umgekehrt. (WIESO?) Insbesondere heißt also für solche x und beliebige Teilmengen A von U die Aussage '$x \in \bar{A}$' dasselbe wie '$x \notin A$', d.h.: '*nicht:* $x \in A$'. Damit ergibt sich die folgende aussagenlogische Entsprechung von Satz 3:

<u>Satz 11 c)</u>

- $\neg\bot \leftrightarrow \top$
- $\neg\top \leftrightarrow \bot$
- $(A \wedge \top) \leftrightarrow A$
- $(A \vee \top) \leftrightarrow \top$
- $(A \vee \neg A) \leftrightarrow \top$
- $(A \wedge \neg A) \leftrightarrow \bot$
- $\neg (A \vee \neg A) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- $\neg (A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Schließlich gibt es noch einige Tautologien, die nicht so direkt mit den mengentheoretischen Gleichungen entsprechen, obwohl sich bei näherem Hinsehen Zusammenhänge ergeben, auf die wir hier nicht weiter eingehen:

<u>Satz 11 d)</u>

- $A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \top)$
- $(A \vee \neg A)$ — Tertium non datur [Bivalenzprinzip]
- $(\neg A) \leftrightarrow (A \rightarrow \bot)$
- $(\neg A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \bot)$
- $\neg (A \wedge \neg A)$ — Satz vom Widerspruch
- $A \leftrightarrow (\neg (\neg A))$
- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$
- $A \rightarrow A$
- $(A \rightarrow \top)$
- $(\bot \rightarrow A)$ — ex falso quodlibet
- $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A))$ — Kontraposition
- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$
- $((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$
- $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ — Peircesche Formel

Die Peircesche Formel ist besonders überraschend – und spielt eine wichtige Rolle in der Axiomatisierung der Logik sowie in der Abgrenzung der sog. *klassischen Aussagenlogik* von ihren Alternativen.

AUFGABE

(i) **Zeigen Sie anhand von Wahrheitstafeln, dass die letzten drei Formeln in Satz 11d) in der Tat Tautologien sind.**

(ii) **Welche dieser Tautologien entsprechen den beiden ersten Beobachtungen über die Teilmengenbeziehung aus Satz 2 ? Wie kommt der Zusammenhang zustande?**

5. Prädikatenlogik

5.1 Vorüberlegungen

Bei der gleich einzuführenden Prädikatenlogik handelt es sich um eine Erweiterung der Aussagenlogik, die es gestattet, weitere logische Zusammenhänge zwischen einzelnen Aussagen darzustellen. Betrachten wir dazu ein paar Beispiele. Die beiden folgenden Sätze sind müssen – das gebietet die Logik – wahr sein:

- *Fritz kennt Eikes Telefonnummer, oder Hans kennt Eikes Telefonnummer, oder weder Fritz noch Hans kennen Eikes Telefonnummer.*
- *Die Fritz bekannten Telefonnummern sind nicht die Nummern gerade derjenigen Personen, die ihre eigene Telefonnummer nicht kennen.*

Wäre der erste Satz falsch, träfe keine der drei genannten Möglichkeiten zu; insbesondere wäre es also falsch, dass weder Fritz noch Hans Eikes Nummer kennen, was wiederum heißt, dass etnweder Fritz oder Hans sie kennt – und somit eine der beiden ersten Möglichkeiten zuträfe. Die Annahm, der erste Satz wäre falsch, führt also in einen glatten Widerspruch. Das gleiche gilt – weniger offensichtlich – für den zweiten Satz. Wäre er nämlich falsch, würde Fritz genau die Telefonnummern der Leute kennen, die sich an ihre eigene Nummer nicht wissen. Aber dann müsste er seine eigene Nummer zugleich kennen und nicht kennen: er muss sie einerseits kennen, weil er sonst dem Kreis vergesslicher Personen angehören würde, deren Nummern er kennt; er kann sie andererseits nicht kennen, weil er sonst dem genannten Personenkreis nicht angehört und somit nicht zu den Personen, deren Nummer er kennt. (Das gleiche Argument haben wir schon einmal gesehen, im Zusammenhang mit der Russellschen Antinomie!)

Die Tatsache, dass der erste Satz wahr sein muss, lässt sich mit aussagenlogischen Mitteln einsehen; bei geeigneter Formalisierung handelt es sich einfach um eine Tautologie:

AUFGABE

Übertragen Sie den ersten Satz in eine aussagenlogische Formel und zeigen Sie, dass diese Formel tautologisch ist.

Der zweite Satz entspricht keiner aussagenlogische Tautologie. Er lässt sich zwar in die grobe Form '$\neg A$' bringen, aber die – nach dem obigen Argument widersprüchliche – Aussage A selbst lässt sich mit aussagenlogischen Mitteln nicht weiter analysieren. Genau hier setzen die Ausdrucksmittel der Prädikatenlogik ein, die es gestatten, nicht nur komplette Aussagen miteinander zu kombinieren, sondern auch Aussagen in ihre Teile zu zerlegen. Der Nachweis, dass die zweite Aussage nicht falsch sein kann, kommt ohne eine solche Zerlegung offenbar nicht aus, denn er nimmt Bezug auf die Bestandteile dieser Aussage (*Telefonnummer, kennen* etc.).

Um zu sehen, wie in der Prädikatenlogik Aussagen in ihre Bestandteile zerlegt werden, betrachten wir zunächst ein einfacheres Beispiel. Der Satz (*) *Fritz kennt Eike* besteht aus drei Wörtern und besagt, dass die durch das erste Wort bezeichnete Person in einer durch das zweite Wort bezeichneten Beziehung zu der durch das dritte Wort bezeichneten Person steht. Dieser Typ von Aussage, die eine bestimmte Anzahl von Individuen in eine bestimmte Beziehung zueinander setzt, heißt in der Prädikatenlogik eine *(elementare) Prädikation*. Ganz allgemein geht man bei der prädikatenlogischen *Formalisierung* – der Übertragung umgangs- oder wissenschaftssprachlicher Aussagen in prädikatenlogische Formeln – davon aus, dass die Beziehungen, in denen Individuen zueinander stehen, durch spezielle Ausdrücke bezeichnet werden – die *Prädikate*, die dem Unternehmen seinen Namen geben. Für die Formalisierung von (*) benötigt man also erst einmal ein Prädikat, welches die Beziehung des Kennens ausdrückt. Prädikate werden wir im folgenden für gewöhnlich durch fettgedruckte Großbuchstaben repräsentieren, in diesem Fall durch ein '**K**'. Weiterhin brauchen wir offenbar Ausdrücke, mit denen man sich auf die in die genannte Beziehung gesetzten Individuen beziehen kann, also so etwas wie Namen oder, wie man in der Prädikatenlogik sagt: *Individuenkonstanten*, die wir für gewöhnlich durch fettgedruckte Kleinbuchstaben repräsentieren werden, in diesem Fall als '**f**' und '**e**'. Um den Satz (*) zu formalisieren, muss man nun nur noch festlegen, wie sich ein Prädikate und Individuenkonstanten zu Aussagen verbinden. Das geschieht, indem man die Individuenkonstanten auflistet, in runde Klammern einschließt und der eingeklammerten Liste das Prädikat voranstellt. Die prädikatenlogische Formalisierung von (*) ist demnach: '**K**(**f**,**e**)'. Man beachte, dass die Reihenfolge der Individuenkonstanten hier wichtig ist. Die Formel '**K**(**e**,**f**)' besagt, dass Eike Fritz kennt, was nicht unbedingt dasselbe ist wie (*).

Nicht jede Beziehung besteht zwischen *zwei* Individuen. Wir hatten schon in der Mengenlehre gesehen, dass es auch drei-, vier- und im allgemeinen *n*-stellige Relationen gibt, und so geht man auch in der Prädikatenlogik davon aus, dass jedem Prädikat eine bestimmte *Stelligkeit* zukommt, ist eine Zahl, die besagt, wie viele Individuen in der durch das Prädikat ausgedrückten Beziehung zueinander stehen. '**K**' ist demnach ein zweistelliges Prädikat, ebsno das Prädikat '**T**', das die Beziehung zwischen einer Person und ihrer Telefonnummer ausdrückt, während der Präposition *zwischen* ein dreistelliges Prädikat '**Z**' entspricht. Einstellige Prädikate gibt es natürlich auch: '**P**' drückt die Eigenschaft, Person zu sein aus. Im allgemeinen bilden also aus ein *n*-stelliges Prädikat und *n* Individuenkonstanten eine prädikatenlogische Formel. Selbstverständlich müssen diese Individuenkonstanten nicht voneinander verschieden sein – '**K**(**f**,**f**)' besagt z.B., dass Fritz sich selbst kennt. Aber es müssen gerade so viele sein, wie das Prädikat verlangt. Ein spezielles zweistelliges Prädikat ist das der *Identität*, das in der Prädikatenlogik durch '=' notiert wird; statt '=(**f**,**f**)' schreibt man wie in der Metasprache '(**f** = **f**)'.

Elementare Prädikationen lassen sich mit aussagenlogischen Mittelen miteinander verbinden. So ist z.B. '$(\mathbf{P}(\mathbf{e}) \wedge \neg\, \mathbf{K}(\mathbf{f},\mathbf{e}))$' eine prädikatenlogische Formel, die besagt, dass Eike eine Person ist, die Fritz nicht kennt. Für die Formalisierung des weiter oben betrachteten Telefonnummer-Beispiels reichen allerdings aussagenlogische Kombinationen elementarer Prädikationen nicht aus. Denn dort wurde Fritz nicht mit einer bestimmten Nummer in die Beziehung '**T**' gesetzt, sondern es wurde stattdessen eine allgemeine Aussage über die Nummern gemacht, zu denen er in dieser Beziehung steht. Allgemeine Aussagen in diesem Sinne nennt man in der Prädikatenlogik *Quantifikationen*. Genauer gesagt ist eine Quantifikation eine Aussage über die Menge aller Individuen, die eine bestimmte Formel *erfüllen*, auf die diese Formel zutrifft. Zum Beispiel ist die Aussage, dass Fritz jemanden, also eine Person, kennt, eine solche Quantifikation, denn sie besagt, dass die Menge der Personen, die die Formel '$(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$' [an der durch '$x$' markierten Stelle] erfüllen, nicht leer ist. Diese Art Quantifikation, nach der die eine Formel [an einer Stelle] erfüllenden Individuen eine nicht-leere Menge bilden, heißt in der Logik *Existenzquantifikation*, denn sie besagt ja, dass es eine bestimmte Art von Individuum wirklich gibt, dass sie also existiert. Die Existenzquantifikation wird prädikatenlogisch ausgedrückt, indem man die entsprechende Stelle[n] der Formel mit einer Variablen (x, y, …) markiert, und diese Variable gemeinsam mit dem Symbol '$\exists$' in Klammern vor die Formel schreibt. Die genannte Aussage, nach der Fritz jemanden kennt, lässt sich also prädikatenlogisch formalisieren als: '$(\exists\, x)\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$'. Das Symbol '$\exists$' heißt *Existenzquantor*, und wird oft gelesen als "es gibt ein …".

Existenzquantifikationen lassen sich wiederum miteinander und mit aussagenlogischen Mitteln kombinieren. So sind z.B. die folgenden Symbolfolgen prädikatenlogische Formeln:

(i)	$\neg\, (\exists\, x)\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$
(ii)	$\neg\, (\exists\, x)\ \neg\, (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$
(iii)	$\neg\, (\exists\, x)\ \neg\, \neg\, (\mathbf{P}(x) \wedge \neg\, \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$
(iv)	$(\exists x)\ ((\mathbf{P}(x) \wedge \neg\, (\exists y)\ \neg\, (\mathbf{P}(y) \rightarrow \mathbf{K}(x,y)))$
(v)	$(\exists y)\ ((\mathbf{P}(y) \wedge \neg\, (\exists x)\ \neg\, (\mathbf{P}(x) \rightarrow \mathbf{K}(y,x)))$
(vi)	$(\exists x)\ ((\neg\, \mathbf{P}(x) \wedge \neg\, (\exists y)\ \neg\, (\mathbf{P}(y) \rightarrow \mathbf{K}(y,x)))$

Die Formel (i) ist schlicht die Negation der zuvor betrachteten Aussage und besagt dementsprechend, dass Fritz niemanden kennt, dass also die Menge der Personen, die die Formel '$(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$' [an der durch '$x$' markierten Stelle] erfüllen, leer ist. (i) ist demnach wieder eine Quantifikation, aber keine Existenzquantifikation, sondern das Gegenteil einer solchen. Aber sie lässt sich auf eine Existenzquantifikation (und Negation) zurückführen. Alle Quantifikationen der Prädikatenlogik werden in diesem Sinne auf Existenzquantifikationen zurückgeführt – ähnlich, wie alle Junktoren der Aussagenlogik auf Konjunktion und Negation zurückgeführt werden.

Die Formel (ii) ist ein anderer Fall von zurückführbarer Quantifikation. Sie besagt, dass es kein Individuum gibt, das nicht sowohl eine Person ist als auch Fritz kennt, dass m.a.W. alle Individuen Personen sind und Fritz kennen. Diese Aussage ist natürlich falsch: Bill Clinton ist z.B. eine Person, kennt aber Fritz nicht; und mein Bleistift ist weder eine Person noch kennt er Fritz. Man nenn diese Art von Quantifikation *Allquantifikation*, weil sie besagt, dass alle Individuen eine bestimmte Formel – in diesem Fall: '$(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$'– erfüllen. Im allgemeinen wird Allquantifikation durch Negation der Existenzquantifikation der negierten Formel ausgedrückt: '$\neg (\exists x) \neg \varphi$' besagt, dass es kein Individuum gibt, das nicht φ erfüllt, dass also alle Individuen φ erfüllen. Aussagen dieser Form werden in der Prädikatenlogik abgekürzt durch '$(\forall x)\ \varphi$', wobei '$\forall$' *Allquantor* heißt und meist als *für alle* gelesen wird. (Wir werden ab jetzt kleine griechische Buchstaben als Variablen für prädikatenlogische Formeln verwenden.)

Nicht jede Allquantifikation ist dermaßen offensichtlich falsch wie (ii). (iii) z.B. besagt, dass für alle Individuen gilt, dass sie nicht sowohl Personen sind als auch Fritz nicht kennen. Danach unterteilt sich der Bereich aller Individuen in diejenigen die keine Personen sind und diejenigen, die Fritz kennen, wobei sich diese Bereiche überlappen können. (Eine Umformung nach de Morgan macht das deutlicher: (iii) ist aussagenlogisch äquivalent zu '$\neg (\exists x) \neg (\neg \mathbf{P}(x) \vee \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$'.) Damit besagt (iii) gerade, dass *jede Person Fritz kennt*. Das mag zwar auch falsch sein, zeigt aber, wie man im allgemeinen Aussagen der Form *Jedes P ist Q* formalisiert, und solche Aussagen sind natürlich häufig wahr. In der Praxis bedient man sich bei der Formalisierung von Allaussagen wie (iii) des Allquantors und der materialen Implikation und schreibt: '$(\forall x)\ (\mathbf{P}(x) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$' – denn auch diese Formel ist äquivalent zu (iii).

Die letzte Formel darf nicht mit '$(\forall x)\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$' verwechselt werden, was zu (ii) äquivalent ist. Im allgemeinen müssen also Aussagen der Gestalt *Jedes P ist Q* als '$(\forall x)\ (\mathbf{P}(x) \rightarrow \mathbf{Q}(x))$' formalisiert werden und nicht etwa als '$(\forall x)\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x))$' – was besagen würde, dass alle Individuen sowohl *P* als auch *Q* sind!

Die Formel (iv) zeigt, dass man Quantifikationen wieder ineinander schachteln kann. In diesem Fall haben wir es mit einer Existenzquantifikation über einer Allquantifikation zu tun. Die Formel besagt, dass die Menge der Individuen, die sowohl Personen sind als auch die Formel '$(\forall y)\ (\mathbf{P}(y) \rightarrow \mathbf{K}(x,y))$' [an der Stelle x] erfüllen, nicht leer ist. Letzteres heißt wiederum, dass jede Person so ist, dass x sie kennt. Insgesamt besagt damit (iv), dass es Personen – oder mindestens eine Person – gibt, die jede Person kennen.

Die Formel (v) soll illustrieren, dass der Wahl der Variablen keine Bedeutung zukommt: es handelt sich zwar um eine andere Formel als (iv), aber eine, die trivialerweise äquivalent zu ihr ist. Man spricht hier von *alphabetischen Varianten*.

<u>AUFGABE</u>
Erklären Sie umgangssprachlich, was die Formel (vi) besagt.

Mit der Prädikation und der Existenzquantifikation haben wir schon alle genuin prädikatenlogischen Ausdrucksmittel kennengelernt – der Rest ist Aussagenlogik. Wir kommen nun zu einer exakteren Beschreibung der Syntax der Prädikatenlogik.

5.2 Die Sprache der Prädikatenlogik

Ähnlich wie in der Aussagenlogik werden wir – ausgehend von einem Inventar von Grundsymbolen – zunächst induktiv die Menge der prädikatenlogischen Formeln definieren, bevor wir diesen dann Wahrheitswerte zuweisen. Allerdings werden sich die syntaktischen Definitionen als etwas komplexer erweisen, was mit der Rolle der Variablen in der Prädikatenlogik zusammenhängt.

Die *Grundsymbole* der Prädikatenlogik sind:

- für jede Zahl *n* eine (möglicherweise leere) Menge *n*-stelliger Prädikate $Pred_n$, so dass gilt: '=' $\in Pred_2$;
- eine (möglicherweise leere) Menge von Individuenkonstanten *Con*;
- eine (abzählbar) unendliche Menge von Variablen *Var*;
- die logischen Symbole:'¬', '∧', und '∃';
- die Hilfssymbole '(', ')' und ','.

Die genaue Menge der Prädikate und Individuenkonstanten und Individuenkonstanten hängt vom jeweiligen Formalisierungszweck ab und wird deswegen hier nicht weiter spezifiziert. Die Identität wird manchmal auch als logisches Symbol betrachtet.

Um eine systematische Definition des Formelbegriffs zu ermöglichen, muss man grundsätzlich entscheiden, wie man die Variablen behandelt. Ein Beispiel soll dies illustrieren. Die prädikatenlogische Formel '$(\exists x)$ $(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$' besteht oberflächlich betrachtet aus der Existenzquantifikation '$(\exists x)$'und der sog. *Matrix* '$(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$'. Letztere ist allerdings insofern eine seltsame Formel, als sie eine Variable *x* enthält, die nicht die für eine Quantfikation markierte Stelle vertritt. Damit erhebt sich die Frage, ob man so etwas wie '$(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$' überhaupt als prädikatenlogische Formel betrachten will. Es gibt keine richtige Antwort auf diese Frage; vielmehr handelt es sich um eine Frage der Konvention. Wir werden hier ein wenig von den üblichen Lehrbuchtexten abweichen und Formeln wie '$(\exists x)$ $(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$' zwar als wohlgeformt, aber *uninterpretierbar* betrachten, was bedeutet, dass ihnen kein Wahrheitswert zugewiesen werden kann. Interpretierbarkeit setzt nämlich immer voraus, dass sich jede Variable auf einen Quantor zurückbezieht oder, wie man in der Logik sagt, (von einem Quantor) *gebunden* ist. Zunächst definieren wir also einen Begriff von Formel, der auch *freie*

Variablen zulässt, und dann sagen wir genau, was es heißt, interpretierbar (in logischer Terminologie: *geschlossen*) zu sein.

<u>Definition</u>

(a) Es sei $n \geq 1$, $R \in Pred_n$ und $t_1,\ldots,t_n \in Con \cup Var$. [‘*t*’ erinnert an ‘Term’.] Dann ist ‘$R(t_1,\ldots,t_n)$’ eine *elementare Prädikation*. *EL* sei Menge der elementare Prädikationen.
(b) Für jede Zahl *n* wird die Menge Fml_n der *offenen prädikatenlogischen Formeln der Komplexität n* wie folgt induktiv bestimmt:
• $Fml_0 = EL$;
• $Fml_{n+1} = Fml_n \cup \{$‘$\neg\, \varphi$’ $\mid \varphi \in Fml_n\} \cup \{$‘$(\varphi \wedge \psi)$’ $\mid \varphi \in Fml_n$ & $\psi \in Fml_n\} \cup \{$‘$(\exists x)\varphi$’ $\mid \varphi \in Fml_n\}$.
(c) Die Menge der *offenen prädikatenlogischen FormelnWff* ist:

$$\{\varphi \mid \text{es gibt ein } n, \text{ so dass } \varphi \in Fml_n\} \; (= \bigcup_n Fml_n).$$

(d) Die Abkürzungskonventionen für Junktoren übertragen sich aus der Aussagenlogik; außerdem ist (für beliebige Formeln φ und Variablen *x*) ‘$(\forall x)\, \varphi$’ eine Abkürzung für die Formel ‘$\neg\, (\forall x)\, \neg\, \varphi$’.

Nach dieser Definition ist etwa ‘$(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$’$\in Fml$. Um Formeln wie diese als nicht-interpretierbar zu brandmarken, geben wir eine (induktive) Hilfsdefinition, die für jede Formel die in *frei* ihr vorkommenden Variablen angibt, also diejenigen Variablen, die sich nicht auf einen Quantor zurückbeziehen:

<u>Definition</u>

(a) Für jede Formel $\varphi \in Fml$ wird die Menge $Fr(\varphi)$ der *in* φ *freien Variablen* durch folgende Induktion (über φ’s Komplexität) bestimmt:
• $Fr($‘$R(t_1,\ldots,t_n)$’$) = \{t_1,\ldots,t_n\} \cap Var$;
• $Fr($‘$\neg\, \varphi$’$) = Fr(\varphi)$;
• $Fr($‘$(\varphi \wedge \psi)$’$) = Fr(\varphi) \cap Fr(\psi)$;
• $Fr($‘$(\exists x)\varphi$’$) = Fr(\varphi) \setminus \{x\}$.
(b) Eine prädikatenogische Formel $\varphi \in Fml$ ist *geschlossen*, falls gilt: $Fr(\varphi) = \varnothing$.
Die Definition in (a) folgt der Induktion über die Komplexität, auch wenn dies nicht eigens vermerkt wird. Zukünftige Induktionen werden ebenfalls in diesem vereinfachten Format gegeben werden.

In einer elementaren Prädikation sind demnach alle Variablen frei, weil es ja keinen Quantor gibt, der sie binden könnte. Die freien Variablen von Negationen und Konjunktionen sind gerade die freien Variablen der negierte bzw. konjugierten Formeln, weil alle Bindungen innerhalb dieser stehen müssen. Und ein Quantor macht gerade die von ihm gebundene Variable unfrei; die anderen freien Variablen der Matrix bleiben frei.

Nach dieser Definition ist: $Fr($‘$(\exists x)\, (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$’$) = Fr($‘$(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$’$) \setminus \{x\} =$ $(Fr($‘$\mathbf{P}(x)$’$) \cup Fr($‘$\mathbf{K}(\mathbf{f},x)$’$)) \setminus \{x\} = (\{x\} \cup \{x\}) \setminus \{x\} = \varnothing$.

Wie in der Aussagenlogik ermittelt sich bei einer prädikatenlogischen Formel der Wahrheitswert induktiv über die Teile dieser Formel. Da nur geschlossenene Formeln Wahrheitswerte erhalten sollen, kann bei einer Quantifikation wie '$(\exists x)\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$' der Wahrheitswert nicht direkt auf den der Matrix '$(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$' zurückgeführt werden. Stattdessen wird man alle *Instanzen* der Form '$(\exists x)\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{f},x))$' betrachten, bei denen die vom Quantor gebundene Variable x durch eine Konstante ersetzt wurde. Bevor man den Wahrheitswert der Quantifikation auf die Matrix-Instanzen zurückführt, muss man aber zunächst letztere definieren, d.h. sagen, was es genau heißt, eine Variable durch eine Konstante zu ersetzen. Das geschieht in der folgenden

<u>Definition</u>

Für jede Formel $\varphi \in Fml$, Variable x und Individuenkonstante $\mathbf{a}$ wird *das Ergebnis der Ersetzung von* (freiem) *x durch* **a** in φ als '$[\varphi: x \to \mathbf{a}]$' geschrieben und wie folgt über den Aufbau von φ definiert:

- $[\mathbf{R}(t_1,\ldots,t_n): x \to \mathbf{a}] = \mathbf{R}(t_1^{'},\ldots,t_n^{'})$ und ,
  wobei jeweils gilt: $t_1^{'} = \mathbf{a}$, wenn $t_i = x$ und $t_i^{'} = t_i$, wenn $t_i \neq x$;
- $[(\neg\varphi): x \to \mathbf{a}] = [\varphi: x \to \mathbf{a}]$;
- $[(\varphi \wedge \psi): x \to \mathbf{a}] = ([\varphi: x \to \mathbf{a}] \wedge [\psi: x \to \mathbf{a}])$;
- $[(\exists x)\ \varphi: x \to \mathbf{a}] = (\exists x)\ \varphi$;
- $[(\exists y)\ \varphi: x \to \mathbf{a}] = (\exists y)\ [\varphi: x \to \mathbf{a}]$,
  wenn $y \neq x$ (d.h. y ist eine von x verschiedene Variable).

<u>AUFGABE</u>
Bestimmen Sie das Ergebnis der Ersetzung von freiem x durch 'a' in:

$(\exists y)\ (\mathbf{P}(x) \wedge (\exists x)\ \mathbf{K}(x,y))$.

<u>5.3 Die Deutung der prädikatenlogischer Formeln</u>

Um die Wahrheitswerte der geschlossenen prädikatenlogischen Formel festzulegen, muss man zunächst die Wahrheitswerte der elementaren Prädikationen definieren. Genau wie in der Aussagenlogik die Wahrheitswerte der atomaren Formeln modellabhängig sind, werden prädikatenlogische Modelle die Wahrheitswerte der elementare Prädikationen festlegen. Da ein n-stelliges Prädikat eine Beziehung zwischen n Individuen ausdrückt, entspricht ihm eine n-stellige Relation im Sinne der Mengenlehre. Welche Relation das ist, bestimmt das Modell; ebenso bestimmt es fest, auf welches Individuum sich eine gegebene Individuenkonstante bezieht. Die Modelle sind in ihren Festlegungen vollkommen frei, vorausgesetzt, die Rrelationen werden über einer festen Menge, dem *Universum* des Modells, interpretiert, dem auch die Individuen enstammen, auf die sich die Konstanten beziehen.

Ein prädikatenlogisches *Modell M* besteht demnach aus:

- einer Menge *U*, die nicht leer ist und
- einer Interpretatation $[\![\cdot]\!]^M$, die jedem nicht-logischen Grundsymbol (= jeder Individuenkonstante und jedem Prädikat) eine geeignete Extension zurordnet, d.h.:

  $[\![\mathbf{c}]\!]^M \in U$, wenn **c** eine Individuenkonstante ist;

  $[\![\mathbf{R}]\!]^M$ ist eine *n*-stellige Relation über *U*, wenn **R** ein *n*-stelliges Prädikat ist;

  $[\![=]\!]^M$ ist id_U (= $\{u,u) \mid u \in U\}$.

Eine induktive Definition erweitert nun $[\![\cdot]\!]^M$ auf alle geschlossenen Formeln der Prädikatenlogik. Damit allerdings die Quantifikationen die richtigen Wahrheitswerte bekommen, muss man zuvor die Sprache um genügend Individuenkonstanten erweitern. Wenn nämlich z.B. **P** ein einstelliges Prädikat ist $[\![\mathbf{P}]\!]^M = \{u\}$, soll die (geschlossene) Formel '$(\exists x)\ \mathbf{P}(x)$' wahr werden, weil die entsprechende Formel '**P**(**u**)' wahr ist, wobei **u** eine Konstante ist, die sich auf *u* bezieht: $[\![\mathbf{u}]\!]^M = u$. Dafür muss es aber eine solche Konstante geben. Um das zu garantieren, erweitert man für jedes Modell (provisorisch) die Sprache der Prädikatenlogik um je eine Konstante pro Element des Universums; wir gehen vereinfachend davon aus, dass diese *Modellkonstanten* mit den entsprechenden Elementen identisch sind:

<u>Definition</u>

Sei *M* ein Modell mit Universum *U* und sei $u \in U$. Dann ist *u* eine Individuenkonstante (der *Modellsprache von M*) und es gilt: $[\![u]\!]^M = u$.

Der *Wahrheitswert* $[\![\varphi]\!]^M$ einer prädikatenlogischen Formel φ nach dem Modell *M* bestimmt sich induktiv nach ihrer Komplexität:

- $[\![\mathbf{R}(t_1,\ldots,t_n)]\!]^M = \begin{cases} 1, \text{ falls } ([\![t_1]\!]^M,\ldots,[\![t_n]\!]^M) \in [\![\mathbf{R}]\!]^M \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$;
- $[\![(\neg\varphi)]\!]^M = 1 - [\![\varphi]\!]^M$;
- $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]^M = [\![\varphi]\!]^M \cdot [\![\psi]\!]^M$;
- $[\![(\exists x)(\varphi)]\!]^M = \begin{cases} 1, \text{ falls } \{u \mid u \in U \text{ und } [\![[\varphi\colon x \rightarrow u]]\!]^M = 1\} \neq \varnothing; \\ 0 \text{ sonst .} \end{cases}$

  (d.h.: $[\![(\exists x)(\varphi)]\!]^M = 1$ gdw . es ein $u \in U$ gibt , so dass gilt : $[\![[\varphi\colon x \rightarrow u]]\!]^M = 1$)

Beispiel

Sei M ein Modell mit Universum $U = \{0,1,2\}$, so dass für das zweistellige Prädikat **R** gilt: $[\![\mathbf{R}]\!]^M = \{(1,1), (2,2)\}$. Der Wahrheitswert der Formel '$\neg(\exists x)\neg\mathbf{R}(x,x)$' bestimmt sich dann wie folgt:

$[\![\neg(\exists x)\neg\mathbf{R}(x,x)]\!]^M = 1$

gdw. $[\![(\exists x)\neg\mathbf{R}(x,x)]\!]^M = 0$

gdw. es kein $u \in U$ gibt, so dass gilt: $[\![(\neg\mathbf{R}(x,x)): x \to u]\!]^M = 1$

gdw. es kein $u \in U$ gibt, so dass gilt: $[\![\neg\mathbf{R}(u,u)]\!]^M = 1$

– denn $(\neg\mathbf{R}(x,x)): x \to u = \neg(\mathbf{R}(x,x)): x \to u = \neg\mathbf{R}(u,u)$ –

gdw. es kein $u \in U$ gibt, so dass gilt: $[\![\mathbf{R}(u,u)]\!]^M = 0$

gdw. es kein $u \in U$ gibt, so dass gilt: $([\![u]\!]^M, [\![u]\!]^M) \notin [\![\mathbf{R}]\!]^M$

gdw. es kein $u \in U$ gibt, so dass gilt: $(u,u) \notin \{(1,1), (2,2)\}$

– was falsch ist, denn es gibt so ein u, nämlich die 0. Also ist $[\![\neg(\exists x)\neg\mathbf{R}(x,x)]\!]^M = 0$.

Die weiteren Definitionen sind analog zu denen der Aussagenlogik. Allerdings weichen Terminologie und Notation gelegentlich etwas ab. Statt von *tautologisch* spricht man z.B. in der Prädikatenlogik von *gültig*. Hier sind die zentralen

Definitionen

Es sei φ eine prädikatenlogische Formel.

(a) φ ist *gültig*, wenn φ nach jedem prädikatenlogischen Modell M den Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^M = 1$ hat.

(b) Ein prädikatenlogisches Modell M ist eine *Realisierung* einer Menge Γ von prädikatenlogischen Formeln, falls für jedes $\varphi \in \Gamma$ gilt: $[\![\varphi]\!]^M = 1$.

(c) Γ *impliziert* φ (Notation: '$\Gamma \models \varphi$'), falls für alle Realisierungen M von Γ gilt: $[\![\varphi]\!]^M = 1$.

(d) Eine Formel φ *impliziert* ψ (Notation: '$\varphi \models \psi$'), falls gilt: $\{\varphi\} \models \psi$.

(e) Zwei Formeln φ und ψ sind *logisch äquivalent*, falls $\varphi \models \psi \models \varphi$.

5.4 Formalisierung

Die folgenden Beobachtungen sind nützlich, wenn es darum geht, umgangssprachliche Aussagen prädikatenlogisch auszudrücken:

Satz 12

Es seien '**P**' und '**Q**' einstellige Prädikate, x eine Variable und M ein prädikatenlogisches Modell mit Universum U. Dann gilt:

(a) $[\![(\exists x)\,(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x))]\!]^M = 1$ gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M \cap [\![\mathbf{Q}]\!]^M \neq \varnothing$;

(b) $[\![(\forall x)\,(\mathbf{P}(x) \rightarrow \mathbf{Q}(x))]\!]^M = 1$ gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq [\![\mathbf{Q}]\!]^M$.

Beweis

ad (a):	$\llbracket (\exists x)\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)) \rrbracket^M = 1$	
gdw.	$\{u \mid u \in U \text{ und } \llbracket [(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x))\!: x \to u] \rrbracket^M = 1\} \neq \emptyset$	Def. $\llbracket\cdot\rrbracket^M$
gdw.	$\{u \mid u \in U \text{ und } \llbracket (\mathbf{P}(u) \wedge \mathbf{Q}(u)) \rrbracket^M = 1\} \neq \emptyset$	Def. $[\varphi\!: x \to u]$
gdw.	$\{u \mid u \in U \text{ und } \llbracket \mathbf{P}(u) \rrbracket^M = 1 \text{ und } \llbracket \mathbf{Q}(u) \rrbracket^M = 1\} \neq \emptyset$	Def. $\llbracket\cdot\rrbracket^M$
gdw.	$\{u \mid u \in U \text{ und } u \in \llbracket \mathbf{P} \rrbracket^M \text{ und } u \in \llbracket \mathbf{Q} \rrbracket^M\} \neq \emptyset$	Def. $\llbracket\cdot\rrbracket^M$
gdw.	$\{u \mid u \in U\} \cap \{u \mid u \in \llbracket \mathbf{P} \rrbracket^M\} \cap \{u \mid u \in \llbracket \mathbf{Q} \rrbracket^M\} \neq \emptyset$	Def. Schnitt
gdw.	$U \cap \llbracket \mathbf{P} \rrbracket^M \cap \llbracket \mathbf{Q} \rrbracket^M \neq \emptyset$	Komprehensionsprinzip
gdw.	$\llbracket \mathbf{P} \rrbracket^M \cap \llbracket \mathbf{Q} \rrbracket^M \neq \emptyset$	denn $\llbracket \mathbf{P} \rrbracket^M \cap \llbracket \mathbf{Q} \rrbracket^M \subseteq U$
ad (b):	$\llbracket (\forall x)\ (\mathbf{P}(x) \to \mathbf{Q}(x)) \rrbracket^M = 1$	
gdw.	$\llbracket \neg (\exists x)\ \neg\neg (\mathbf{P}(x) \wedge \neg\, \mathbf{Q}(x)) \rrbracket^M = 1$	Def. '$\forall$' und '$\to$'
gdw.	$\llbracket (\exists x)\ \neg\neg (\mathbf{P}(x) \wedge \neg\, \mathbf{Q}(x)) \rrbracket^M = 0$	Def. $\llbracket\cdot\rrbracket^M$
gdw.	$\{u \mid u \in U \text{ und } \llbracket [(\neg\neg (\mathbf{P}(x) \wedge \neg\, \mathbf{Q}(x)))\!: x \to u] \rrbracket^M = 1\} = \emptyset$	Def. $\llbracket\cdot\rrbracket^M$
gdw.	$\{u \mid u \in U \text{ und } \llbracket \neg\neg (\mathbf{P}(u) \wedge \neg\, \mathbf{Q}(u)) \rrbracket^M = 1\} = \emptyset$	Def. $[\varphi\!: x \to u]$
gdw.	$\{u \mid u \in U \text{ und } u \in \llbracket \mathbf{P} \rrbracket^M \text{ und } u \notin \llbracket \mathbf{Q} \rrbracket^M\} = \emptyset$	Def. $\llbracket\cdot\rrbracket^M$
gdw.	$\{u \mid u \in \llbracket \mathbf{P} \rrbracket^M \text{ und } u \notin \llbracket \mathbf{Q} \rrbracket^M\} = \emptyset$	$\llbracket \mathbf{P} \rrbracket^M \subseteq U$
gdw.	$\llbracket \mathbf{P} \rrbracket^M \subseteq \llbracket \mathbf{Q} \rrbracket^M$	Mengenlehre

Die beiden in Satz 12 genannten Formeln entsprechen also den umgangssprachlichen Formulierungen *Mindestens ein P ist Q* bzw. *Jedes P ist Q*. Damit entspricht dem indefiniten Artikel die Konstellation *Existenzquantor plus Konjunktion*, während dem Determinator *jedes* als *Allquantor plus materiale Implikation* formalisiert wird. (Wir hatten bereits weiter oben gesehen, dass die Konfiguration *Allquantor plus Konjunktion* etwas ganz anderes besagt.) Diese Zusammenhänge gelten auch, wenn es sich bei den zu formalisierenden Prädikaten um komplexe Ausdrücke handelt. So lässt sich z.B. der Satz *Jedes Kind besitzt (mindestens) einen Teddy* prädikatenlogisch durch die folgende Formel ausdrücken: '$(\forall x)\ (\mathbf{K}(x) \to \underline{(\exists y)\ (\mathbf{T}(y) \wedge \mathbf{B}(x,y))})$'. Der Unterschied zu der Formel in Satz 12 (b) ist lediglich, dass hier die elementare Prädikation '$\mathbf{Q}(x)$' durch die unterstrichene, komplexere Formel ersetzt wird, die als Formalisierung von *x besitzt (mindestens) einen Teddy* aufgefasst werden kann – wobei wieder dem indefiniten Artikel ein Existenzquantor samt Konjunktion entspricht. In der Tat: von stilistischen Feinheiten abgesehen ist dieser Satz ja auch von der Form *Mindestens ein P ist Q* – wenn man ihn passivisch ausdrückt.

Die genannten Formalisierungsrezepte funktionieren allerdings nicht immer. Insbesondere scheitern sie bei sogenannten *Eselssätzen*, in denen quantifizierende Nominalphrasen und Indefinita in bestimmten Konstellationen stehen, die eine

Formalisierung der letzteren als Existenzquantoren verbieten. Ein Beispiel ist der Satz *Jeder Bauer, der einen Esel hat, schlägt ihn*, der (in der relevanten Lesart) besagt, dass jedes Paar (u,v), so dass u ein Bauer ist, v ein Esel und u v besitzt, gilt, dass u v schlägt. (Mengentheoretisch lässt sich dieser Sachverhalt kompakt wiedergeben durch: $(B\times E) \cap H \subseteq S$!) Die folgende prädikatenlogische Formel bringt dies einigermaßen direkt zum Ausdruck:

(!) $\quad (\forall x)\ (\forall y)\ ((\mathbf{B}(x) \wedge \mathbf{E}(y) \wedge \mathbf{H}(x,y) \rightarrow \mathbf{S}(x,y))$

Die prädikatenlogische Formalisierung dieses Eselssatzes ist also an sich kein Problem. Aber der Satz lässt sich nicht so formalisieren, dass dem Indefinitum *einen Esel* ein Existenzquantor (incl. Konjunktion) entspricht. Insbesondere sind die folgenden Formeln keine adäquaten Formalisierungen:

$$(\forall x)\ (\mathbf{B}(x) \wedge (\exists y)\ (\mathbf{E}(y) \wedge \mathbf{H}(x,y)) \rightarrow \mathbf{S}(x,y))$$

$$(\forall x)\ (\mathbf{B}(x) \wedge (\exists y)\ (\mathbf{E}(y) \wedge \mathbf{H}(x,y) \wedge \mathbf{S}(x,y))$$

Die erste dieser beiden Formeln ist nicht einmal geschlossen (WIESO?) und hat also gar keinen Wahrheitswert; die zweite besagt, dass jeder Bauer mindestens einen Esel besitzt, den er schlägt, was – im Gegensatz zu der relevanten Lesart des Eselssatzes – nicht ausschließt, dass es Bauern gibt, die einige ihrer Esel nicht schlagen. Das Scheitern eines weiteren Formalisierungsversuchs dokumentiert die folgende

<u>AUFGABE</u>

Zeigen Sie, dass die folgende Formel keine adäquate Formalisierung des klassischen Eselssatzes (*Jeder Bauer, der einen Esel besitzt, schlägt ihn*) ist:

(?) $\quad (\exists y)\ (\mathbf{E}(y) \wedge (\forall x)\ (\mathbf{B}(x) \wedge \mathbf{H}(x,y) \rightarrow \mathbf{S}(x,y)))$

Geben Sie dazu ein Modell an, nach dem (!) und (?) unterschiedliche Wahrheitswerte haben.

Eselssätze kommen in vielen Varianten; ihnen ist gemeinsam, dass sich ein Indefinitum nicht wie ein Existenzquantor formalisieren lässt und dass sich ein Pronomen auf dieses Indefinitum zurückbezieht. Ein anderes, ähnliches Beispiel ist das Konditionalsatzgefüge *Wenn ein Bauer einen Esel besitzt, schlägt er ihn*. In der neueren Semantik spielen die Eselssätze eine Schlüsselrolle für die Interpretation von Nominalphrasen. Die folgende Aufgabe zeigt, dass der pronominale Rückbezug wichtig für das Scheitern der Formalisierung des obigen klassischen Eselssatzes ist:

<u>AUFGABE</u>

Geben Sie eine adäquate Formalisierung des Satzes *Jeder Bauer der einen Esel besitzt, ist reich*, nach der verschiedene Bauern verschiedene Esel besitzen können und bei der der indefinite Artike *einen* einem Existenquantor mit Konjunktion entspricht.

Für die Ausdrucksstärke der Prädikatenlogik – und damit auch für die Formalisierung – ist die *Identität* von besonderer Bedeutung. Viele Sachverhalte lassen sich nur durch eine prädikatenlogische Formeln ausdrücken, wenn diese das Symbol '=' enthält. Dies gilt insbesondere für präzisere Quantifikationen, in denen ausgesagt wird, dass ein bestimmtes

Prädikat auf eine bestimmte (positive) Zahl von Individuen zutrifft. Hier sind ein paar allgemeine Zusammenhänge:

<u>Satz 12 *(Forts.)*</u>

(c) $[\![(\exists x)\ (\exists y)\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{P}(y) \wedge \neg(x = y))]\!]^M = 1$ gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M$ mindestens 2 Elemente hat;

(d) $[\![(\forall x)\ (\mathbf{P}(x) \to (\forall y)\ (\mathbf{P}(y) \to (\forall z)\ (\mathbf{P}(z) \to ((x = z) \vee (y = z)))))]\!]^M = 1$ gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M$ höchstens 2 Elemente hat.

<u>Beweis</u>

<u>*ad (c)*</u>: $[\![(\exists x)\ (\exists y)\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{P}(y) \wedge \neg(x = y))]\!]^M = 1$

gdw. $\{u \mid u \in U$ und $[\![[(\exists y)\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{P}(y) \wedge \neg(x = y)): x \to u]]\!]^M = 1\} \neq \varnothing$ — Def. $[\![\cdot]\!]^M$

gdw. $\{u \mid u \in U$ und $[\![(\exists y)\ (\mathbf{P}(u) \wedge \mathbf{P}(y) \wedge \neg(u = y))]\!]^M = 1\} \neq \varnothing$ — Def. $[\varphi: x \to u]$

gdw. $\{u \mid u \in U$ und $\{v \mid v \in U$ und $[\![[(\mathbf{P}(u) \wedge \mathbf{P}(y) \wedge \neg(u = y)): y \to \mathrm{v}]]\!]^M = 1\} \neq \varnothing\} \neq \varnothing$ — Def. $[\![\cdot]\!]^M$

gdw. $\{u \mid u \in U$ und $\{v \mid v \in U$ und $[\![(\mathbf{P}(u) \wedge \mathbf{P}(v) \wedge \neg(u = v))]\!]^M = 1\} \neq \varnothing\} \neq \varnothing$ — Def. $[\varphi: x \to u]$

gdw. $\{u \mid u \in U$ und $\{v \mid v \in U$ und $u \in [\![\mathbf{P}]\!]^M$ und $v \in [\![\mathbf{P}]\!]^M$ und $u \neq v\} \neq \varnothing\} \neq \varnothing$ — Def. $[\![\cdot]\!]^M$

gdw. $\{u \mid u \in U$ und es gibt ein $v \in U$, so dass $u \in [\![\mathbf{P}]\!]^M$ und $v \in [\![\mathbf{P}]\!]^M$ und $u \neq v\} \neq \varnothing$ — Extensionalität (Ø)

gdw. es ein $u \in U$ gibt, so dass es ein $v \in U$ gibt, so dass $u \in [\![\mathbf{P}]\!]^M$ und $v \in [\![\mathbf{P}]\!]^M$ und $u \neq v$ — dto.

<u>*ad (d)*</u>: $[\![(\forall x)\ (\mathbf{P}(x) \to (\forall y)\ (\mathbf{P}(y) \to (\forall z)\ (\mathbf{P}(z) \to ((x = z) \vee (y = z)))))]\!]^M = 1$

gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{u \mid u \in U$ und $[\![(\forall y)\ (\mathbf{P}(y) \to (\forall z)\ (\mathbf{P}(z) \to ((u = z) \vee (y = z))))]\!]^M = 1\}$ — wie in Satz 12 (a)

gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{u \mid u \in U$ und $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{v \mid v \in U$ und $[\![(\forall z)\ (\mathbf{P}(z) \to ((u = z) \vee (v = z)))]\!]^M = 1\}\}$ — dto.

gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{u \mid u \in U$ und $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{v \mid v \in U$ und $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{w \mid w \in U$ und $[\![((u = w) \vee (v = w)))]\!]^M = 1\}\}\}$ …

gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{u \mid u \in U$ und $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{v \mid v \in U$ und $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{w \mid w \in U$ und : $u = w$ oder $v = w\}\}\}$ — Def. $[\![\cdot]\!]^M$

gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{u \mid [\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{v \mid [\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{w \mid u = w$ oder $v = w\}\}\}$ — $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq U$

gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{u \mid [\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{v \mid [\![\mathbf{P}]\!]^M \subseteq \{u,v\}\}\}$ — Listennotation ($\{u,v\}$)

gdw. $[\![\mathbf{P}]\!]^M = \varnothing$ oder $[\![\mathbf{P}]\!]^M = \{u,v\}$, für irgendwelche u, v

… wie man zu Fuß nachweist (Richtungen trennen).

Insbesondere besagt also die Konjunktion der in Satz 12 (c) und (d) genannte Formeln, dass $[\![\mathbf{P}]\!]^M$ *genau zwei* Elemente besitzt. Das kann man allerdings auch etwas einfacher haben:

<u>AUFGABE</u>

Zeigen Sie, dass die folgende Formel genau dann in einem Modell M wahr ist, wenn $[\![\mathbf{P}]\!]^M$ genau zwei Elemente hat:

$$(\exists x)\ (\exists y)\ (\ \neg(x = y) \wedge (\forall z)\ (\mathbf{P}(z) \rightarrow ((x = z) \vee (y = z))))\ .$$

Die Idee hinter den Formeln in Satz 12 (c) und (d) und der in der letzten Aufgabe verallgemeinert sich von 2 auf größere Zahlen. Zum Beispiel besagen die Formeln

$$(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists y)(\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(x = z) \wedge \mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{P}(y) \wedge \mathbf{P}(z)) \quad \text{und}$$

$$(\forall x)\ (\mathbf{P}(x) \rightarrow (\forall y)\ (\mathbf{P}(y) \rightarrow (\forall z)\ (\mathbf{P}(z) \rightarrow (\forall z')\ (\mathbf{P}(z') \rightarrow ((x = z') \vee (y = z') \vee (z = z')))))) \ ,$$

dass $[\![\mathbf{P}]\!]^M$ mindestens bzw. höchstens drei Elemente hat. Im Falle von $n = 1$ kann man einfachere Formeln finden:

<u>AUFGABE</u>

(a) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel an, die genau dann in einem Modell M wahr ist, wenn $[\![\mathbf{P}]\!]^M$ mindestens ein Element hat.

(b) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel an, die genau dann in einem Modell M wahr ist, wenn $[\![\mathbf{P}]\!]^M$ höchstens ein Element hat.

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Formel genau dann in einem Modell M wahr ist, wenn $[\![\mathbf{P}]\!]^M$ genau ein Element hat:

$$(\exists x)\ (\forall y)\ (\mathbf{P}(y) \leftrightarrow (y = x))$$

<u>5.5 Prädikatenlogische Äquivalenzen</u>

Wir beenden die Betrachtungen zur Prädikatenlogik mit einer Liste von gültigen Formeln. Die meisten von ihnen sind von der Gestalt '$(\varphi\leftrightarrow\psi)$'. Wie in der Aussagenlogik besagt die Gültigkeit einer solchen Formel, dass die beiden Teilformeln φ und ψ logisch äquivalent sind, also in jedem Modell denselben Wahrheitswert haben.

<u>Satz 13</u>

Es seien φ und ψ offene prädikatenlogische Formeln. Dann sind die folgenden Formeln *unter den rechts genannten Voraussetzungen* gültig:

Nr.	*Formel*	*Voraussetzung*
(1)	φ	φ ist (aufgebaut wie) eine Tautologie*)
(2)	$(\exists x)\ (\exists y)\ \varphi \leftrightarrow (\exists y)\ (\exists x)\ \varphi$	–
(3)	$(\forall x)\ (\forall y)\ \varphi \leftrightarrow (\forall y)\ (\forall x)\ \varphi$	–
(4)	$(\exists x)\ (\forall y)\ \varphi \rightarrow (\forall y)\ (\exists x)\ \varphi$	–
(5)	$(\exists x)\ (\varphi \wedge (\exists y)\ (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow (\exists y)\ (\psi \wedge (\exists x)\ (\varphi \wedge \chi))$	$x \notin Fr(\psi)$, $y \notin Fr(\varphi)$
(6)	$(\forall x)\ (\varphi \rightarrow (\forall y)\ (\psi \rightarrow \chi)) \leftrightarrow (\forall y)\ (\psi \rightarrow (\forall x)\ (\varphi \rightarrow \chi))$	$x \notin Fr(\psi)$, $y \notin Fr(\varphi)$
(7)	$(\forall x)\ (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$	$x \notin Fr(\psi)$
(8)	$(\forall x)\ (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow ((\exists x)\ \varphi \rightarrow \psi)$	$x \notin Fr(\psi)$

*) Eine prädikatenlogische Formel ist wie eine Tautologie aufgebaut, wenn man sie aus einer aussagenlogischen Tautologie erhalten kann, indem man in letzterer alle atomaren Aussagen durch prädikatenlogische Formeln ersetzt, wobei gleiche atomare Aussagen durch gleiche Formeln ersetzt werden. Zum Beispiel ist

$$((\forall x)\ \mathbf{P}(x) \rightarrow (\forall x)\ \mathbf{P}(x))$$

eine Tautologie in diesem Sinne, weil sie aus der tautologischen Ausage '$(p\rightarrow p)$' durch Ersetzung von p durch '$(\forall x)\ \mathbf{P}(x)$' hervorgeht. (Sie geht auch durch Ersetzung von p und q durch '$(\forall x)\ \mathbf{P}(x)$') aus '$(p\rightarrow q)$' hervor, aber das ist keine Tautologie!) Andererseits ist z.B.

$$(\forall x)\ (\mathbf{P}(x) \rightarrow \mathbf{P}(x))$$

keine Tautologie in diesem Sinne.

Beweis

Wir führen exemplarisch einige der Nachweise für die Gültigkeit vor.

ad (1): Das sollte unmittelbar einleuchten; denn die Junktoren werden in der Prädikatenlogik genauso gedeutet wie in der Aussagenlogik. Ein genauer Nachweis dieser Behauptung würde allerdings eine genaue Ausformulierung des Ersetzungsverfahrens erfordern, was wir uns hier ersparen.

ad (2): Es gilt für beliebige Modelle M:

$$\llbracket (\exists x)\ (\exists y)\ \varphi \leftrightarrow (\exists y)\ (\exists x)\ \varphi \rrbracket^M = 1$$

gdw. $\llbracket (\exists x)\ (\exists y)\ \varphi \rrbracket^M = \llbracket (\exists y)\ (\exists x)\ \varphi \rrbracket^M$ — Def. $\llbracket\cdot\rrbracket^M$

gdw. gilt: $\{u \mid u\in U \text{ und } \llbracket [(\exists y)\ \varphi{:}x\rightarrow u] \rrbracket^M = 1\} \neq \emptyset$ gdw. $\{u \mid u\in U \text{ und } \llbracket [(\exists x)\ \varphi{:}y\rightarrow u] \rrbracket^M = 1\} \neq \emptyset$ — Def. $\llbracket\cdot\rrbracket^M$

gdw. gilt: $\{u \mid u\in U \text{ und } \{v \mid v\in U \text{ und } \llbracket [[\varphi{:}x\rightarrow u]\ y\rightarrow v] \rrbracket^M = 1\} \neq \emptyset\} \neq \emptyset$ gdw. — Def. $\llbracket\cdot\rrbracket^M$
$\{u \mid u\in U \text{ und } \{v \mid v\in U \text{ und } \llbracket [[\varphi{:}y\rightarrow u]\ x\rightarrow v] \rrbracket^M = 1\} \neq \emptyset\} \neq \emptyset$

gdw. gilt: es gibt ein $u\in U$, so dass $\{v \mid v\in U \text{ und } \llbracket [[\varphi{:}x\rightarrow u]\ y\rightarrow v] \rrbracket^M = 1\} \neq \emptyset\}$ gdw. — Def. Ø
es ein $u\in U$ gibt, so dass $\{v \mid v\in U \text{ und } \llbracket [[\varphi{:}y\rightarrow u]\ x\rightarrow v] \rrbracket^M = 1\} \neq \emptyset\}$

gdw. gilt: es gibt ein $u\in U$, so dass es ein $v\in U$ gibt mit: $\llbracket [[\varphi{:}x\rightarrow u]\ y\rightarrow v] \rrbracket^M = 1\}$ gdw. — Def. Ø
es ein $u\in U$ gibt, so dass es ein $v\in U$ gibt mit: $\llbracket [[\varphi{:}y\rightarrow u]\ x\rightarrow v] \rrbracket^M = 1\}$

gdw. gilt: es gibt ein $u\in U$, so dass es ein $v\in U$ gibt mit: $\llbracket [[\varphi{:}x\rightarrow u]\ y\rightarrow v] \rrbracket^M = 1\}$ gdw.
es ein $u\in U$ gibt, so dass es ein $v\in U$ gibt mit: $\llbracket [[\varphi{:}x\rightarrow v]\ y\rightarrow u] \rrbracket^M = 1\}$

denn: $[[\varphi{:}y\rightarrow u]\ x\rightarrow v] = [[\varphi{:}x\rightarrow v]\ y\rightarrow u]$!

Es ist klar, dass diese beiden Bedinungen dasselbe besagen.

ad (4): Sei $\llbracket (\exists x)\ (\forall y)\ \varphi \rrbracket^M = 1$.Wegen der Wahrheitstafel von '$\rightarrow$' ist dann zu zeigen, dass dann auch: $\llbracket (\forall y)\ (\exists x)\ \varphi \rrbracket^M$, d.h. dass für beliebige $v\in U$ gilt: $\llbracket [(\exists x)\ \varphi{:}y\rightarrow v] \rrbracket^M = 1$. Sei also $v_0\in U$; es bleibt zu zeigen, dass $\llbracket [(\exists x)\ \varphi{:}y\rightarrow v_0] \rrbracket^M = 1$, d.h. – wegen der Definition von $\llbracket\cdot\rrbracket^M$ – dass $\{u \mid u\in U \text{ und } \llbracket [[\varphi{:}y\rightarrow v_0]{:}x\rightarrow u] \rrbracket^M = 1\} \neq$ Ø. Gesucht ist also irgendein $u\in U$, für das gilt: (*) $\llbracket [[\varphi{:}y\rightarrow v_0]{:}x\rightarrow u] \rrbracket^M = 1$. Zunächst folgt aus der Voraussetzung, dass die Menge $\{u \mid u\in U \text{ und } \llbracket [(\forall y)\ \varphi{:}\ x\rightarrow u] \rrbracket^M = 1\}$ nicht leer ist. Sei also u_1 in dieser Menge, d.h: $\llbracket [(\forall y)\ \varphi{:}\ x\rightarrow u_1] \rrbracket^M = 1$, was wiederum heißt, dass für beliebige $v\in U$ gilt: $\llbracket [[\varphi{:}\ x\rightarrow u_1]{:}\ y\rightarrow v] \rrbracket^M = 1$. Insbesondere ist also: $\llbracket [[\varphi{:}\ x\rightarrow u_1]{:}\ y\rightarrow v_0] \rrbracket^M = 1$. Aber $[[\varphi{:}\ x\rightarrow u_1]{:}\ y\rightarrow v_0] = [[\varphi{:}y\rightarrow v_0]{:}\ x\rightarrow u_1]$, d.h. es gilt: $\llbracket [[\varphi{:}y\rightarrow v_0]{:}\ x\rightarrow u_1] \rrbracket^M = 1$, und u_1 ist ein u, welches (*) erfüllt.

<u>*ad (4)*</u>: Diesmal trennen wir die Richtungen:

"$\Rightarrow$": Es sei $[\![(\forall x)\ (\varphi \rightarrow \psi)]\!]^M = 1$, d.h. für beliebige $u \in U$ gilt:

$$(!)\quad [\![[(\varphi \rightarrow \psi)\!: x \rightarrow u]]\!]^M = [\![([\varphi\!: x \rightarrow u] \rightarrow [\psi\!: x \rightarrow u])]\!]^M = 1.$$

(Die Pfeile in dieser Notation haben natürliche verschiedene Bedeutungen!) Um zu zeigen, dass auch $[\![((\exists x)\ \varphi \rightarrow \psi)]\!]^M = 1$, genügt es zu zeigen, dass $[\![\psi]\!]^M = 1$ – unter der Voraussetzung, dass $[\![(\exists x)\ \varphi]\!]^M = 1$. Wenn aber letzteres der Fall ist, ist $\{u \mid u \in U \text{ und } [\![[\varphi\!: x \rightarrow u]]\!]^M = 1\} \neq \emptyset$. Sei also u^* in dieser Menge, d.h.: (a) $[\![[\varphi\!: x \rightarrow u^*]]\!]^M = 1$. Wegen (!) wissen wir: (b) $[\![([\varphi\!: x \rightarrow u^*] \rightarrow [\psi\!: x \rightarrow u^*])]\!]^M = 1$. Mit der Wahrheitstafel der materialen Implikation folgt aus (a) und (b): $[\![[\psi\!: x \rightarrow u^*]]\!]^M = 1 = [\![\psi]\!]^M$; denn x kommt in ψ nicht (frei) vor, weswegen seine Ersetzung nichts bringt: $[\psi\!: x \rightarrow u^*] = \psi$.

"$\Leftarrow$": Sei jetzt (V1) $[\![((\exists x)\ \varphi \rightarrow \psi)]\!]^M = 1$ und $u_0 \in U$, so dass gilt: (V2) $[\![[\varphi\!: x \rightarrow u_0])]\!]^M = 1$. Zu zeigen bleibt, dann, dass auch $[\![[\psi\!: x \rightarrow u_0])]\!]^M = 1$. Mit (V2) ist insbesondere also die Menge $\{u \in U \mid [\![[\varphi\!: x \rightarrow u])]\!]^M = 1\}$ nicht leer und somit: $[\![((\exists x)\ \varphi)]\!]^M = 1$. Nach (V1) und der Wahrheitstafel von '$\rightarrow$' ist dann aber auch $[\![\psi]\!]^M = 1$. Aber – wie wir schon in "$\Rightarrow$" gesehen haben, ist $\psi = [\psi\!: x \rightarrow u_0]$ und somit $[\![[\psi\!: x \rightarrow u_0])]\!]^M = [\![\psi]\!]^M = 1$, was zu zeigen war.