0. Arithmetischer Hintergrund

Natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$): 0, 1, 2, 3, …

[Ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$): … –2, –1, 0, 1, 2,…; positive ganze Zahlen ($\mathbb{Z}^+$): 1, 2, 3, …]

Ordnung als zweistellige Relation:

- $0 < 1$, $0 < 2$, …; $1 < 2$, $1 < 3$; … … $1537 < 4711$, $1537 < 4712$, … … (strikt)
- $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, …; $1 \leq 1$, $1 \leq 2$; … … $1537 \leq 4711$, $1537 \leq 4712$, … … (reflexiv)

arithmetische Operationen: Addition, Multiplikation, Potenzierung …

[NB: natürliche Definierbarkeitshierarchie:

$x \cdot y = \underbrace{x + \ldots + x}_{\text{y mal}}$; $x^y = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{y mal}}$; $x_y = (\ldots(\underbrace{x^x)\ldots^x)}_{\text{y mal}}\ldots)$; ……]

Grundlegende Operation: *Nachfolger*: $x \mapsto x'$ ($= x + 1$!).

Peano-Axiome[1] für ':

(PA1) Injektivität: $x' = y' \Rightarrow x = y$

(PA2) "Fast-Surjektivität": x hat die Gestalt y' gdw. $x \neq 0$

(d.h. für kein y gilt: $y' = 0$, und wenn $x \neq 0$, dann ist $x = y'$, für ein y).

Rückführung der Ordnung und der arithmetischen Operationen auf den Nachfolger mit dem:

Induktionsprinzip (auch: *Prinzip der vollständigen Induktion*)

Für alle Eigenschaften E gilt:

Wenn:	E (0)	"Induktiosanfang (IA)"
und:	E (n'), sobald <u>E(n)</u>	"Induktionsschritt (IS)"
Dann:	E(n), für alle natürlichen Zahlen n	

(Der unterstrichene Teil des IS heißt "Induktionsvoraussetzung".)

<u>N.B</u>: Das Induktionsprinzip setzt nur die Nachfolger-Operation voraus!

Dabei wurde von der folgenden *Notationskonvention* Gebrauch gemacht:

Es sei E irgendeine [arithmetische] Eigenschaft (Teilbarkeit durch 17, Primzahl, Quadratzahl, Summe zweier ungerader Primzahlen etc.) und n eine Zahl; "E (n)" heißt dann: "n hat die Eigenschaft E ".

[Genauer: E sei eine *Bezeichnung* für eine Eigenschaft, n eine *Bezeichnung* für eine natürliche Zahl; dann besagt das Ergebnis der Verkettung von E , einer linken Klammer, n und einer rechten Klammer (in dieser Reihenfolge), daß die von n bezeichnete Zahl die von E bezeichnete Eigenschaft besitzt.]

Einfache *Anwendung* des Induktionsprinzips: *induktive Definitionen*

Es seien ® und © irgendwelche (zweistelligen) Rechenoperationen. Dann gilt:

Wenn:	x®0 = x©0, für alle Zahlen x
und:	x®n' = x©n', sobald x®n = x©n (für alle Zahlen x),
Dann ist:	x®n = x©n für alle Zahlen x und n,

d.h. ® und © sind ein und dieselbe Operation, da es bei Rechenoperationen nur auf das Ergebnis ankommt ("Extensionalitätsprinzip"). Zur Definition dieser Operation benötigt man also nur die Werte der Form x®0 und x®n' für vorgegebenes x®n. Beispiel: x® 0 = 0; x®n' = (x®n) + x

[Preisfrage: Was ist ®?]

1 Nach dem italienischen Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932). Richard Dedekind (1831–1916), der letzte Schüler von Karl Friedrich Gauß (1777–1855), hat ein Jahr vor Peano (1888) dieselbe Axiomatisierung der Arithmetik unabhängig gefunden, aber nie veröffentlicht.

Auch Relationen lassen sich auf diese Weise induktiv definieren; z.B. gilt:

$x \leq 0$ gdw. $x = 0$; $x \leq n'$ gdw. $x \leq n$ oder $x = n'$
– womit die Ordung auf den Nachfolger zurückgeführt wäre.

Umgekehrt läßt sich auch die Nachfolgerschaft auf die Ordnung zurückführen; statt des Induktionsprinzips benötigt man hier das:

Wohlordnungsprinzip
Für alle Eigenschaften E gilt: Wenn es überhaupt eine natürliche Zahl gibt, die E hat, dann gibt es eine kleinste solche Zahl.
[In prädikatenlogischer Notation:

$[\ (\exists n)\ E\ (n) \rightarrow (\exists m)\ [\ E\ (m)\ \&\ (\forall k)\ [\ E\ (k) \rightarrow m \leq k]\ ]\ ]\ ]$

N.B.: Das Wohlordnungsprinzip setzt also die Ordnung voraus.

Zurückführung des Nachfolgers auf die Ordnung:
n' ist stets die kleinste Zahl (im Sinne der Ordnung <) mit: $n < m$.

Frage: Welches andere Prinzip geht – neben dem Wohlordungsprinzip – in diese Zurückführung des Nachfolgers auf die Ordnung ein?

Mit dem Wohlordnungsprinzip und der Zurückführung von $\leq$ auf ' lassen sich (PA1), (PA2) sowie das Induktionsprinzip *beweisen*.

…und zwar so:
(PA1): Wäre x' = y' aber x ≠ y, wäre entweder x > y oder y > x. O.B.d.A. (= ohne Beschränkung der Allgemeinheit: der andere Fall ist ja vollkommen analog) können wir also annehmen, daß x > y, d.h. x ≥ y', denn y' ist die kleinste Zahl, die größer ist als y. Wenn aber x ≠ y', hätten wir: x > y', was nicht sein kann, weil ja y'= x', und x nicht größer sein kann als x'; aber x = y' kann auch nicht sein, denn sonst wäre x = x'.
(PA2): zum Selbstüberlegen. Man muß hier wieder Eigenschaften der Ordnung ausnutzen.
Induktionsprinzip: Es sei E eine Eigenschaft, für die wir zeigen müssen, daß alle Zahlen sie haben, *sofern* sie IA und IS erfüllt. Angenommen also, sie tut es. Um dann zu zeigen, daß alle Zahlen E haben, zeigen wir, daß das Gegenteil nicht sein kann und nehmen einmal an, daß nicht alle Zahlen E hätten; d.h. mindestens eine Zahl hätte nicht die Eigenschaft E – oder, positiv ausgedrückt: mindestens eine Zahl hätte die "Komplementeigenschaft" $\bar{E}$, die einer Zahl n genau dann zukommt, wenn n nicht E hat: $\bar{E}(n)$ gdw. nicht $E\ (n)$. Nach dem Wohlordnungsprinzip gäbe es dann aber eine kleinste Zahl m mit der Eigenschaft $\bar{E}$. Offenbar ist $m \neq 0$, denn nach IA gilt ja: $E\ (0)$. Also muß – nach (PA2) – m die Form n' haben. Aber dann müßte schon n die Eigenschaft $\bar{E}$ haben: andernfalls hätten wie ja $E\ (n)$ und somit (wg. IS) $E\ (n')$. Aber wenn n die Eigenschaft $\bar{E}$ hätte, wäre n' nicht die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $\bar{E}$, denn $n < n'$. Die Annahme, es gäbe eine Zahl mit der Eigenschaft $\bar{E}$ führt also in eine Sackgasse, d.h: alle Zahlen haben E, was zu zeigen war.

Umgekehrt läßt sich das Wohlordnungsprinzip mit Hilfe des Induktionsprinzips und der umgekehrten Rückführung beweisen. (Wie? Hausaufgabe!)

Fazit
Die Arithmetik läßt sich entweder auf die Ordnung der natürlichen Zahlen oder auf die Nachfolgeroperation zurückführen. Im ersten Falle muß man (neben anderen, offensichtlicheren und logisch weniger komplexen Annahmen) das *Wohlordnungsprinzip* annehmen, im zweiten (…) das *Induktionsprinzip*. Beiden Prinzipien ist gemeinsam, daß sie *zweitstufig* im Sinne der Prädikatenlogik (s.u.) sind.

1. Mengenlehre

1.1 Naive Mengenlehre

Cantorsche[2] Definition:

Unter einer Menge verstehen wir jene Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Extensionalität

Wenn M und N Mengen sind, dann gilt: $M = N$ [M und N sind ein und dieselbe Menge] gdw. sie dieselben Elemente besitzen, d.h. genau dann, wenn für alle Gegenstände (Personen, Zahlen, *Mengen*,…) u gilt:

$u \in M$ gdw. $u \in N$.

Komprehension

Zu jeder Eigenschaft E gibt es eine Menge M_{E}, deren Elemente genau diejenigen Gegenstände sind, die die Eigenschaft E besitzen.

Notation: $M_{\mathsf{E}} = \{u \mid \mathsf{E}(u)\}$ ("Menge der u, so daß $\mathsf{E}(u)$")

(D.h.: $v \in \{u \mid \mathsf{E}(u)\}$ gdw. $\mathsf{E}(v)$, für beliebige Objekte v.)

Konvention der reinen Mengenlehre:

Mengentheoretische Aussagen reden nur über Mengen: "Es gibt etwas mit der Eigenschaft E" heißt also: es gibt eine Menge mit der Eigenschaft E, etc. [Wenn man die Konvention der reinen Mengenlehre aufgibt, bezeichnet man die Objekte, die keine Mengen sind, als *Urelemente*.]

Russellsche Antinomie[3]

Eine Menge M ist *normal* – $\mathsf{N}(M)$ – gdw. M eine Menge ist und $M \notin M$ (d.h.: es ist nicht der Fall, daß $M \in M$). Sei R die Menge der normalen Mengen $R = \{M \mid \mathsf{N}(M)\}$. ($R$ existiert nach dem Komprehensionsprinzip!)

Frage: Ist R normal?

Antwort: $\mathsf{N}(R)$ gdw. [Def. N] $R \notin R$ gdw. [Def. R] $R \notin \{M \mid \mathsf{N}(M)\}$ gdw.

nicht: $R \in \{M \mid \mathsf{N}(M)\}$ [Def. $\notin$] gdw. [Komprehension] nicht: $\mathsf{N}(R)$.

M.a.W.: Wäre R normal, wäre R nicht normal; wäre R nicht normal, wäre R normal. DAS KANN JA WOHL NICHT SEIN.

1.2 Axiomatische Mengenlehre: grundlegende Konstruktionen

Grundidee (hinter der Axiomatik ZF Zermelo-Fraenkel[4]):

- Klein anfangen: möglichst schwache bedingungslose Existenzannahmen
- Neues aus Altem erschaffen: Mengen möglichst nur aus bereits gegebenen Mengen konstruieren, nach einleuchtenden Prinzipien
- Hoffen, daß keine Widersprüche entsehen, wofür es allerdings keine Garantie geben kann. (Darüber mehr im Prädikatenlogik-Teil).

---

2 Georg Cantor (1845–1918), Mathematikprofessor in Halle, Begründer der Mengenlehre.

3 Nach Bertrand Russell (1872–1970), der die Antinomie 1902 – kurz nach Ernst Zermelo (s. Fn. 4) – entdeckte. Die Widersprüchlichkeit der naiven Mengenlehre war Cantor allerdings mindestens seit 1899 bekannt.

4 Nach Ernst Zermelo (1871–1953), auf den der Kern der Standard-Axiomatisierung zurückgeht und [Adolf] Abraham Fraenkel (1891–1965), der Zermelos System entscheidend erweitert hat.

Anfang: Das *Extensionalitätsaxiom* kann bleiben, das *Komprehensionsprinzip* muß gehen. Es wird ersetzt durch das:

Aussonderungsaxiom
Sei A eine Menge. Dann gibt es zu jeder Eigenschaft E eine Menge M, deren Elemente genau diejenigen Elemente von A sind, die die Eigenschaft E besitzen.

Notation: $M = \{u{\in}A \mid \mathsf{E}(u)\}$ (= $\{u \mid u{\in}A$ und $\mathsf{E}(u)\}$)

(D.h.: $v \in \{u{\in}A \mid \mathsf{E}(u)\}$ gdw. $\mathsf{E}(v)$, für beliebige Elemente v von A; und:

$v \in \{u{\in}A \mid \mathsf{E}(u)\}$ gdw. $u{\in}A$ und $\mathsf{E}(v)$, für beliebige v überhaupt.)

NB: Der Eigenschaftsbegriff ist erklärungsbedürftig; Näheres im Prädikatenlogik-Teil.

Mit dem Aussonderungsaxiom ergeben sich folgende (bedingte) Existenzaussagen:

Leere Menge: wenn es überhaupt eine Menge gibt, dann gibt es (genau) eine Menge ohne Elemente.
(NB: Die unterstrichene Bedingung folgt innerhalb der reinen Mengenlehre.)
[Beweis: Sei A eine Menge und L die Eigenschaft, von sich selbst verschieden zu sein: $\mathsf{L}(u)$ gdw. $u \neq u$. Nach dem Aussonderungsaxiom gibt es dann eine Menge $L = \{u{\in}A \mid \mathsf{L}(u)\} = \{u{\in}A \mid u \neq u\}$. Wäre also irgendein $v{\in}L$, wäre $v \neq v$, was nicht sein kann. Also ist L leer. Da alle leere Mengen dieselben Elemente haben (nämlich gar keine) ist L dann auch die einzige leere Menge.]
Notation: "Ø" (" die leere Menge")

Schnitt: wenn A und B Mengen sind, dann gibt es (genau) eine Menge derjenigen Objekte, die sowohl in A als auch in B sind. [Beweis: Hausaufgabe]

Notation: "$A \cap B$" ("A geschnitten mit B")

NB: $A \cap B = B \cap A$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Differenz (oder *relatives Komplement*): wenn A und B Mengen sind, dann gibt es (genau) eine Menge derjenigen Objekte, die in A, aber nicht in B sind. [Beweis: Hausaufgabe]
Notation: "$A \setminus B$" ("A minus B")
Um auch die Vereinigung zu bekommen, braucht man das

Vereinigungsaxiom
Wenn A und B Mengen sind, dann gibt es (genau) eine Menge derjenigen Objekte, die in A oder in B (oder in beiden) sind.

Notation: "$A \cup B$" ("A vereinigt mit B")

NB: $A \cup B = B \cup A$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; weitere Gesetze auf Anfrage.
NB: Die ersten drei Axiome garantieren nur die Existenz der leeren Menge! Um mehr zu bekommen, braucht man das

Paaraxiom
Für alle x und y gibt es (genau) eine Menge M, deren Elemente x und y sind.
Notation: $M = \{x,y\}$ (= $\{y,x\}$ wg. des Extensionalitätsaxioms!)
NB: x und y müssen nicht voneinander verschieden sein. Damit ergibt sich die Existenz *unendlich vieler Mengen*: Ø, {Ø}, {Ø,{Ø}}, {{{Ø}}} etc. pp.

Kuratowski[5]*-Paar*
Für beliebige x und y sei das *geordnete Paar aus x und y* definiert als die Menge $\{\{x\},\{x,y\}\}$. Notation: "(x,y)".

Zum Nachdenken

- Existenz und Eindeutigkeit des geordneten Paars werden garantiert durch die bisherigen Axiome. Durch welche?
- Es gilt stets: $(x,y) = (x',y')$ gdw. $x = x'$ und $y = y'$. Warum?
- Für alle x, y und z gibt es eine Menge $\{x,y,z\}$ deren Elemente x, y und z sind. Folgt das aus den bisherigen Axiomen?

Definition des cartesischen Produkts[6]

Es seien A und B Mengen. Dann ist $A{\times}B$ die Menge der geordneten Paare (a,b), so daß gilt: $a\in A$ und $b\in B$.

Problem: Das cartesische Produkt läßt sich nicht mit den bisherigen Axiomen konstruieren. Man benötigt dafür noch ein weiteres Prinzip. Zuvor jedoch die:

Definition der Teilmengen-Beziehung

A ist eine *Teilmenge von B*, falls für alle Elemente x von A gilt: $x\in B$.

Notation: "$A\subseteq B$".

A ist eine *echte Teilmenge von B*, falls $A\subseteq B \neq A$.

Notation: "$A\subset B$".

NB: Es gilt stets: $Ø\subseteq A\subseteq A$; und wenn $A\subseteq B\subseteq C$, dann $A\subseteq C$.

Potenzmengenaxiom
Zu jeder Menge A gibt es die Menge aller Teilmengen von A.

Notation: $\wp(A)$.

Aus dem Potenzmengenaxiom ergibt sich per Aussonderung das (somit redundante) Paaraxiom. (Wie?)

Mit dem Potenzmengenaxiom läßt sich das cartesische Produkt konstruieren.
…und zwar so:
Es seien A und B Mengen. Es genügt, eine Menge M zu finden, die alle Paare (x,y) mit , $x\in A$ und $y\in B$ enthält; dann kann man nämlich

$$A{\times}B = \{p\in M \mid \text{es gibt } x\in A \text{ und } y\in B\text{, so daß } p = (x,y)\}$$

setzen. $M = \wp(\wp(A\cup B))$ tut es: wenn $x\in A$ und $y\in B$, sind $\{x\}$ und $\{x,y\}$ Teilmengen von $A\cup B$, also Elemente von $\wp(A\cup B)$; also ist $\{\{x\}, \{x,y\}\}$ eine Teilmenge von $\wp(A\cup B)$ und somit ein Element von $\wp(\wp(A\cup B))$.

5 Nach Kazimierz Kuratowski (1896–1980), polnischer Mathematiker und Logiker.
6 Nach René Descartes [lat. *Cartesius*] (1596–1650), der gezeigt hat, daß sich die ebene Geometrie als Lehre der geordneten Paare reeller Zahlen auffassen läßt (‘analytische Geometrie’).

1.3 Relationen

Definition

(a) R ist eine *zweistellige Relation über* einer Menge U gdw. wenn $R\subseteq(\mathsf{U}\times\mathsf{U})$ (d.h. R ist ein Element des cartesischen Produktes von U mit sich selbst).
R ist eine *zweistellige Relation*, falls R eine zweistellige Relation über irgendeiner Menge ist.

Notation: Man schreibt auch 'xRy' statt '$(x,y)\in R$'.

(b) Sei R eine zweistellige Relation. Dann ist:

$\mathtt{dom}(R) := \{x\in\mathsf{U} \mid \text{es gibt } y, \text{ so daß } xRy\}$ (*Vorfeld von* R)

$\mathtt{rge}(R) := \{y\in\mathsf{U} \mid \text{es gibt } x, \text{ so daß } xRy\}$ (*Nachfeld von* R)

$\mathtt{Fld}(R) := \mathtt{dom}(R)\cup\mathtt{rge}(R)$ (*Feld von* R)

(c) Eine zweistellige Relation R ist *reflexiv über* U gdw. für alle $x\in\mathsf{U}$ gilt: $(x,x)\in R$;
R ist *reflexiv*, falls R reflexiv über $\mathtt{Fld}(R)$ ist;
R ist *irreflexiv* gdw. es kein x gibt, so daß gilt: xRx.

(d) Eine zweistellige Relation R ist *symmetrisch* gdw. für alle $(x, y)\in R$ gilt: yRx;
R ist *antisymmetrisch* gdw. für alle $(x, y)\in R$ gilt: wenn yRx, dann ist $y = x$;
R ist *asymmetrisch* gdw. für alle $(x, y)\in R$ gilt: $(y,x)\notin R$.

(e) Eine zweistellige Relation R ist *transitiv* gdw. für alle $(x,y) \in R$ und alle z gilt: wenn yRz, dann ist auch xRz. [Kurz: $xRyRz \Rightarrow yRz$]

(f) Eine zweistellige Relation R über einer Menge U ist eine *Äquivalenzrelation* [*über* U] gdw. R reflexiv [über U], symmetrisch und transitiv ist.

Bemerkungen

zu **(a)**: Ø ist eine zweistellige Relation über jeder Menge U; das cartesische Produkt $\mathsf{U}\times\mathsf{U}$ ist selbst eine zweistellige Relation über U (die *Totalrelation über* U).

zu **(b)**: Wenn R eine zweistellige Relation ist, dann ist R ist eine zweistellige Relation über einer Menge U gdw. gilt: $\mathtt{Fld}(R)\subseteq\mathsf{U}$; insbesondere ist jede zweistellige Relation eine zweistellige Relation über $\mathtt{Fld}(R)$.

zu **(c)**: Um reflexiv über U zu sein, muß R keine Relation über U sein!

zu **(d)**: Für nicht-leere R gilt: wenn R asymmetrisch ist, ist R antisymmetrisch und irreflexiv, und wenn R antisymmetrisch ist, ist R nicht symmetrisch.

zu **(f)**: Die Totalrelation über einer Menge U ist stets eine Äquivalenzrelation; ebenso die *Identität über* U:

$$id_{\mathsf{U}} = \{p\in(\mathsf{U}\times\mathsf{U}) \mid \text{es gibt ein } x\in\mathsf{U}, \text{ so daß gilt: } p=(x,x)\}$$

(oder kürzer: $\{(x,x)\in(\mathsf{U}\times\mathsf{U}) \mid x = x\}$).

Beispiele (außerhalb der *reinen* Mengenlehre)

Die Menge der Paare (n,m) von natürlichen Zahlen, so daß $m=n+1$, ist irreflexiv, asymmetrisch und nicht transitiv.
Die Menge der Paare (n,m) von natürlichen Zahlen, so daß $n<m$ [bzw. $n\leq m$], ist irreflexiv [bzw. reflexiv], asymmetrisch [bzw. antisymmetrisch] und transitiv.
Die Menge der Paare (n,m) von natürlichen Zahlen, so daß n und m dieselben Primteiler haben, ist eine Äquivalenzrelation über den natürlichen Zahlen. Die Menge der Paare (A,B), so daß A und B gleich heißen, ist eine Äquivalenzrelation über der Menge der Personen.

Definition
Es seien R und R' zweistellige Relationen über einer Menge M. Dann ist:
$R\circ R' = \{(x,z) \mid \text{es gibt ein } y\in M, \text{ so daß gilt: } xRyR'z\}$

Beobachtung ("Assoziativität von $\circ$"): Wenn R, R' und R'' Relationen über M sind, dann ist $(R\circ R')\circ R'' = R\circ (R'\circ R'')$.
Beispiel
Sei P die Menge aller Personen, $R = \{(x,y)\in P^2 \mid y \text{ ist die Mutter von } x\}$, und $R = \{(x,y)\in P^2 \mid x \text{ ist ein Elternteil von } y\}$. Was ist dann $R\circ R'$? Welche Symmetrieeigenschaften hat $R\circ R'$?

Definition
Seien R und R^* zweistellige Relation über einer Menge M. Dann ist R^* der *reflexive/symmetrische/transitive Abschluß von* R, wenn R^* reflexiv/symmetrisch/transitiv ist und für alle reflexiven/symmetrischen/transitiven Relationen S über M gilt: wenn $R\subseteq S$, dann ist $R^*\subseteq S$. [Solche S heißen *Erweiterungen* von R; R^* ist also die (im Sinne der Teilmengen-Beziehung) *kleinste* reflexive/symmetrische/transitive Erweiterung von R.]

Satz
R Jede zweistellige Relation R über einer Menge M besitzt genau einen reflexiven/symmetrischen/transitiven Abschluß.
Beweisskizze
Die *Eindeutigkeit* ist immer trivial, weil für zwei Abschlüsse R_0^* und R_1^* jeweils gelten muß: $R_0^* \subseteq R_1^*$, und $R_1^* \subseteq R_0^*$, und somit $R_0^* = R_1^*$.
Für die *Existenz* zeigt man leicht, daß $R\cup id_M$ und $R\cup R^{-1}$ reflexive bzw. symmetrische Abschlüsse von R sind, wobei gilt:

$R^{-1} := \{(x,y)\in (M\times M) \mid yRx\}$. ("inverse Relation")

Im Falle des transitiven Abschlusses (auch als *transitive Hülle* bekannt) konstruiert man zunächst Relationen R_0, R_1, R_2, …, R_n,… die jeweils alle 'R-Ketten' der Länge $\leq n$ enthalten, d.h. Paare (x_1,x_n), so daß $x_1Rx_2\ldots Rx_n$. Dann sammelt man alle Paare aus allen R_n in einer einzigen Menge R^* auf und zeigt, daß sie Teil jeder transitiven Erweiterung von R ist, weil – intuitiv gesprochen – R^* seine Transivität allein den R-Ketten verlangt, die in jeder transitiven Erweiterung von R vorkommen müssen. Für die genaue Konstruktion von R^* benötigt man eine mengentheoretische Rekonstruktion der natürlichen Zahlen und der Indizierung von Mengen mit solchen Zahlen sowie eine Verallgemeinerung des Vereinigungsaxioms. Wir kommen auf diese Konstruktion am Schluß des Mengenlehre-Teils zurück.
Mehr über Äquivalenzrelationen

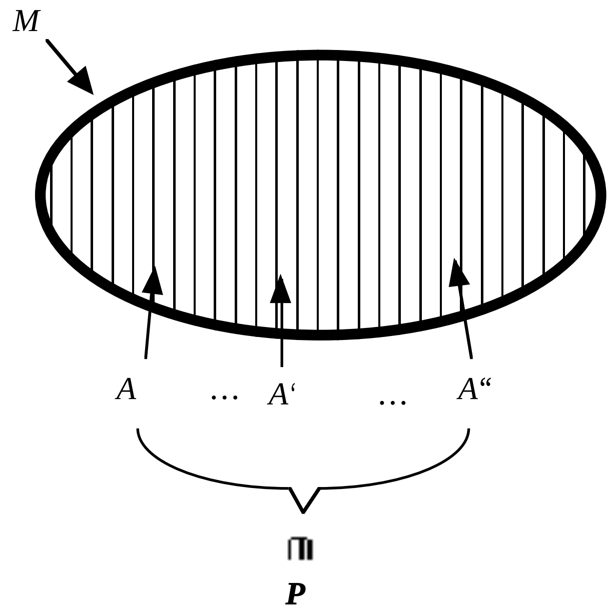
Äquivalenzrelationen kann man sich leicht veranschaulichen; sie entsprechen Unterteilungen ihres Feldes in (nicht-leere), voneinander abgeschottete Teilbereiche oder Zellen:

Sei M eine Menge. Eine *Partition* $\boldsymbol{P}$ *von* M ist eine Teilmenge von $\wp(M)$ – also eine Menge von Teil(meng)en von M, so daß gilt:

(i) $\varnothing \notin \boldsymbol{P}$;

(ii) wenn $A \in \boldsymbol{P}$, $B \in \boldsymbol{P}$ und $A \neq B$, dann ist: $A \cap B = \varnothing$ (A und B sind *disjunkt*, d.h. sie haben kein Element gemeinsam);

(iii) für jedes $x \in M$ gibt es ein $A \in \boldsymbol{P}$, so daß $x \in A$.



<u>Beobachtung</u>

Wenn $\boldsymbol{P}$ eine Partition einer Menge M ist, dann ist:

$$R = \{(x,y) \in (M \times M) \mid \text{es gibt ein } A \in \boldsymbol{P}, \text{ so daß gilt: } (x,y) \subseteq A\}$$

eine Äquivalenzrelation über M. [R heißt die von $\boldsymbol{P}$ *induzierte* Äquivalenzrelation; aRb sagt, daß a und b in derselben Zelle sitzen.]

Interessanterweise gilt eben auch die folgende <u>Umkehrung:</u>

Es sei R eine Äquivalenzrelation über einer Menge M. Dann gibt es eine Partition $\boldsymbol{P}$ von M, so daß R die von $\boldsymbol{P}$ induzierte Äquivalenzrelation ist.

<u>Beweis:</u> Für $x \in M$ sei die *Äquivalenzklasse von x bzgl. R* die (per Aussonderung definierte) Menge

$$|x|_R := \{x \in M \mid \text{es gibt } y \in M, \text{ so daß: } xRy\}.$$

Man setzt dann: $\boldsymbol{P} = \{|x|_R \in \wp(M) \mid x \in M\}$ – d.h.:

$\boldsymbol{P} = \{A \in \wp(M) \mid \text{es gibt ein } x \in M, \text{ so daß } A = |x|_R\}$.

Dann zeigt man zunächst (<u>als Hausaufgabe</u>) daß für alle a und b aus M gilt:

(*) wenn aRb, dann ist $|a|_R = |b|_R$.

(<u>Tip</u>: Es genügt hier zu zeigen, daß aRb stets $|a|_R \subseteq |b|_R$ impliziert!)

Jetzt schließt man, daß $\boldsymbol{P}$ die Partitionseigenschaften (i) – (iii) hat.

[… und zwar so:

(i): Da R reflexiv über M ist, gilt für jedes $x \in M$: $x \in |x|_R$, also insbesondere: $|x|_R \neq \emptyset \notin \boldsymbol{P}$, weil ja jedes $M \in \boldsymbol{P}$ von der Gestalt $|x|_R$ (für irgendein $x \in M$) ist.
(ii): Wenn $A \in \boldsymbol{P}$, $B \in \boldsymbol{P}$ und $A \neq B$, wäre also $A = |a|_R$ und $B = |b|_R$ für irgendwelche a, $b \in M$. Aber dann kann es kein $x \in \boldsymbol{P}$ geben, so daß $x \in A \cap B$. Sonst wäre nämlich $x \in A = |a|_R$ und $x \in B = |b|_R$, d.h.: (!) aRx und bRx, und somit (!!)xRb, denn R ist symmetrisch; aber (!) und (!!) implizieren wegen der Transitivität von R: aRb, woraus wegen (*) folgt: $|a|_R = |b|_R$, was der Voraussetzung widerspricht.
(iii): Wenn $x \in M$, ist – wie in (i) gezeigt – $x \in |x|_R \in \boldsymbol{P}$, d.h. $|x|_R$ ist das gesuchte A.]

Mehrstellige Relationen: Definitionen

Für beliebige Objekte $x_1,\ldots,x_n$ definiert man das *n-Tupel* $(x_1,\ldots,x_n)$ per Induktion über $n \geq 1$:

$$(x_1) = x_1;\ (x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = ((x_1,\ldots,x_n),x_{n+1}).$$

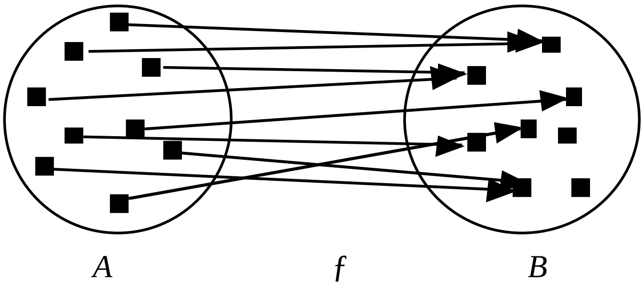
Ein geordnetes *Paar* ist also ein 2-Tupel; 3-Tupel [4-Tupel] heißen auch *Tripel* [*Quadrupel*].
Für beliebige Mengen $M_1,\ldots,M_n$ ist das *n-stellige cartesische Produkt* $M_1 \times \ldots \times M_n$ die Menge der n-Tupel $(x_1,\ldots,x_n)$, so daß für alle i (zwischen 1 und n) gilt: $x_i \in M_i$.
Es sei M eine beliebige Menge, $n \geq 1$. Dann ist M^n das n-stellige cartesische Produkt von M mit sich selbst: $M := M \times \ldots \times M$, und eine *n-stellige Relation über M* ist eine Teilmenge von M^n.
[NB: Diese Definitionen setzen keinen mengentheoretischen Zahlbegriff voraus; was definiert wird, sind *Notationen*, die von Zeichen für natürliche Zahlen Gebrauch machen.]

Beispiel

Die Menge R der Quadrupel (n_1, n_2, m_1, m_2) von natürlichen Zahlen, so daß $n_1 \cdot n_2 = m_1 \cdot m_2$ ist eine vierstellige Relation mit der Eigenschaft, daß $\{(m_1, m_2, n_1, n_2), (n_2, n_1, m_1, m_2), (n_1, n_2, m_2, m_1)\} \subseteq R$, sobald $(n_1, n_2, m_1, m_2) \in R$. Es gilt z.B.: $(2,15,5,6) \in R$.

1.4 Funktionen

Es seien A und B Mengen, $f \subseteq A \times B$. f ist eine *Funktion von A nach B* – symbolisch: $f: A \to B$ – falls es für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt, so daß gilt: $(a,b) \in f$. Notation: '$f(x)$' bezeichnet dasjenige y, so daß $(x,y) \in f$.
Anschaulich:



Beispiele

Die Menge der Paare (n,m) von natürlichen Zahlen, so daß $m = n^2$ ist eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ (die *Quadratfunktion*), nicht aber die Menge der Paare (n,m) von natürlichen Zahlen, so daß $n = m^2$; auch die Menge der Paare (x,y) von reellen Zahlen, so daß $x = y^2$, ist keine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$,wohl aber die Menge der Paare (x,y) von positiven reellen Zahlen, so daß $x = y^2$ (die *Wurzelfunktion*).

Terminologisches:
Vor- und Nachfeld einer Funktion f bezeichnet man auch als *Definitions-* bzw. *Wertebereich von f*. Man beachte, daß $f: A \to B$ zwar heißt , daß $\mathtt{rge}(f) \subseteq B$, aber nicht unbedingt, daß $\mathtt{rge}(f) = B$.

Definitionen
Sei $f: A \to B$.

f ist *injektiv* gdw. für alle $a, b \in A$ gilt: wenn $a \neq b$, dann ist $f(a) \neq f(b)$ – oder ("positiv ausgedrückt"): wenn $f(a) = f(b)$, dann ist $a = b$. ["Pfeile laufen nie zusammen"]

f ist *surjektiv auf B* gdw. es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so daß $f(a) = b$. ["Die Pfeilspitzen decken B ab"]
f ist *bijektiv von A nach B* gdw. f injektiv und surjektiv auf B ist.

NB: Jede Funktion ist surjektiv auf ihren Wertebereich!
Bemerkung
Wenn $f: A \to B$, dann gilt $f^{-1}: B \to A$ genau dann, wenn f bijektiv von A nach B ist. f^{-1} heißt dann die *Umkehrfunktion von f*.
Beweis wäre umständlich, den Sachverhalt sollte man sich aber anschaulich klarmachen.

Beispiele
– aus der Mathematik: Die Quadratfunktion ist injektiv, aber nicht surjektiv auf $\mathbb{N}$; die Wurzelfunktion ist bijektiv auf den positiven reellen Zahlen.
- aus dem täglichen Leben: Die Menge der Paare (P,T) von Personen P, die am Tag T geboren sind, ist nicht injektiv, aber surjektiv auf die Menge aller Geburtstage; die Menge der Paare (F,M) von Frauen und ihren Ehemännern ist keine Funktion von der Menge der Frauen in die der Männer, aber (bei Bigamieverbot) eine Bijektion von der Menge der Ehefrauen in die der Ehemänner.

Beobachtung
Denselben Funktionswert zu besitzen ist eine Äquivalenzrelation. Genauer: wenn $f: A \to B$, ist $\{(x,y) \in A^2 \mid f(x) = f(y)\}$ eine Äquivalenzrelation über A. R ist die *Wertgleichheit* zu f.

Und wieder gibt es eine (besonders aufschlußreiche) Umkehrung:
Wenn R eine Äquivalenzrelation über einer Menge A ist, gibt es eine Menge B und eine Funktion f von A nach B, so daß R die Wertgleichheit zu f ist.
Der Beweis ist verblüffend einfach: man nimmt als B einfach die von R induzierte Partition von A und setzt $f := \{(a, |a|_R) \mid a \in A\}$. Daß f eine Funktion von A nach $\wp(A)$ ist, folgt dann aus der im Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen und Partitionen gemachten Beobachtung (*); und daß R die Wertgleichheit ist, liegt

daran, daß $f(a) = f(a')$ gerade bedeutet, daß $|a|_R = |a'|_R$, was wiederum heißt, daß aRa', wie man leicht nachprüft.

Indizierungen und Folgen
Funktionen f können dazu benutzt werden, um sich mit den Elementen einer Menge I auf die Elemente einer anderen Menge M zu beziehen. Die $i \in I$ dienen dann quasi als Labels oder Namen für die $m \in M$. In diesem Falle nennt man f auch eine *Indizierung von M* (mit einer *Indexmenge I*). Indizierungen sind oft, aber nicht notwendigerweise injektiv, wobei man dann statt: $f: I \to M$ auch: $M = (m_i)_{i \in I}$ schreibt. Wenn für die Indexmenge eine Ordnungsstruktur vorausgesetzt werden darf, überträgt sich letztere auf die indizierte Menge. Ein häufiger Fall sind *Anfangsstücke I* von $\mathbb{N}$, also Mengen der Form $\{0,1,2,\ldots,n\}$. Man schreibt dann die Indizierung auch als: $(m_i)_{i \leq n}$ oder $<m_0,m_1,\ldots,m_n>$ und nennt sie ein *n-stellige (endliche) Folge*. n-stellige Folgen sind insofern wie n-Tupel, als auch für sie gilt: $<a_0,a_1,\ldots,a_n> = <b_0,b_1,\ldots,b_n>$ gdw. für alle i zwischen 0 und n gilt: $a_1 = b_i$, aber sie können nicht alle Aufgaben der n-Tupel übernehmen: als Funktionen sind sie Mengen von geordneten Paaren und setzen also schon den Paarbegriff voraus!

1.5 Unendlichkeit

Definition: Es seien A und B Mengen. Dann gilt:
A und B sind genau dann *gleichmächtig* – symbolisch: $A \sim B$ – wenn es eine Bijektion von A nach B gibt.
A ist *höchstens so mächtig wie B* – symbolisch: A & B – wenn es eine injektive Funktion von A nach B gibt.

Beispiele

- $\{0,1,2\} \sim \{3,5,6\}$; $\{a,b\} \sim \{a\}$, wenn $a = b$; etc.
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}^+$ [$= \mathbb{N} \setminus \{0\}$]; $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}^+$.
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ [= Menge der rationalen Zahlen, d.h. Menge der Brüche mit ganzem Zähler und Nenner]

Am ersten • sieht man, daß Gleichmächtigkeit *im endlichen Falle* auf gleiche Elementanzahl hinausläuft; im unendlichen Fall macht der unterstrichene Begriff zunächst keinen Sinn. Am zweiten und dritten • sieht man, daß unendliche Mengen mit ihnen selbst gleichmächtige echte Teilmengen besitzen können. Der dritte • ist nicht trivial undwurde zuerst von Cantor bewiesen, im wesentlichen durch Aufzählung aller positiven Brüche nach folgendem *[ersten] Diagonalverfahen*: die wie in der linken Tabelle dargestellten Brüche lassen sich in der in der rechten Tabelle angegebenen Reihenfolge aufzählen:

Zähler \ Nenner	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	…
0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	…
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	…	…
2	2/1	2/2	2/3	2/4	…	…	…
3	3/1	3/2	3/3	…	…	…	…
4	4/1	4/2	…	…	…	…	…
5	5/1	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Zähler \ Nenner	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	…
0	1	2	4	7	11	16	…
1	3	5	8	12	17	…	…
2	6	9	13	18	…	…	…
3	10	14	19	…	…	…	…
4	15	20	…	…	…	…	…
5	21	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Beobachtung: Für beliebige Mengen A, B und C gilt:

a) $A \sim A$;
b) wenn $A \sim B$, dann auch $B \sim A$;
c) wenn $A \sim B$ und $B \sim C$, dann auch $A \sim C$.
[~ verhält sich also wie eine Äquivalenzrelation – ist aber keine, weil ~ überhaupt keine Menge ist!]
d) Wenn $A \& B$ und $B \& C$, so $A \& C$.

Beweis: a) gilt, weil id_A eine Bijektion ist.
b) gilt, weil f^{-1} eine Bijektion von B nach A ist, wenn f eine Bijektion von A nach B ist.
c) gilt, weil $f \circ f'$ eine Bijektion von A nach C ist, wenn f und f' Bijektionen von A nach B bzw. von B nach C sind.
d) gilt, weil $f \circ f'$ eine injektive Funktion von A nach C ist, wenn f und f' injektive Funktionen von A nach B bzw. von B nach C sind.
[Am Rande: die im Beweis benutzten Eigenschaften von Bijektionen a) – c) spielen in der Algebra eine wichtige Rolle, denn sie garantieren, daß die Bijektionen von einer Menge in sich selbst eine sog. *Gruppe* bilden.]

Die folgenden beiden *Ordnungseigenschaften* von & sind weniger offensichtlich:

e) Wenn $A \& B$ und $B \& A$, so $A \sim B$.
f) Entweder $A \& B$ oder $B \& A$.

e) ist der *Schröder-Bernstein-Satz*, dessen Beweis hier zu weit führen würde.[7]
f) läßt sich mit den bisherigen Axiomen gar nicht beweisen, sondern verlangt nach dem:

Auswahlaxiom
Wenn A eine Menge von nicht-leeren Mengen ist, dann gibt es eine Funktion f: $A \rightarrow \bigcup A$, die jedem $X \in A$ ein Objekt $x \in X$ zuordnet: $f(X) \in X$.

Die Beispiele suggerieren, daß sich Größengleichheit zwischen unendlichen Mengen – wenn überhaupt – jedenfalls nicht mit Gleichmächtigkeit definieren läßt, weil man so keine Abstufungen im Unendlichen bekäme. Dieser Eindruck ist grottenfalsch:

Satz von Cantor
Keine Menge ist gleichmächtig mit ihrer Potenzmenge.

Beweis
Angenommen, es gäbe eine Menge A, so daß $A \sim \wp(A)$ und somit auch eine Bijektion f von A nach $\wp(A)$. Wir setzen $X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$. Da $X \in \wp(A)$ und f surjektiv ist, muß es ein $x \in A$ geben, so daß $f(x) = X$. Aber dann wäre $x \in f(x)$ gdw. $x \in \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ gdw. $x \notin f(x)$, was nicht sein kann.

NB: Der Satz von Cantor besagt, daß Potenzmengenbildung zu Abstufungen im Unendlichen führt, aber nicht, daß alle Abstufungen durch Potenzmengenbildung entstehen. Letzteres ist bekannt als (von Cantor vermutete):

7 Nach Ernst Schröder (1841–1902) und Felix Bernstein (1878–1956), obwohl der Satz zuerst 1887 von Dedekind (s. Fn. 1) bewiesen wurde.

Kontinuumshypothese
Wenn A und B unendliche Menge sind und A kleiner ist als B, dann ist $\wp(A)$ kleiner als B oder gleichmächtig.

[Weitere Beobachtungen in diesem Zusammenhang:

- $\mathbb{R} \sim [0,1] \sim \wp(\mathbb{N})$.

Dabei ist die Menge der reellen Zahlen und [0,1] das (geschlossene) Intervall der reellen Zahlen zwischen 0 und 1: $[0,1] = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}$; [0,1] heißt auch *Kontinuum*, daher der Name der Hypothese. Beide Zusammenhänge lassen sich leicht einsehen, wenn man reelle Zahlen als nicht abbrechende Kommazahlen im Binärsystem darstellt.]

Die Kontinuumshypothese ist weder richtig noch falsch, sondern *unabhängig* von den Axiomen der Mengenlehre (wenn letzere überhaupt konsistent sind). Dies folgt aus Sätzen von Gödel und Cohen.[8]

Definition
Eine Menge M ist *endlich*, wenn M die einzige zu M gleichmächtige Teilmenge von M ist.
Bisher garantieren die Axiome zwar, daß es unendlich viele Mengen gibt, aber nicht, daß unendliche Mengen gibt. Dazu wird ein spezielles Axiom herangezogen, das zunächst motiviert werden muß durch die Rekonstruktion der natürliche Zahlen innerhalb der Mengenlehre, also eine Konstruktion, nach der jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ eineindeutig eine Menge n^* entspricht. Hier gibt es zuächst verschiedene Ideen, z.B.:

Zermelosche Zahlen[9]:
Man fängt leer an und nimmt als Nachfolger die Einermenge des Vorgängers:
$0^* := \emptyset$; $n'^* = \{n\}$.

Fregesche Zahlen[10]
Man nehme für n^* die Menge aller Mengen mit n Elementen. Induktiv:
$0^* := \{\emptyset\}$; $n'^* := \{X \mid \text{es gibt } M \in n^* \text{ und } x, \text{ so daß gilt: } x \notin M \text{ und } X = M \cup \{x\}\}$.

von Neumannsche Zahlen[11]
Man nehme für n^* die Menge der m^* für $m<n$. Induktiv:
$0^* := \emptyset$; $n'^* = n^* \cup \{n^*\}$.

Mit den *Zermeloschen Zahlen* ist vor allem die Arithmetik nur schwer rekonstruierbar: selbst einfachsten arithmetischen Begriffen entsprechen keine natürlichen mengentheoretische Konstruktionen. Außerdem ergeben sich Schwierigkeiten bei der gleich zu diskutierenden Verallgemeinerung auf beliebige Ordinalzahlen.

Die *Fregeschen Zahlen* sind also die Äquivalenzklassen der Gleichmächtigkeit. Leider bilden sie

8 Kurt Gödel (1906–1978) hat 1940 gezeigt, daß die mengentheoretischen Axiome (Konsistenz vorausgesetzt) mit der Kontinuumshypothese verträglich sind; Paul Cohen (*1934) hat 1963 nachgewiesen, daß sie (unter derselben Voraussetzung) mit ihrer Negation verträglich sind.

9 Ernst Zermelo (vgl. Fn . 4) hat 1908 von dieser Konstruktion Gebrauch gemacht.

10 Nach Gottlob Frege (1848–1925), der diese Urform der *Abstraktion durch Äquivalenzklassenbildung* in seinen *Grundlagen der Arithmetik* (1884) verwendet hat.

11 Nach dem ungarischen Mathematiker John von Neumann (1903–1957).

in dieser Form keine Menge, d.h. die Annahme der Existenz Fregescher Zahlen (außer im Falle der 0) führt im Rahmen von ZF zum Widerspruch. Die Konstruktion läßt sich zwar (analog zur Gewinnung des Aussonderungsaxioms aus dem Komprehensionsschema) rekonstruieren, ist dann aber auch nicht auf beliebige Ordinalzahlen verallgemeinerbar.
Die *von Neumannschen* Zahlen werden heutzutage allgemein verwendet.

Definition

Der *Nachfolger* X' einer (beliebigen) Menge X ist: $X \cup \{X\}$. Eine Menge M heißt *induktiv*, falls sie Ø als Element enthält und *unter Nachfolgerschaft abgeschlossen* ist: $\emptyset \in M$, und für alle $X \in M$ gilt: $X \cup \{X\} \in M$.

Unendlichkeitsaxiom

Es gibt eine induktive Menge.

Der Vorteil der von Neumanschen Konstruktion ist, daß man mit derselben Nachfolger-Operation weitermachen kann, wenn einem die natürlichen Zahlen ausgegangen sind. Dazu definiert man zunächst – für beliebige Mengen M – eine zweistellige Relation

$$\in_M := \{(x,y) \in M^2 \mid x \in y\}.$$

Beobachtung: Aus dem Unendlichkeitsaxiom folgt, daß es eine *kleinste* induktive Menge ω gibt, d.h. eine Menge α, die induktiv ist und so daß gilt: wenn β eine induktive Menge ist, dann ist $\alpha \subseteq \beta$. ω ist demnach die Menge der [von Neumannschen] natürlichen Zahlen.

Genauer: Für beliebige induktive Mengen X, wie es sie nach dem Unendlichkeitsaxiom gibt, setzt man zunächst:

$$X_* := \{x \in X \mid \text{für alle induktiven } Y \subseteq X \text{ gilt: } x \in Y\}.$$

Man prüft dann leicht nach, daß X_* stets induktiv ist und Teilmenge jeder induktiven Teilmenge eines induktiven X. Wenn nun X und Y beliebige induktive Mengen sind, ist offensichtlich auch $X \cap Y$ wieder induktiv. Also ist $X_* = (X \cap Y)_* = Y_* =: \omega$.

Definition

α ist eine *Ordinalzahl* ist, falls $\in_\alpha$ eine *Wohlordnung* auf α ist, d.h.:

- $\in_\alpha$ ist *linear* (oder *konnex*):
  für $x, y \in M$ gilt stets: $x \in_\alpha y$ oder $y \in_\alpha x$ oder $x = y$.
- $\in_\alpha$ ist transitiv [s.o.]:
  wenn $x \in_\alpha y \in_\alpha z$, dann gilt: $x \in_\alpha z$;

[• $\in_\alpha$ ist asymmetrisch [s.o.]:
  wenn $x \in_\alpha y$, dann gilt nicht: $y \in_\alpha x$;
• $\in_\alpha$ ist *fundiert*:
  für jedes $X \subseteq M$ gibt es ein $m \in X$, so daß für alle $x \in X$ gilt: wenn $x \neq m$, dann ist $m \in_\alpha x$.]

Die letzten beiden Bedingung sind eingeklammert, denn sie folgen aus dem:

Fundierungsaxiom

Wenn $X \neq \emptyset$, dann gibt es ein $M \in X$, so daß gilt: $M \cap X = \emptyset$.

Die Idee ist, unendlich absteigende ∈-Ketten $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ldots$ zu verbieten. Die Menge $K = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ widerspräche in der Tat dem Fundierungsaxiom: $x_1 \cap K \neq \emptyset$ (denn $x_2 \in x_1 \cap K$), $x_2 \cap K \neq \emptyset$ (denn $x_3 \in x_2 \cap K$) etc.

Allgemeine Konvention: Kleine griechische Buchstaben (‘α’, ‘β’,…) sind

Variablen für Ordinalzahlen. Statt '$\alpha\in\beta$' schreibt man auch '$\alpha<\beta$'.

Allgemeine Eigenschaften von Ordinalzahlen

(a) $\emptyset\in\alpha$, wenn $\alpha\neq\emptyset$; und wenn $\beta'\in\alpha$, dann $\beta\in\alpha$.

(b) $\alpha\subseteq\beta$ gdw. $\alpha\in\beta$ oder $\alpha=\beta$.

(c) Wenn $\alpha\in\beta$ und $\beta\in\gamma$, dann $\alpha\in\gamma$.

(d) $\alpha\in\beta$ oder $\beta\in\alpha$ oder $\alpha=\beta$.

(e) Jede Menge von Ordinalzahlen M besitzt ein kleinstes Element.

Achtung: Die Ordinalzahlen bilden in ihrer Gesamtheit keine Menge!

Satz

Für jede Wohlordnung R auf einer Menge M gibt es genau eine Ordinalzahl α, so daß gilt: (M,R) und $(\alpha,\in_\alpha)$ sind *isomorph*, d.h. es gibt eine Bijektion f: $M \to \alpha$, so daß für alle $x, y\in M$ gilt: xRy gdw. $f(x)\in_\alpha f(y)$ [gdw. $f(x)\in f(y)$!].

Der Satz folgt aus allgemeinen Eigenschaften von Wohlordnungen – insbesondere, daß immer eine von zwei gegebenen Wohlordnungen mit einem Anfangsstück der anderen isomorph ist. Zusammen mit dem nächsten Satz folgt jetzt, daß (gewisse) Ordinalzahlen auch als Größenmaße für unendliche Mengen taugen:

Wohlordnungssatz

Auf jeder Menge gibt es eine Wohlordnung.

Für Cantor war der Wohlordnungssatz ein unbeweisbares Prinzip (wie ein Axiom); in ZF ist er zum Auswahlaxiom äquivalent!

Korollar

Jede Menge ist zu einer Ordinalzahl gleichmächtig.

Das Korollar folgt unmittelbar aus dem Wohlordnungssatz und dem vorhergehenden Satz. Es motiviert die folgende Definition:

Definitionen

(a) Eine *Kardinalzahl* ist eine Ordinalzahl α, für die gilt: es gibt kein $\beta<\alpha$, so daß $\alpha\sim\beta$.

(b) Eine *Nachfolgerzahl* ist eine Ordinalzahl der Gestalt α'.

(c) Eine *Limeszahl* ist eine von $\emptyset$ verschiedene Ordinalzahl, die keine Nachfolgerzahl ist. Eine *Kardinalzahl* ist eine Ordinalzahl α, für die gilt: es gibt kein $\beta<\alpha$, so daß $\alpha\sim\beta$.

Beobachtung: Unendliche Kardinalzahlen sind stets Limeszahlen.

Prinzip der transfiniten Induktion

Für alle Eigenschaften E gilt:

Wenn:	$E(\emptyset)$
und:	$E(\alpha')$, sobald $E(\alpha)$
und:	$E(\lambda)$, sobald $E(\beta)$ für Limeszahlen λ und $\beta<\lambda$,
Dann:	$E(\alpha)$, für alle Ordinalzahlen α.

Alephs

$\aleph_0 = \omega$;

$\aleph_{\alpha'}$ = die kleinste Ordinalzahl, die größer ist als $\aleph_\alpha$;

$\aleph_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\aleph_\lambda} \aleph_\alpha$.

Und schließlich noch ein letztes Axiom, das sogleich im Rahmen der Typenlogik zum Einsatz kommen wird; zuvor noch eine

Notationskonvention

Es sei $\mathsf{A}(x,y)$ eine mengentheoretische Aussage, so daß gilt: für jedes x gibt es genau ein y, so daß $\mathsf{A}(x,y)$. Für gegebenes x bezeichnet dann '$\mathsf{F}_{\mathsf{A}}(x)$' gerade das y, so daß $\mathsf{A}(x,y)$. 'F_{A}' wird dann ein *Funktional* genannt.

Ersetzungsaxiom[12]

Für jedes mengentheoretische Funktional F_{A} und jede Menge X gibt es eine Menge Y, deren Elemente genau die Objekte $\mathsf{F}_{\mathsf{A}}(x)$ für $x \in X$ sind.

Notation: $Y = \{\mathsf{F}_{\mathsf{A}}(x) \mid x \in X\}$

Beispiel

Die transitive Hülle einer Relation R läßt sich mit dem Ersetzungsaxiom als $R^* = \cup\{\mathrm{R}_n \mid n \in \omega\}$ definieren.

12 Auch als *Fraenkels Axiom* bekannt, denn es war Fraenkels Hauptbeitrag zur ZF-Axiomatisierung.

2. *Typenlogik*

2.0 Funktionale Typen

Definition

Es seien e und t irgendwelche (ab jetzt festen) voneinander verschiedenen Objekte, aber keine geordneten Paare. Die Menge der (*funktionalen*) *Typen* ist die kleinste Menge $\boldsymbol{T}$, so daß gilt:

$$e\in \boldsymbol{T},\ t\in \boldsymbol{T}, \text{ und } (a,b)\in \boldsymbol{T}, \text{ sobald } a\in \boldsymbol{T} \text{ und } b\in \boldsymbol{T}.$$

e und t dürfen keine Paare sein, damit verschieden 'konstruierte' Typen nicht 'zufällig' zusammenfallen. – Die Redeweise von der *kleinsten* Menge ist im Sinne der Inklusionsbeziehung $\subseteq$ zu verstehen: $\boldsymbol{T}$ ist Teilmenge jeder Menge, die e und t enthält und unter Paarbildung abgeschlossen ist. Der Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit einer kleinsten Menge aller Typen ist Routine und läuft analog zur oben skizzierten Konstruktion von ω.

Es sei D eine beliebige (fürs erste feste), nicht leere Menge. Durch Induktion über die Länge der Typen definiert man dann eine Familie $(D_a)_{a\in \boldsymbol{T}}$:

$$D_e = D;\ D_t = \{0,1\}\ [= 2!];\ D_{ab} = D_b{}^{D_a};$$
$$D_* = \cup\{D_a \mid a\in \boldsymbol{T}\}$$

Die Elemente von D spielen die Rolle von Urelementen (*e*ntities) im funktionalen Universum; die Zahlen 0 und 1 sind die Wahrheitswerte (*t*ruth-values). Die Typenlänge ist die Funktion lg von $\boldsymbol{T}$ nach ω, so daß für alle a, $b \in \boldsymbol{T}$ gilt: $lg(e) = lg(t) = 0$ und $lg(ab) = lg(a) + lg(e) + 1$.

Es sei $a\in \boldsymbol{T}$ und $M\subseteq D_a$ und $f \in D_{at}$. $f\in D_{at}$ *charakterisiert* M *(relativ zu* D_a*)*, falls für alle $u\in D_a$ gilt: $f(u) = 1$ gdw. $u\in M$ [d.h.: $f = M\times\{1\} \cup (D_a \setminus M)\times\{0\}$].

Statt 'f charakterisiert M' sagt man auch 'f ist die charakteristische Funktion von M'.

Beobachtung

$\{(f,M)\in D_{at}\times \wp(D_a) \mid f$ charakterisiert $M\}$ ist eine Bijektion von D_{at} nach $\wp(D_a)$.

Notation: f_* ist die von f charakterisierte Menge.

Es seien a, $b\in \boldsymbol{T}$, $R\subseteq D_a\times D_b$ und $f \in D_{b(at)}$. f *schönfinkelt*[13] R *(relativ zu* D_a *und* D_b*)*, falls für alle $u\in D_a$ und $v\in D_b$ gilt:

$$f(v)(u) = 1 \text{ gdw. } uRv.$$

Die verkehrte Reihenfolge ist sprachanalytisch motiviert: die Klammerung $f(m)(h)$ entspricht der syntaktischen Struktur von *[Hans [liebt Maria]]* .

Beobachtung

$\{(f,R)\in D_{b(at)}\times \wp(D_a\times D_b) \mid f$ schönfinkelt $R\}$ ist eine Bijektion von $D_{b(at)}$ nach $\wp(D_a\times D_b)$.

---

13 Nach Moses Schönfinkel [Mojzes Il'ič Šejnfinkel'] (1889 – ~1942), dem Begründer der kombinatorischen Logik. Die Technik des Schönfinkelns war allerdings schon Frege bekannt.

Die beiden letzten Beobachtungen zeigen, daß die Typenhierarchie $(D_a)_{a\in \boldsymbol{T}}$ reichhaltiger ist, als sie zunächst erscheint: Mengen von Objekten und Relationen zwischen ihnen erscheinen in D_* in 'kodierter' Form. So enthält z.B. $D_{t(tt)}$ alle (geschönfinkelten) zweistelligen Junktoren. Allerdings sind die charakterisierten Mengen immer 'rein', d.h. sie enthalten niemals Objekte verschiedener Typen; und die schöngefinkelten Relationen bestehen nur jeweils zwischen Objekten zweier Typen.

2.1 Syntax der Typenlogik

Definitionen

Die Menge der *Hilfssymbole* der Typenlogik ist $H = \{$ '(', ')', 'λ', '='$\}$.
Die *Variablen* der Typenlogik ist eine (beliebige, feste) Familie $(Var_a)_{a\in \boldsymbol{T}}$ abzählbar unendlicher, jeweils paarweise voneinander disjunkter Mengen, die keines der Hilfssymbole enthalten.
$Var_* := \bigcup\{Var_a \mid a\in \boldsymbol{T}\}$.

[Eine Menge ist *abzählbar unendlich* gdw. sie zu ω gleichmächtig ist; paarweise Disjunktheit besagt, daß stets $D_a \cap D_b = \varnothing$.]

Eine *typenlogische Sprache* ist eine (beliebige) Familie $(Con_a)_{a\in \boldsymbol{T}}$ beliebiger, jeweils paarweise voneinander disjunkter Mengen (von *Konstanten*), die keines der Hilfssymbole und keine Variablen enthalten.
$Con_* := \bigcup\{Con_a \mid a\in \boldsymbol{T}\}$.

Es sei $L = (Con_a)_{a\in \boldsymbol{T}}$ eine typenlogische Sprache. Die *Ausdrücke von L* sind die kleinste Familie $(L^*_a)_{a\in \boldsymbol{T}}$, so daß für alle α und β und Typen *a*, *b*, *c* gilt:

(i) $Con_a \subseteq L^*_a$;

(ii) $Var_a \subseteq L^*_a$;

(iii) wenn $\alpha \in L^*_{ab}$ und $\beta \in L^*_a$, dann "α(β)" $\in L^*_b$; (Applikation)

(iv) wenn $x \in Var_a$ und $\alpha \in L^*_b$, dann "(λxα)" $\in L^*_{ab}$; (Abstraktion)

(v) wenn $\alpha \in L^*_a$ und $\beta \in L^*_a$, dann "(α=β)" $\in L^*_t$. (Identität)

Ausdrücke sind endliche Folgen von Symbolen (Hilfssymbolen, Konstanten und Variablen); die Notation "…" ist im Sinne *Quinescher Ecken* zu verstehen: "α(β)" ist also eine Funktion mit Definitionsbereich {0,1,2,3}.
Ausdrücke eines Typs *a* werden Objekte des Typs *a* denotieren. Identität drückt Denotationsgleichheit aus, Applikation das Ergebnis der Anwendung einer Funktion auf ein Argument des geeigneten Typs, und Abstraktion dient der 'punktweisen' schematischen Definition von Funktionen: "$(\lambda x\, x^2)$" bezeichnet also die Quadratfunktion.

Per Induktion über die *Länge* der Ausdrücke (= Kardinalität des Definitionsbereichs!) definiert man jetzt den Begriff der *freien Variablen*:
(i) $Fr(c) = \varnothing$, falls $c\in Con_*$; (ii) $Fr(x) = \varnothing$, falls $x\in Var_*$; (iii) Fr("α(β)") = $Fr(\alpha) \cup Fr(\beta)$; (iv) Fr("(λxα)") = $Fr(\alpha) \setminus \{x\}$; (v) Fr("(α = β)") = $Fr(\alpha) \cup Fr(\beta)$.
α ist *geschlossen*, falls $Fr(\alpha) = \varnothing$, *offen* sonst.

In Zukunft lassen wir die Quineschen Ecken weg, solange keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

2.2 Substitutionelle Deutung der Typenlogik

Für den gesamten Abschnitt sei $L = (Con_a)_{a\in \boldsymbol{T}}$ eine beliebige typenlogische Sprache.

Definitionen

Ein *L-Modell* ist ein Paar $M = (D,F)$, so daß gilt:

$D \neq \emptyset$;

F: $Con_* \to D_*$;

$F(c)\in D_a$, sobald $c\in Con_a$.

Wenn $M = (D,F)$ ein L-Modell ist, dann ist $L^M = (Con_a^M)_{a\in \boldsymbol{T}}$ diejenige typenlogische Sprache, so daß für alle $a\in \boldsymbol{T}$ gilt:

$Con_a^M = Con_a \cup \{\underline{u} \mid u\in D_a\}$;

dabei ist (für $u\in D_a$) eine eindeutige Konstante, die sonst nicht in L vorkommt.

Man kann z.B. $\underline{u} := (u, a,\cup\{L*_a \mid a\in \boldsymbol{T}\})$ setzen; das Fundierungsaxiom garantiert dann, daß die $\underline{u}$ voneinander verschieden und vom Rest der Sprache disjunkt sind. L^M enthält also für jedes Element in Ms Universum einen 'Standardnamen'; diese Eigenschaft macht man sich in der Deutung der Abstraktion zunutze. Zuvor jedoch noch eine zentrale

Definition

Es seien $a, b\in \boldsymbol{T}$, $\alpha\in L^M*_a$, $\beta\in L^M*_b$, und $x\in Var_a$. Dann ist $\alpha[^x/_\beta]$ das Ergebnis der *Substitution* (der freien Vorkommen) *von x in* α *durch* β, das wie folgt induktiv über αs Aufbau definiert wird:

(i) $\alpha[^x/_\beta] = \alpha$, falls $\alpha\in Con_a$;

(ii-a) $\alpha[^x/_\beta] = \alpha$, falls $\alpha\in Var_a$ und $\alpha \neq x$;

(ii-b) $\alpha[^x/_\beta] = \beta$, falls $\alpha = x$;

(iii) $\alpha[^x/_\beta] = \alpha_1[^x/_\beta](\alpha_2[^x/_\beta])$, falls $\alpha = \alpha_1(\alpha_2)$;

(iv-a) $\alpha[^x/_\beta] = (\lambda y\ \alpha_1[^x/_\beta])$, falls $\alpha = (\lambda y\ \alpha_1)$ und $y \neq x$;

(iv-b) $\alpha[^x/_\beta] = \alpha$, falls $\alpha = (\lambda x\ \alpha_1)$;

(v) $\alpha[^x/_\beta] = (\alpha_1[^x/_\beta] = \alpha_2[^x/_\beta])$, falls $\alpha = (\alpha_1 = \alpha_2)$.

Beispiel: $(\lambda x_e\ (x = y_e))[^y/_{\mathbf{c}_e}] = (\lambda x_e\ (x = \mathbf{c}_e))$.

An diesem Beispiel erkennt man auch zwei metanotationelle Konventionen: Konstanten werden fett gedruckt, und dem ersten Vorkommen einer Variablen oder Konstanten in einem längeren Ausdruck wird ihr Typ als Subskript mitgeliefert.
Jetzt lassen sich die geschlossenen Ausdrücke der erweiterten Spache interpretieren – und damit auch die geschlossenen Ausdrücke von L selbst. Ausdrücke mit freien Variablen können getrost uninterpretiert bleiben.

Semantische Hauptdefinition (substitutionell)

Es sei $M = (D,F)$ ein L-Modell. Dann bestimmt sich der *Wert* (= die *Extension* = das *Denotat*) $\|\alpha\|^M$ eines geschlossenen [!] Ausdrucks $\alpha \in L_a^{M*}$ *im Modell M* wie folgt induktiv über αs Länge:

(i) $\|\alpha\|^M = F(\alpha)$, falls $\alpha \in Con_a$;

[(ii) $\|\alpha\|^M$ ist nicht definiert, wenn $\alpha \in Var^*$;]

(iii) $\|\alpha\|^M = \|\alpha_1\|^M (\|\alpha_2\|^M)$, falls $\alpha = \alpha_1(\alpha_2)$;

(iv) $\|\alpha\|^M = \{(u, \|\alpha_1[^x/_{\underline{u}}]\|^M) \mid u \in D_b\}$, falls $\alpha = (\lambda x\ \alpha_1)$ und $x \in Var_b$;

– d.h. für beliebiges $u \in D_b$ ist $\|\alpha\|^M (u) = \|\alpha_1[^x/_{\underline{u}}]\|^M$;

(v) $\|\alpha\|^M = \{u \mid [u = 0 \text{ und } \|\alpha_1\|^M = \|\alpha_2\|^M]\}$, falls $\alpha = (\alpha_1 = \alpha_2)$.

(v) setzt von Neumannsche Zahlen voraus: wenn die Bedingung erfüllt ist, ist der Wert {0}, also 1, andernfalls kommt Ø, also 0, heraus.
Damit die Induktion über die Ausdruckslänge funktioniert, muß man natürlich zuerst induktiv zeigen, daß die Ersetzung freier Variablen durch Konstanten die Länge nicht erhöht. Außerdem muß man zeigen, daß alle (und genau die) geschlossenen Ausdrücke von L^M einen Wert zugewiesen bekommen und daß dieser Wert vom selbenTyp ist wie der Ausdruck. All diese Induktionen sind einfach durchzuführen.

2.3 Kompositionelle Deutung der Typenlogik

Die substitutionelle Technik ist zwar intuitiv einleuchtend, aber nicht sehr verbreitet. Wir schauen uns deswegen alternativ dazu die – äquivalente – Standardmethode zur Deutung der Typenlogik an, bei der – quasi als Abfallprodukt – auch offene Ausdrücke semantische Werte erhalten. Für den gesamten Abschnitt sei $L = (Con_a)_{a \in \boldsymbol{T}}$ wieder eine beliebige typenlogische Sprache.

Definition

Wenn $M = (D,F)$ ein L-Modell (im Sinne von 2.2) ist, dann ist g: $Var^* \rightarrow D^*$ eine *M-Belegung*, falls für jeden Typ $a \in \boldsymbol{T}$ und jedes $x \in Var_a$ gilt: $g(x) \in D_a$.

Belegungen dienen der 'provisorischen' Interpretation freier Variablen. In der Prädikatenlogik werden sie oft durch Folgen der Länge ω ersetzt, wobei das n-te Glied den Wert der n-ten Variablen repräsentiert. In der Typenlogik ist diese Vorgehensweise offensichtlich wenig ratsam.

Vor der eigentlichen Interpretation benötigt man noch die der Substitution entsprechende Operation auf Belegungen:

Definition

Es sei g eine M-Belegung (für ein L-Modell M), $x \in Var_a$ und $u \in D_a$ (für ein $a \in \boldsymbol{T}$). Dann ist die *Modifikation von g (durch u an der Stelle x)* diejenige M-Belegung $g[^x/_u]$, für die gilt: $g[^x/_u]\ (x) = u$, und $g[^x/_u]\ (y) = g(y)$, falls y eine von x verschiedene Variable ist – d.h.: $g[^x/_u] = (g \setminus \{(x,g(x))\}) \cup \{(x,u)\}$.

Semantische Hauptdefinition (kompositionell)

Es sei $M = (D,F)$ ein L-Modell und g eine M-Belegung. Dann bestimmt sich der *Wert* (= die *Extension* = das *Denotat*) $[\![\alpha]\!]^{M,g}$ eines Ausdrucks $\alpha \in L_a^M$ *im Modell M* wie folgt induktiv über αs Länge:

(i) $[\![\alpha]\!]^{M,g} = F(\alpha)$, falls $\alpha \in Con_a$;

(ii) $[\![\alpha]\!]^{M,g} = g(\alpha)$, falls $\alpha \in Var_a$;

(iii) $[\![\alpha]\!]^{M,g} = [\![\alpha_1]\!]^{M,g}([\![\alpha_2]\!]^{M,g})$, falls $\alpha = \alpha_1(\alpha_2)$;

(iv) $[\![\alpha]\!]^{M,g} = \{(u,[\![\alpha_1]\!]^{M,g[x/u]}) \mid u \in D_b\}$, falls $\alpha = (\lambda x\, \alpha_1)$ und $x \in Var_b$;

– d.h. für beliebiges $u \in D_b$ ist $[\![\alpha]\!]^{M,g}(u) = [\![\alpha_1]\!]^{M,g[x/u]}$;

(v) $[\![\alpha]\!]^{M,g} = \{u \mid [u = 0 \text{ und } [\![\alpha_1]\!]^{M,g} = [\![\alpha_2]\!]^{M,g}]\}$, falls $\alpha = (\alpha_1 = \alpha_2)$.

Kompositionell heißt hier: die Bedeutung einer komplexen Formel ergibt sich systematisch (= als Wert einer festen Funktion) aus den Bedeutungen ihrer unmittelbaren Teile und der Art ihrer Kombination (= Applikation, Abstraktion, oder Komposition). Der Bedeutungsbegriff ist dabei wie folgt zu verstehen: die *Bedeutung* einer Formel α (*gemäß* einem L-Modell $M = (D,F)$] ist die Funktion $f_\alpha: G_M \rightarrow D^*$, so daß $f_\alpha(g) = [\![\alpha]\!]^{M,g}$ für alle $g \in G_M$.

Algebraisch gesprochen ist $f: \cup\{L^*_a \mid a \in \boldsymbol{T}\} \rightarrow D^{*G_M}$ ein *Homomorphismus* von der durch die Syntax induzierten Strukturierung der Ausdrücke in ihre Teile [= syntaktische Termalgebra] in eine Familie semantischer Operationen [= semantische Algebra].

2.4 Vergleich der Deutungen

Die beiden Methoden zur Deutung typenlogischer Formeln sind in einem naheliegenden Sinne äquivalent:

Äquivalenzsatz

Es sei L eine typenlogische Sprache, $M = (D,F)$ ein L-Modell, $a \in \boldsymbol{T}$ und $\alpha \in L^*_a$ eine geschlossene Formel. Dann gilt für jede M-Belegung g:

$$[\![\alpha]\!]^{M,g} = \|\alpha\|^M .$$

Beweis

Der Satz ergibt sich unmittelbar aus dem Koinzidenzlemma (s.u.) und der folgenden Beobachtung, die induktiv über die Länge von Ausdrücken $\alpha \in L^{M}{}^*_a$ [!] bewiesen wird:

(*) $\|\alpha\|^M = [\![\alpha]\!]^{M^+,g}$.

Dabei ist M^+ das L^M-Modell (D, F^+) mit $F^+ = F \cup \{(\underline{u},u) \mid u \in D^*\}$ – also die 'natürliche' Deutung von L^M. (Das g ist als M-Belegung auch M^+-Belegung.) Der einzige nicht-triviale Fall im induktiven Nachweis von (*) ist offenbar: $\alpha =$ "$(\lambda x\ \alpha_1)$". Nach der substitutionellen Hauptdefinition ist aber (für jedes Argument u) $\|\alpha\|^M(u) = \|\alpha_{1[x/\underline{u}]}\|^M$, was nach der I.V. dasselbe ist wie $[\![\alpha_{1[x/\underline{u}]}]\!]^{M^+,g}$. Eine einfache Anwendung des Substitutionslemmas (s.u.) ergibt, daß $[\![\alpha_{1[x/\underline{u}]}]\!]^{M^+,g} = [\![\alpha_1]\!]^{M^+,g[x/u]} = [\![\lambda x\ \alpha_1]\!]^{M^+,g}(u)$, nach der kompositionellen Hauptdefinition. Also ist $\|\alpha\|^M = [\![\lambda x\ \alpha_1]\!]^{M^+,g}$.

Die beiden erwähnten technischen Lemmata sind grundlegend für die kompositionelle Deutung (nicht nur der Typenlogik), aber mühselig (per Induktion) zu beweisen; wir beschränken uns hier auf die Formulierung:

Koinzidenzlemma

Es seien L und L' typenlogische Sprachen, $M = (D,F)$ und $M' = (D',F')$ L- bzw. L'-Modelle, so daß $D = D'$ [!], g und g' M- bzw. M'-Belegungen, $a \in \boldsymbol{T}$ und $\alpha \in L^*_a \cap L'^*_a$. Dann gilt:

Wenn: $F(c) = F'(c)$ für alle Konstanten c, die in α vorkommen,

und: $g(x) = g'(x)$ für alle $x \in Fr(\alpha)$,

dann ist: $[\![\alpha]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M',g'}$.

Substitutionslemma

Es seien L eine typenlogische Sprache, M ein L-Modell, eine M-Belegung, $a, b \in \boldsymbol{T}$, $\alpha \in L^*_a$, $\beta \in L^*_b$ und $x \in Var_b$ Dann gilt:

Wenn β für x in α einsetzbar ist, dann ist: $[\![\alpha_{[x/\beta]}]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g[x/[\![\beta]\!]^{M,g}]}$.

Nach dem Koinzidenzlemma kommt es bei der Deutung komplexer Formeln also nur auf den Grundbereich und die Werte der in ihnen frei vorkommenden Konstanten und Variablen an – und insbesondere nicht auf die Werte gebundener Variablen. Daraus ergibt sich auch die Belegungsunabhängigkeit des Wertes geschlossener Aussagen (wie sie im Äquivalenzsatz mitbehauptet wird). Nach dem Substitutionslemma simuliert die Modifikation einer Belegung die Substitution durch einen entsprechenden Ausdruck. Der Begriff der Einsetzbarkeit soll dabei verhindern, daß β eine freie Variable enhält, die beim Substituieren gebunden wird, denn z.B. ist "$\lambda y\ (x = y)$"$_{[x/y]}$ = "$\lambda y\ (y = y)$", aber dieser Ausdruck ist im allgemeinen auch dann nicht extensionsgleich mit "$\lambda y\ (x = y)$", wenn x und y gleich interpretiert werden: im ersten Fall ergibt sich eine triviale Funktion (die stets 1 liefert und somit die entsprechende 'ontologische Schicht' charakterisiert), im zweiten Fall die charakteristische Funktion einer Einermenge. Die induktive Definition der Einsetzbarkeit sieht so aus:

Definition

(i)–(ii) Wenn α eine Variable oder Konstante ist, ist (beliebiges) β für x in α einsetzbar;

(iii),(v) wenn α = "$\alpha_1\ (\alpha_2)$" oder α = "$(\alpha_1 = \alpha_2)$", dann ist β für x in α einsetzbar gdw. β für x sowohl in α_1 als auch in α_2 einsetzbar ist;

(iv) wenn α = "$(\lambda y\ \alpha_1)$", dann ist β für x in α einsetzbar gdw. (a) $y \notin Fr(\beta)$ und β für x in α_1 einsetzbar ist, oder (b) $x \notin Fr\ (\lambda y\ \alpha_1)$ [oder beides].

2.5 Ausdrucksstärke der Typenlogik

Die Ausdrucksmittel der Typenlogik erscheinen auf den ersten Blick unzureichend, um die Sprache als *Logik* zu bezeichnen: es gibt gar keine Junktoren und Quantoren. Letztere lassen sich aber in einem (für die Typenlogik charakteristischen Sinn) *definieren*:

Definition

Sei L eine typenlogische Sprache, $a \in \boldsymbol{T}$ und $\alpha \in L^*_a$. Dann ist α eine *Definition*, falls α keine Konstanten enthält und geschlossen ist.

Da L nur Konstanten beiträgt, ist der Begriff der Definition unabhängig von der Sprache L; sie wird nur erwähnt, weil der Begriff des typenlogischen Ausdrucks eine Sprache voraussetzt. Aus dem Koinzidenzlemma ergibt sich weiter, daß der Wert einer Definition höchstens vom Universum D abhängt.

Beispiele für Definitionen

(a) $\lambda x_a\ x$

(b) $\lambda x_a\ (x = x)$

(c) $(\lambda x_t\ x) = (\lambda x\ (x = x))$

In (a) und (b) spielt der Typ der Variablen keine Rolle, aber in (c) muß er t sein, damit der Ausdruck überhaupt wohlgeformt ist! Es ist leicht nachzuweisen, daß der Wert der Formel in (a) stets die identische Abbildung (des entsprechenden Typs) ist, während der in (b) immer die Menge aller Objekte des Typs (relativ zu sich selbst) charakterisiert. Damit wird die unter (c) genannte Gleichung genau dann wahr, wenn die identische Abbildung f auf $\{0,1\}$ diese Menge selbst charakterisiert – was nicht der Fall ist: $f(0) = 0 \in \{0,1\}$! Die Gleichung ist somit unabhängig vom Universum – die Wahrheitswerte sind ja immer dieselben – falsch und in diesem Sinne eine Definition des Wahrheitswerts 0. Sie wird deshalb als "$\perp$" (*Falsum*) abgekürzt.
Der Typ einer Definition ist nicht vollkommen beliebig – es gibt z.B. keine Definitionen vom Typ e, dafür aber Definitionen in allen Typen der Gestalt (aa) sowie in allen Typen, die auf t enden. Wenn es Definitionen des Typs a gibt, können diese auch nicht unbedingt beliebige Werte annehmen: im Typ et sind z.B. immer nur genau zwei Objekte definierbar (welche wohl?); wenn allerdings a nur aus (beliebig kombinierten) ts besteht, sind alle Objekte des Typs a definierbar. Viele dieser Definierbarkeitsresultate beweist man mit Hilfe sog. *Permutationsbelegungen* , die aus einer gegebenen Belegung durch Vertauschung irgendwelcher Individuen hervorgehen.

Beobachtung

- Wenn $\alpha(\beta) \in L^*_a$, dann ist $[\![\alpha(\beta)]\!]^{M,g} = 1$ gdw. $[\![\beta]\!]^{M,g} \in [\![\alpha]\!]^{M,g}_*$;
- wenn $\varphi \in L^*_t$ und $x \in Var_a$, dann ist $[\![\lambda x\ \varphi]\!]^{M,g}_* = \{u \in D_a \mid [\![\varphi]\!]^{M,g[x/u]} = 1\}$.

Prädikation erweist sich so als Spezialfall der Applikation, Komprehension als Spezialfall der Abstraktion.

Da die *Negation* nur für die 0 den Wert 1 liefert, charakterisiert sie die Einermenge $\{0\} = \{u \in D_a \mid u = 0\}$, womit sie definierbar ist durch
$(\lambda x_t\ (x = \perp))$, was als "$\neg$" abgekürzt wird.

Eine *Allquantifikation* "$(\forall x\ \varphi)$" besagt, daß die Objekte, die φ erfüllen, das gesamte Universum ausmachen, daß also die x-Erfüllungsmenge von φ mit dem Universum zusammenfällt. Beschränkt man das Universum jeweils auf die Objekte eines festen Typs, ergibt sich die folgende *kontextuelle* Definition der Allquantifikation:

Definition

Für $\varphi \in L^*_t$ und $x \in Var_a$ ist "$(\forall x)\ \varphi$" eine Abkürzung für

"$((\lambda x\ \varphi) = (\lambda x\ (x = x)))$".

Auch die *Konjunktion* läßt sich definieren, wenn auch nicht so einfach. Eine Möglichkeit macht Gebrauch vom:

Leibnizprinzip (mengentheoretische Version)

Es sei E eine beliebige Menge und $u,v \in E$. Dann gilt:

$u = v$ gdw. für alle $P \subseteq E$ gilt: $u \in P$ gdw. $v \in P$.

Die eine Richtung ("$\Rightarrow$") gilt aus (meta-)logischen Gründen; die andere, weil $\{u\} \subseteq P$ und $\{v\} \subseteq P$.

Da die Konjunktion (als Funktion $f_\wedge: \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$) nur für das Paar (1,1) den Wert 1 liefert, charakterisiert sie die Einermenge $\{(1,1)\} = \{p \in \{0,1\}^2 \mid p = (1,1)\} = \{(u,v) \in \{0,1\}^2 \mid$ für alle $R \subseteq \{0,1\}^2 : (u,v) \in R$ gdw. $(1,1) \in R\}$, nach dem Leibnizprinzip oder – in relationaler Schreibweise:

$f_\wedge{}^* = \{(u,v) \in \{0,1\}^2 \mid$ für alle $R \subseteq \{0,1\}^2 : uRv$ gdw. $1R1\}$.

Mit Schönfinkelei bietet sich damit "&" als Abkürzung an für:

$(\lambda x_t\ (\lambda y_t\ (\forall R_{t\,(tt)})\ [R(y)(x) = R(\neg\bot)(\neg\bot)])),$

denn "gdw." besagt gerade die Gleichheit der Wahrheitswerte.

Es gibt eine andere Definition der Konjunktion, die nur über einstellige Wahrheitsfunktionen quantifiziert, dafür aber wohl nur schwer zu motivieren ist (außer dadurch, daß sie funktioniert):
$(\lambda f_{tt}\ f(x)) = (\lambda f\ (f(y) = x)$.

Da sich alle Junktoren auf Kombiationen von Negation und Konjunktion zurückführen lassen – was wir im prädikatenlogischen Teil nachweisen werden – und auch die Existenzquantifikation mit Allquantor und Negation definierbar ist, umfaßt also die Typenlogik die Prädikatenlogik. Hier noch einmal die wichtigsten

Abkürzungen für typenlogische Formeln

Die Notation	*ist eine Abkürzung für*	*vom Typ*
$\alpha(\beta,\gamma)$	$\alpha(\gamma)(\gamma)$	[je nachdem]
$\bot$	$(\lambda x_t\ x) = (\lambda x\ (x = x))$	t
$\neg$	$(\lambda x_t\ (x = \bot))$	tt
$\neg\ \varphi$	$\neg\ (\varphi)$	t
$(\forall x\ \varphi)$	$((\lambda x\ \varphi) = (\lambda x\ (x = x)))$	t
$(\exists x\ \varphi)$	$\neg\ (\forall x\ \neg\ \varphi)$	t
&	$(\lambda x_t\ (\lambda y_t\ (\forall R_{t\,(tt)})$ $[R(y)(x) = R(\neg\bot)(\neg\bot)]))$	$t(tt)$
$[\varphi\ \&\ \psi]$	$\&(\psi)(\varphi)$	t
	– *und analog für die anderen Junktoren* –	
$\vee$	$(\lambda x_t\ (\lambda y_t\ \ \neg\ [x\ \&\ \neg\ y]))$	$t(tt)$
$\rightarrow$	$(\lambda x_t\ (\lambda y_t\ \ [\neg y \vee x]))$	$t(tt)$

[Dabei sind φ und ψ stets vom Typ t. Man beachte, daß die Definition der Junktoren den Schönfinkel-Konventionen folgt.]

Exkurs zur Quantifikation

Die obige Definition der Quantifikation ist *kontextuell*, d.h. sie erklärt, wie man die Symbole "∀" und "∃" im Satzzusammenhang verstehen soll, weist ihnen aber keine eigenständige Bedeutung zu. Das entspricht den prädikatenlogischen Konventionen, ist aber im Rahmen der Typenlogik unnötig (und sogar irreführend). Quantoren sind ja Prädikate höherer Stufe, d.h. sie dienen zur Klassifikation "normaler" Prädikate. So besagt, z.B. die prädikatenlogische Formel "$(\exists x)\ [P(x)\ \&\ Q(x)]$", daß der Schnitt der Extensionen von P und Q nicht leer ist. In der Typenlogik kann nun dieser Schnitt direkt benannt werden, nämlich durch"$(\lambda x\ [P(x)\ \&\ Q(x)])$" vom Typ *et* – vorausgesetzt, es handelt sich bei P und Q um Prädkate *erster Stufe*, d.h. solche vom Typ *et*. Die Existenzquantifikation kann dann als Prädikation über diesem Schnitt aufgefaßt werden, also als Abkürzung von "$\exists(\lambda x\ [P(x)\ \&\ Q(x)])$", wobei dann "∃" als Eigenschaft, nicht leer zu sein interpretiert werden muß. "∃" ist – wie auch sein allquantifizierendes Gegenstück – typenlogisch definierbar:

Die Notation	*ist eine Abkürzung für*	*vom Typ*
$\forall$	$\lambda P_{et}\ ((\lambda x\ P) = (\lambda x\ (x = x)))$	$(et)t$
$\exists$	$\lambda P_{et}\ \neg\ \forall(\lambda x\ \neg P(\mathrm{x}))$	$(et)t$

Mit dieser direkten Definition der Quantoren läßt sich also die prädikatenlogische Quantifikation zurückführen auf eine Kombination von höherstufiger Prädikation (= Applikation) und Abstraktion.

2.6 Typenlogische Gesetze

Definitionen

Sei L eine typenlogische Sprache, $\varphi \in L^*_t$, $\Sigma \subseteq L^*_t$ und $\alpha,\beta \in L^*_a$ (für irgendein $a \in \boldsymbol{T}$).

φ *gilt in M* gdw. für alle *M*-Belegungen *g* gilt: $[\![\varphi]\!]^{M,g} = 1$; *Notation*: $M \models \varphi$.

Σ *gilt in M* gdw. für alle $\psi \in \Sigma$ gilt: $M \models \psi$; *Notation*: $M \models \Sigma$.

φ ist *gültig* gdw. für alle *L*-Modelle *M* gilt: $M \models \varphi$; *Notation*: $\models \varphi$

φ *folgt aus* Σ [oder auch: Σ *impliziert* φ] gdw. für alle *L*-Modelle *M* gilt:
wenn $M \models \Sigma$, dann $M \models \varphi$; *Notation*: $\Sigma \models \varphi$.

α und β sind *logisch äquivalent* gdw. für alle *L*-Modelle *M* und alle *M*-Belegungen *g* gilt: $[\![\alpha]\!]^{M,g} = [\![\beta]\!]^{M,g}$; *Notation*: $\alpha \equiv \beta$.

Beobachtungen

- $\models \varphi$ gdw. $\varnothing \models \varphi$.
- $\{\varphi\} \models \psi$ gdw. $\models [\varphi \rightarrow \psi]$, wenn φ und ψ geschlossen sind.
- $\alpha \equiv \beta$ gdw. $\models (\alpha = \beta)$.
- $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation über.

Neben den üblichen aussagen- und prädikatenlogischen Tautologien und Schlüssen (auf die wir im prädikatenlogischen Teil zu sprechen kommen) gibt es auch einige typisch typenlogische Gesetze. Insbesondere gelten in allen typenlogischen Sprachen L und für alle Typen $a,b \in \boldsymbol{T}$ die folgenden Äquivalenzen für beliebige Ausdrücke $\alpha \in L^*_a$, $\beta \in L^*_b$ und $x \in Var_a$

Gesetz der η-Konversion[14]

$$(\lambda x\ \beta(x)) \equiv \beta, \text{ wenn } x \notin Fr(\beta).$$

Man sagt in diesem Fall: "$(\lambda x\ \beta(x))$" ist η-*kontrahierbar zu* β: $(\lambda x\ \beta(x)) >_\eta \beta$.

Das Prinzip folgt aus dem Koinzidenzlemma. Die Einschränkung ist dabei wesentlich: wenn z.B. $\mathrm{R} \in \mathrm{Con}_{e(et)}$ die [geschönfinkelte] Relation des Rasierens denotiert, bezeichnet '$(\lambda x\ \mathrm{R}(x)(x))$' die [charakteristische Funktion der] Menge der Selbstrasierer, während sich $\mathrm{R}(x)$ auf die [charakteristische Funktion der] Menge derjenigen bezieht, die den (belegungsabhängigen) Wert von x rasieren – und diese beiden Mengen sind im allgemeinen nicht gleich.

Gesetz der β-Konversion

$$((\lambda x\ \alpha)\ (\beta)) \equiv \alpha[^x/_\beta], \text{ wenn } \beta \text{ für } x \text{ in } \alpha \text{ einsetzbar ist.}$$

Man sagt: "$((\lambda x\ \alpha)\ (\beta))$" ist β-*kontrahierbar zu* $\alpha[^x/_\beta]$: $((\lambda x\ \alpha)\ (\beta)) >_\beta \alpha[^x/_\beta]$.

Das Prinzip folgt aus dem Substitutionslemma. Die Einschränkung ist wieder wesentlich, wie das im Zusammenhang mit dem Substitutionslemma gegebene Beispiel zeigt.

Achtung: β-Kontraktion wirkt nicht immer verkürzend. Beispiel:
"$(\lambda x_e\ \mathbf{R}_{e(e(et)))}\ (x)(x)(x))(\P_{e(e(e(e)))}(\mathbf{c}_e)(\mathbf{c})(\mathbf{c}))$" $\times_\beta$ "$(\lambda x\ \mathbf{R}\ (f(\mathbf{c})(\mathbf{c})(\mathbf{c}))\ (f(\mathbf{c})(\mathbf{c})(\mathbf{c}))\ (f(\mathbf{c})(\mathbf{c})(\mathbf{c})))$ " .

Gesetz der α-Konversion

$$(\lambda x\ \alpha) \equiv (\lambda y\ \alpha[^x/_y]), \text{ wenn } y \text{ für } x \text{ in } \alpha \text{ einsetzbar ist und } y \notin Fr(\lambda x\ \alpha).$$

Man sagt: "$(\lambda x\ \alpha)$" ist α-*kontrahierbar zu* "$(\lambda x\ \alpha[^x/_y])$": $(\lambda x\ \alpha) >_\alpha (\lambda y\ \alpha[^x/_y])$.

Das Prinzip folgt – wie in der Prädikatenlogik – aus Substitutions- und Koinzidenzlemma. Beide Einschränkungen sind wesentlich: "$(\lambda x\ (\lambda y\ x))$" und "$(\lambda y\ (\lambda y\ x)[^x/_y])$" (= "$(\lambda y\ (\lambda y\ y))$") sind nicht äquivalent [warum nicht?], $y \notin Fr(\lambda y\ x)$, aber dafür ist y nicht einsetzbar für x in $(\lambda y\ x)$; ebenso sind "$\lambda x\ y$" und "$(\lambda y\ y[^x/_y])$" (= "$\lambda y\ y$") nicht äquivalent [?!], y ist einsetzbar für x in y, aber dafür ist $y \in Fr(y)$.

Satz

$>_\alpha$ ist eine Äquivalenzrelation über $\bigcup_{a \in \boldsymbol{T}} L^*_a$.

Für den Beweis benötigt man ein paar allgemeine Gesetze von Freiheit und Bindung:
Für beliebige $\alpha, \beta \in \bigcup_{a \in \boldsymbol{T}} L^*_a$ und $x, y, z \in Var$ gilt:

(a) x ist einsetzbar für x in $\alpha = \alpha[^x/_y]$.
(b) Wenn $x \notin Fr(\beta)$, dann ist $x \notin Fr(\alpha[^x/_y])$.
(c) Wenn $x \notin Fr(\alpha)$, dann ist β einsetzbar für x in $\alpha = \alpha[^x/_\beta]$.

14 Diese Bezeichnung geht (wie auch die nächsten beiden) auf die Liste der entsprechenden Axiome des λ-Kalküls [s.u.] in Alonzo Churchs (1903–1995) *Calculi of λ-Conversion*(1941) zurück. 'η' soll auch an *Extensionalität* erinnern, weil die Äquivalenz so gelesen werden kann, daß eine (durch β bezeichnete) Funktion mit ihrem (durch $(\lambda x\ \beta(x))$ bezeichneten) Wertverlauf – also der Zuordnung von beliebigem Argument zum entsprechenden Funktionswert – gleichgesetzt wird und diese Gleichsetzung als 'extensionale' Auffassung von Funktionen bezeichnet wird; im Rahmen der Mengenlehre gilt sie zwar (u.a. wegen des Extensionalitätsaxioms), wird aber nicht allgemein akzeptiert.

(d) Wenn $y \notin Fr(\alpha)$ einsetzbar ist für x in α und $z \notin Fr(\alpha[^x/_y])$ einsetzbar ist für y in $\alpha[^x/_y]$, dann ist $\alpha[^x/_y][^y/_z] = \alpha[^x/_z]$.

(e) Wenn $y \notin Fr(\alpha)$ einsetzbar ist für x in α, dann ist $\alpha[^x/_y][^y/_x] = \alpha$.

(a)–(d) zeigt man induktiv über αs Aufbau, (e) folgt dann ohne Induktion. Reflexivität, Transitivität und Symmetrie von $>_\alpha$ folgen aus (c) – (e).

Beispiel für die drei Kontraktionen:

$$(\lambda x_e\, (\lambda y_e\, \mathrm{R}_{e(et)}(x)(y))\, (\mathrm{c}_e)$$

$>_\beta$ $(\lambda y_e\, \mathrm{R}_{e(et)}(\mathrm{c}_e)(y))$

$>_\alpha$ $(\lambda x_e\, \mathrm{R}_{e(et)}(\mathrm{c}_e)(x))$

$>_\eta$ $\mathrm{R}_{e(et)}(\mathrm{c}_e)$

Kontraktionen lassen sich auch ‘lokal’ anwenden, also innerhalb von Teilausdrücken. So ist z.B.

$$\text{“}(\forall x)\ \underline{(\lambda x\, (\lambda y\, \mathbf{R}(x)(y)))}\ (x)\ (\mathrm{c})\text{”} \equiv \text{“}(\forall x)\ \underline{(\lambda z\, (\lambda y \mathbf{R}(z)(y)))}\ (x)\ (\mathrm{c})\text{”},$$

wegen der $>_\alpha$-Beziehung zwischen den beiden unterstrichenen Teilen; ebenso ist:

$$\text{“}(\forall x)\ \underline{(\lambda z\, (\lambda y \mathbf{R}(z)(y))\ (x)}\ (\mathrm{c})\text{”} \equiv \text{“}(\forall x)\ \underline{(\lambda y \mathbf{R}(x)(y))}\ (\mathrm{c})\text{”}$$

und:

$$\text{“}(\forall x)\ \underline{(\lambda y \mathbf{R}(x)(y))\ (\mathbf{c})}\text{”} \equiv \text{“}(\forall x)\ \underline{\mathbf{R}(x)(\mathbf{c})}\text{”}$$

wegen der $>_\beta$-Beziehung zwischen den jeweils unterstrichenen Teilen. An diesem Beispiel sieht man auch, wie die Beschränkung in der β-Konversion durch Zwischenschalten einer α-Kontraktion – einer sog. *gebundenen Umbenennung* – ‘umgangen’ werden kann.

Eine genaue Formulierung der lokalen Anwendung von Kontraktionen setzt den Begriff der *Vorkommensersetzung* voraus:

Definition

Sei L eine typenlogische Sprache $\alpha \in L^*_a$, $\beta, \gamma \in L^*_b$ (für irgendwelche $a, b \in \boldsymbol{T}$). Dann ist $\alpha\frac{\beta}{\gamma}$ ist die durch folgende Induktion (über αs Aufbau) definierte Menge von Ausdrücken des Typs a:

(i/ii) $\alpha\frac{\beta}{\gamma} = \{\beta \mid \alpha = \gamma\}$, wenn $\alpha \in Con_a \cup Var_a$;

(iii) $\alpha\frac{\beta}{\gamma} = \alpha_1\frac{\beta}{\gamma}(\alpha_2) \cup \alpha_1(\alpha_2\frac{\beta}{\gamma}) \cup \{\beta \mid \alpha = \gamma\}$, wenn $\alpha =$ “ $\alpha_1(\alpha_2)$ ”;

(iv) $\alpha\frac{\beta}{\gamma} = (\lambda x\ \alpha_1\frac{\beta}{\gamma}) \cup \{\beta \mid \alpha = \gamma\}$, wenn $\alpha = (\lambda x\ \alpha_1)$;

(v) $\alpha\frac{\beta}{\gamma} = \alpha_1\frac{\beta}{\gamma}(\alpha_2) \cup \alpha_1(\alpha_2\frac{\beta}{\gamma}) \cup \{\beta \mid \alpha = \gamma\}$, wenn $\alpha =$ “($\alpha_1 = \alpha_2$) ”.

$\alpha\frac{\beta}{\gamma}$ ist also die *Menge* der Ausdrücke, die aus α hervorgehen, indem *genau ein Vorkommen* von β durch eines von γ ersetzt wird. Die dabei benutzten Mengenterme der Gestalt "$\{\beta \mid \alpha = \gamma\}$" bezeichnen die Menge aller Objekte der Gestalt β, so daß α und β identisch sind, d.h.: $\{\beta \mid \alpha = \gamma\} = \{\beta\}$, wenn $\alpha = \gamma$, und $\{\beta \mid \alpha = \gamma\} = \varnothing$, wenn nicht.

Substituierbarkeit von Logisch Äquivalentem

Wenn $\beta \equiv \gamma$ und $\alpha' \in \alpha\frac{\beta}{\gamma}$, dann ist $\alpha \equiv \alpha'$.

Das Prinzip folgt aus der Kompositionalität der semantischen Werte.

In Anwendungen der Typenlogik spielen vor allem Ersetzungen aufgrund der drei Kontraktionen eine große Rolle:

Definition

α ist *einfach* [α-]*reduzierbar zu* β – symbolisch: $\alpha \mathrm{x}^1 \beta$ [bzw. $\alpha \mathrm{x}^{1}_{\boldsymbol{\alpha}} \beta$] – falls es γ und γ' gibt, so daß gilt: (i) $\beta \in \alpha\frac{\gamma}{\gamma'}$ und: [(iiβ) $\gamma >_\beta \gamma'$ oder (iiη) $\gamma >_\eta \gamma'$] oder (iiα) $\gamma >_\alpha \gamma'$.

In normalen Reduktionen können sich also β-, η- und α-Kontraktionen abwechseln, in α-Reduktionen sind nur gebundene Umbenennungen erlaubt. Aus $\alpha \mathrm{x}^{1}_{\alpha} \beta$ folgt insbesondere $\alpha \mathrm{x}_1 \beta$; und wegen der Subsituiuerbarkeit von Äquivalentem folgt aus $\alpha \mathrm{x}_1 \beta$ stets $\alpha \equiv \beta$.

Bei einfacher Reduktion wird also ein Vorkommen eines Ausdrucks aufgrund einer der drei Kontraktionen ersetzt. Führt man mehrere einfache Reduktionen hintereinander (auch aufgrund verschiedener Kontraktionen) aus, besteht zwischen Anfangs- und Endpunkt die Reduktionsbeziehung:

Definition

α ist [α-]*reduzierbar zu* β – symbolisch: $\alpha \mathrm{x} \beta$ [bzw. $\alpha \mathrm{x}_{\boldsymbol{\alpha}} \beta$] – falls es ein $n \geq 1$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ gibt, so daß gilt: $\alpha = \gamma_1 \mathrm{x}^{1}_{[\boldsymbol{\alpha}]} \ldots \mathrm{x}^{1}_{[\boldsymbol{\alpha}]} \gamma_n = \beta$. (M.a.W.: x ist die transitive Hülle von x^1, $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\alpha}}$ die von $\mathrm{x}^{1}_{\boldsymbol{\alpha}}$.)

Statt 'α ist α-reduzierbar zu β' sagt man auch: 'α und β sind *alphabetische Varianten* voneinander'; α-Reduzierbarkeit ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiele:

$(\lambda x_e\, (\lambda y_e\, \mathrm{R}_{e(et)}(x)(y))\, (\mathrm{c}_e)\ \mathrm{x}\ \mathrm{R}_{e(et)}(\mathrm{c}_e)$ [s.o.]

$(\forall x)\ \underline{(\lambda x\, (\lambda y\, \mathbf{R}(x)(y))}\, (x)\, (\mathrm{c})\ \mathrm{x}\ (\forall x)\ \underline{\mathbf{R}(x)(\mathbf{c})}$ [s.o.]

$(\lambda P_{et}(\lambda Q_{et}\, (\forall x_e)\, [P(x) \to Q(x)]\,))\, (\mathrm{H}_{et})$

$\quad (\lambda x\, (\lambda P_{et}(\lambda Q_{et}\, (\exists x_e)\, [P(x)\ \&\ Q(x)]\,))\, (\mathrm{T}_{et})\, (\lambda y_e\, (x = y)))$

$\mathrm{x} \quad (\forall x_e)\, [\mathrm{H}_{et}(x) \to (\exists y_e)\, [\mathrm{T}_{et}(y)\ \&\ (x = y)]\,]$

$[\equiv (\forall x_e)\, [\mathrm{H}_{et}(x) \to \mathrm{T}_{et}(x)\,]$

– diese Äquivalenz entspricht aber keiner Reduktion!]

Die Reduktion im dritten Beispiel – einer typenogischen Formalisierung von *Jeder Hund ist ein Tier* – läßt sich auf verschiedene Weisen bewerkstelligen … z.B. so:

$\underline{(\lambda P(\lambda Q(\forall x)\, [P(x) \to Q(x)]\,))\, (\mathbf{H})}\, (\lambda x\, (\lambda P(\lambda Q\, (\exists x)\, [P(x)\ \&\ Q(x)]\,))\, (\mathrm{T})\, (\lambda y\, (x = y))) > (\beta)$

$(\lambda Q(\forall x)\, [\mathrm{H}(x) \to Q(x)]\,)\, (\lambda x\, \underline{(\lambda P(\lambda Q\, (\exists x)\, [P(x)\ \&\ Q(x)]\,))\, (\mathbf{T})}\, (\lambda y\, (x = y))) > (\beta)$

$\underline{(\lambda Q(\forall x)\, [\mathbf{H}(x) \to Q(x)]\,)\, (\lambda x\, (\lambda Q\, (\exists x)\, [\mathbf{T}(x)\ \&\ Q(x)]\,)\, (\lambda y\, (x = y)))} > (\beta)$

$(\forall x)\, [\mathrm{H}(x) \to \underline{(\lambda x\, (\lambda Q\, (\exists x)\, [\mathbf{T}(x)\ \&\ Q(x)]\,)\, (\lambda y\, (x = y)))\, (x)}] > (\beta!)$

$(\forall x)\, [\mathrm{H}(x) \to (\lambda Q\, \underline{(\exists x)\, [\mathbf{T}(x)\ \&\ Q(x)]}\,)\, (\lambda y\, (x = y))\,] > (\alpha^*)$

$(\forall x)\, [\mathrm{H}(x) \to \underline{(\lambda Q\, (\exists y)\, [\mathbf{T}(y)\ \&\ Q(y)]\,)}\, (\lambda y\, (x = y))\,] > (\beta!!)$

$(\forall x)\, [\mathrm{H}(x) \to (\exists y)\, [\mathrm{T}(y)\ \&\ \underline{(\lambda y\, (x = y))\, (y)}]\,] > (\beta!)$

$(\forall x)\, [\mathrm{H}(x) \to (\exists y)\, [\mathrm{T}(y)\ \&\ (x = y)]\,],$

wobei die kontrahierten Teile jeweils unterstrichen sind und die relevante Kontraktion in Klammern angegeben ist;

… oder so:

$(\lambda P(\lambda Q(\forall x)\,[P(x) \rightarrow Q(x)]\,))\,(H)\,(\lambda x\,\underline{(\lambda P(\lambda Q\,(\exists x)\,[P(x)\,\&\,Q(x)]\,))\,(\mathbf{T})}\,(\lambda y\,(x = y))) > (\beta)$
$(\lambda P(\lambda Q(\forall x)\,[P(x) \rightarrow Q(x)]\,))\,(H)\,(\lambda x\,(\lambda Q\,(\underline{\exists y)\,[\mathbf{T}(y)\,\&\,Q(y)]\,)}\,(\lambda y\,(x = y))) > (\alpha^*)$
$(\lambda P(\lambda Q(\forall x)\,[P(x) \rightarrow Q(x)]\,))\,(H)\,(\lambda x\,\underline{(\lambda Q\,(\exists y)\,[\mathbf{T}(y)\,\&\,Q(y)]\,)\,(\lambda y\,(x = y))}) > (\beta!!)$
…
Die mit *einem*'!' markierten β-Kontraktionen der Form $(\lambda x\,\alpha)(x) >_\beta\ \alpha$ (= $\alpha[^x/_y]$!) sind legitim, weil $x \notin Fr(\lambda x\,\alpha)$ und somit x einsetzbar ist für x in $(\lambda x\,\alpha)$. Die mit '!!' markierten β-Kontraktionen sind ebenfalls korrekt, weil die im Funktor gebundene (quantifizierte) Variable im Argument nur gebunden vorkommt. [Das ist der intuitive Grund für die Äquivalenz; eine Überprüfung der Definitionen zeigt, daß die formalen Begriffe dieser Intuition gerecht werden.]
Diemit '*' markierten α-Kontraktionen sind schließlich notwendig, um die darauffolgenden β-Kontraktionen durchführen zu können.
Beide Beispiels-Reduktionen enden mit einem Ausdruck, der nur noch mit Hilfe von α-Kontraktionen konvertiert werden kann:

Definition

Sei $a \in \boldsymbol{T}$, $\alpha,\beta \in L^*_a$.
$\beta \in L^*_a$ ist eine *Normalform* (*von* $\alpha \in L^*_a$), falls $\alpha \times \beta$ und für alle $\beta \in L^*_a$ gilt: wenn $\beta \times \gamma$, dann ist $\beta \quad \times_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma$.

Bemerkung

$\equiv_\alpha \gamma$ ist eine Äquivalenzrelation über $\bigcup_{a \in \boldsymbol{T}} L^*_a$.

Normalisierungssatz

Jedes $\alpha \in \bigcup_{a \in \boldsymbol{T}} L^*_a$ besitzt eine Normalform.

Der Beweis ist gar nicht so einfach: beim Reduzieren werden ja die Ausdrücke nicht unbedingt kürzer (s.o.), was eine Induktion über die Ausdruckslänge verbietet.
Man beachte, daß die meisten Ausdrücke mehr als eine Normalform besitzen – weil man ja gebundene Variablen per α-Kontraktion auf unendlichfache Weise umbenennen kann.
Abgesehen von solchen trivialen Konversionen sind die Normalformen allerdings eindeutig:

Church-Rosser-Satz[15]

Die Normalformen beliebiger $\alpha \in \bigcup_{a \in \boldsymbol{T}} L^*_a$ sind jeweils alphabetische Varianten voneinander: wenn β und γ Normalformen von α sind, gilt $\beta \equiv_\alpha \gamma$.

Der Satz gilt – im Gegensatz zum Normalisierungssatz – für den gesamten λ-Kalkül (s.u.); es gibt verschiedene Beweise, die alle ausgesprochen mühselig sind.

2.7 Typenverschiebungen

1. Beispiel: Junktoren und Mengenoperationen

Systematischer Zusammenhang zwischen dem Junktor ∨ (Disjunktion) und der Operation ∪ (Vereinigung) einerseits und zwischen & (Konjunktion) und ∩ (Schnitt) andererseits: $A \cap B = \{x \mid x \in A\ \&\ x \in B\}$, $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$; man benutzt auch die Wörter und und oder für beides: Hans singt **oder** schläft heißt: Hans ist in der Vereinigungsmenge etc.

15 Nach Alonzo Church (s. Fn. 14) und John Barkley Rosser (1907–1989), die den Satz 1936 bewiesen haben.

In funktionaler Schreibweise:

$$\cap_{(at)((at)(at))}(B_{at})(A_{at}) = \lambda x_a\, \&_{t(tt)}\,(B(x))\,(A(x));$$

$$\cup_{(at)((at)(at))}(B_{at})(A_{at}) = \lambda x_a\, \vee_{t(tt)}\,(B(x))\,(A(x)).$$

$\cap$ und $\cup$ sind also die *Entsprechungen* von & und $\vee$ – aufgefaßt als *Objekte* vom Typ $t(tt)$ – in den Typen $(at)((at)(at))$. Die einschägige Entsprechungsbeziehung läßt sich auch auf andere Typen verallgemeinern:

Definition

Es seien $a,b,c \in \boldsymbol{T}$, D eine nicht leere Menge, $n \in \omega$, $f \in D_{a^n b}$. Dann ist $f^n_c \in D_{(ca)^n(cb)}$ diejenige Funktion, so daß für alle $g_1, \ldots, g_n \in D_{ca}$ und $u \in D_a$ gilt:

$$f^n_c\,(g_1), \ldots, (g_n)(u) = f(g_1(u)), \ldots, (g_n(u)).$$

f^n_c heißt auch *Geach-Anhebung*[16] *von* f (*zu* $(ca)^n(cb)$).
[Dabei ist $(a^0 b) := b$ und $(a^{n+1}b) := (a(a^n b\;))$.]

Es ist also: $\cap_{(at)((at)(at))} = \;\; \boldsymbol{\&}^2_a$ und $\cup_{(at)((at)(at))} = \;\; \boldsymbol{\vee}^2_a$.
Im Falle $n=1$ gilt: $f^1_c\,(g)(u) = f(g(u)) = (f \circ g)(u)$, d.h. Geach-Anhebung ist eine Verallgemeinerung der funktionalen Verknüpfung; und die *Komplementbildung* (relativ zu D_{ca}) erweist sich als Geach-Anhebung der Negation (zu $((at)(at))$). Weitere Beispiele folgen im Zusammenhang mit generalisierten Quantoren.

Bemerkung

Die Geach-Anhebung ist (jeweils) injektiv, d.h.: wenn $f^n_c = f'^n_c$, dann ist $f = f'$.

Die Geach-Anhebung ist ein Spezialfall einer *Typenverschiebung*: die Objekte eines gegebenen Typs (in diesem Falle die Funktionen f vom Typ $(a^n b)$) werden in andere Typen 'exportiert'. Neben der Injektivität verlangt man von einer Typenverschiebung im allgemeinen, daß sie irgendwie 'schematisch definierbar' ist; eine allgemein akzeptierte Definition für dieses Kriterium gibt es allerdings nicht, wohl aber verschiedene Vorschläge, deren Diskussion hier zu weit führen würde. Wir begnügen uns mit Beispielen.

2. Beispiel: Mengen und Operatoren

Jeder Menge A entspricht in eindeutiger Weise eine Operation f auf allen Mengen M – die entsprechende *Aussonderung* der As in M:

$$f(M) = \{u \in M \mid \; u \in A\} = M \cap A\;.$$

Die entsprechende Typenverschiebung führt von at zu $(at)(at)$:

16 Nach dem englischen Philosophen Peter Geach (*1916), der in seinem *Program for Syntax* (1970) eine noch allgemeinere Form dieses Anhebungsschemas als kategorialgrammatisches Prinzip eingeführt hat; in der neueren Literatur wird die Bezeichnung *Geach shift* allerdings oft nur für den Spezialfall $n=1$ (s.u.) verwendet.

Definition

Es sei $a \in \boldsymbol{T}$, D eine nicht leere Menge, $X \in D_{at}$. Dann ist $X! \in D_{(at)(at)}$ diejenige Funktion, so daß für alle $Y \in D_{at}$ und $u \in D_a$ gilt:

$$X!(Y)(u) = X(u) \cdot Y(u),$$

denn die Konjunktion ist die Multiplikation der Wahrheitswerte.

Diese Verschiebung wird in der Semantik benutzt, um alle Adjektive als Modifikatoren zu deuten.

3. Beispiel: Individuen und Quantoren

Jede Quantifikation '(Qx) φ' ist auch eine Prädikation, aber höherer Stufe – dem quantifizierten Prädikat wird die vom Quantor ausgedrückte Eigenschaft zugesprochen: $Q(\lambda x\ \varphi)$. Umgekehrt läßt sich aber auch jede Prädikation '$P(a)$' als Quantifikation auffassen – dem Prädikat wird die Eigenschaft zugesprochen, auf das Subjekt zuzutreffen: '$(\lambda Q\ Q(a))(P)$' – oder mengentheoretisch: $a \in P$ gdw. $P \in \{M \mid u \in M\}$. Individuen lassen sich also auf Mengen von Individuen verschieben – oder allgemeiner:

Definition

Es sei $a \in \boldsymbol{T}$, D eine nicht leere Menge, $u \in D_a$. Dann ist $u^* \in D_{(at)t}$ diejenige Funktion, so daß für alle $X \in D_{at}$ gilt:

$$u^*(X) = X(u).$$

u^* heißt auch *Montague-Anhebung*[17] *von u (zum Quantor)*.

Die Montague-Anhebung läßt sich von Quantoren auf Funktionen beliebiger Typen der Gestalt $(ab)b$ verallgemeinern.

2.8 Variationen

1. Relationale Typenlogik

Definition

Die Menge der *relationalen Typen* ist die kleinste Menge $\boldsymbol{R}$, so daß $1 \in \boldsymbol{R}$ und für alle $n \in \omega$ gilt: $<a_0,\ldots,a_{n-1}> \in \boldsymbol{R}$, sobald $a_1 \in \boldsymbol{T}, \ldots$ und $a_n \in \boldsymbol{R}$.

$< a_0,\ldots,a_{n-1} >$ ist die Folge $\{(x_i, a_i) \mid i < n\}$; für den Fall $n = 0$ ist also $() = \varnothing$ (= 0!).

Es sei D eine beliebige, nicht leere Menge. Durch Induktion über die Tiefe der relationalen Typen definiert man dann eine Familie $(D_a)_{a \in \boldsymbol{R}}$:

$$D_1 = D; D_{(a_0,\ldots,a_n)} = \wp(D_{a_0} \times \ldots \times D_{a_{n-1}})$$

Für den Fall n=0 setzt man: $D_{()} = \{0,1\}$.

Die *Tiefe* $\tau(a)$ eines relationalen Typs a bestimmt sich wie folgt:

$$\tau(\varnothing) = 0;\ \tau(a_0,\ldots,a_{n-1}) = max(\tau(a_0),\ldots,\tau(a_{n-1})) + 1.$$

Via Schönfinkelei entspricht jedem relationalen Typ a eindeutig ein funktionaler Typ $\bar{a}$, so daß $D_a \approx D_{\bar{a}}$: $\bar{1} = e$; $\overline{\langle\ \rangle}$ (= $\bar{0}$) = t; $\overline{\langle a_0,\ldots,a_n\rangle} = (\overline{a_n}, \overline{\langle a_0,\ldots,a_{n-1}\rangle})$. Z.B. ist: $\overline{\langle\langle 1\rangle,\langle 1\rangle\rangle} = (\overline{\langle 1\rangle}, \overline{\langle\langle 1\rangle\rangle}) = ((\bar{1}, \overline{\langle\ \rangle}), (\overline{\langle 1\rangle}, \overline{\langle\ \rangle})) = ((et),((et)t))$.

17 Nach Richard Montague (1930–1971).

Die Induktion läuft hier weder über die Länge noch über die Tiefe der Typen, sondern über ihren *Rang*. Dazu definiert man zuerst eine Beziehung d zwischen den relationalen Typen:

a d b gdw. [$\tau(a)<\tau(b)$ oder [$\tau(a) = \tau(b)$ und $lg(a) \leq lg(b)$]] und setzt dann:
$\rho(a) = \cup\{\rho(b) \mid b$ d a d $b\}'$ (im Sinne des ordinalen Nachfolgers).

Eine direkte Umkehrung dieser Beziehung gibt es nicht, aber dennoch ist jedes Objekt der funktionalen Typenhierarchie in der relationalen Hierarchie repräsentiert – denn jede Funktion von D_a nach D_b ist ja eine Relation zwischen D_a und D_b. Jedem $a \in \boldsymbol{T}$ entspricht also ein $\underline{a} \in \boldsymbol{R}$, so daß D_a" $\subsetneq$ " $D_{\underline{a}}$: $\underline{e} = 1$, $\underline{t} = < >$, und $\underline{(a,b)} = <\underline{a},\underline{b}>$. Der Unterschied zwischen funktionaler und relationaler Typenlogik liegt dann auch weniger in der Ontologie als in der *Logik*: die Sprache der relationalen Typenlogik ist eine Prädikatenlogik – mit Konstanten und Variablen beliebiger (relationaler) Typen, Junktoren, Quantoren (über jeweils beliebige Schichten), Prädikation (beliebiger Stelligkeit und Ordnung), aber ohne Abstraktion und Identität: erstere macht keinen rechten Sinn und letztere ist (nach dem Leibnizprinzip) definierbar. Die genauen Definitionen zu Aufbau und Deutung der relationalen Typenlogik sind eine schöne <u>Hausaufgabe.</u>

Ein Vorteil der relationalen Typenlogik besteht in ihrer leichten Ausbaubarkeit zu einer *partiellen Logik*, in der nicht jede Aussage wahr oder falsch ist. Die Einbeziehung partieller Funktionen in die funktionale Typenlogik ist dagegen relativ kompliziert (aber machbar).

2. Kombinatorische Logik

Gebundene Variablen haben offenbar keine eigenständige Bedeutung – das besagt ja gerade die α-Konversion – und freie Variablen sind für die Interpretation irrelevant – weswegen sie ja in der substitutionellen Deutung übergangen werden. Es stellt sich also die Frage, ob man auch ganz ohne Variablen auskommen kann. Die Antwort (für die funktionale Typenlogik) lautet: im Prinzip *ja*, in der Praxis *nein* – eine variablenfreie Reformulierung ist möglich, aber schwer lesbar.
Das schließt nicht aus, daß in Einzelfällen variablenfreie Aussagen (z.B. "$P \subseteq Q$") leichter lesbar sind als äquivalente Formulierungen mit gebundenen Variablen ("$(\forall x)\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$"). Aber eine systematische, einheitliche Wegerklärung aller Variablenbindungen führt unweigerlich in Abgründe der kombinatorischen Logik.

<u>Definition</u>

Es seien $a,b,c \in \boldsymbol{T}$ und $\mathrm{K}_{ab} \in Con_{a(ba)}$, $\mathrm{S}_{abc} \in Con_{(a(bc))((ab)(ac))}$ und $\mathrm{G}_a \in Con_{(at)((at)(at))}$ beliebige (voneinander verschiedene), ab jetzt feste Konstanten. Für gegebenes L ist ein *kombinatorisches L-Modell* (D,F) ein Modell der um diese Konstanten erweiterten Sprache L^K, so daß gilt:

$F(\mathrm{K}_{ab})(u)(v) = u$, wenn $u \in D_a$ und $v \in D_b$,

$F(\mathrm{S}_{abc})(f)(g)(u) = f(u)(g(u))$, wenn $u \in D_a$, $f \in D_{a(bc)}$ und $g \in D_{ab}$,

und: $F(\mathrm{G}_a)(P)(Q)(u) = 1$ gdw. $P(u) = Q(u)$, wenn $u \in D_a$ und $P,Q \in D_{at}$.

Sei $M = (D,F)$ ein L-Modell. Dann ist $M^K = (D,F^K)$ dasjenige L^K-Modell, so daß $F \subseteq F^K$.

Diese Begriffsbildungen setzen natürlich voraus, daß keiner der *Kombinatoren* K, S oder G in L vorkommt.

Satz

Sei L eine typenlogische Sprache und $a\in\boldsymbol{T}$. Dann gibt es für jedes $\alpha\in L^*_a$ ein $\tilde{\alpha}\in L^{K}*_a$, so daß gilt: α enthält kein 'λ' und kein '=', $Fr(\tilde{\alpha}) = Fr(\alpha)$, und für jedes L-Modell M und jede M-Belegung g ist $[\![\tilde{\alpha}]\!]^{M^K,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g}$.

Für geschlossene α ist $\tilde{\alpha}$ also vollommen variablenfrei. $\tilde{\alpha}$ ist die *kombinatorische Formulierung von* α und kann als Übersetzung in eine andere Logiksprache verstanden werden. Konstanten und Variablen werden dabei durch sich selbst übersetzt, $\widetilde{\alpha(\beta)}$ ist $\tilde{\alpha}(\tilde{\beta})$ – analog für die Identität – und für λ-Ausdrücke definiert man (für jedes $x\in Var_b$) eine Operation $[x]$ über den λ-freien Ausdrücken und setzt $\widetilde{(\lambda x\ \alpha)} = [x]\tilde{\alpha}$. $[x]$ selbst wird wieder induktiv definiert, und zwar so:

$[x]\alpha = \mathrm{K}_{ba}(\alpha)$, falls $\alpha\in Con_b\cup Var_b \setminus \{x\}$; $[x]x = \mathrm{S}_{a(aa)a}(\mathrm{K}_{a(aa)})(\mathrm{K}_{aa})$;

$[x]\alpha(\beta) = \mathrm{S}_{bcd}([x]\alpha)([x]\beta)$, wenn $\alpha\in L^*_{cd}$;

$[x](\alpha{=}\beta) = \mathrm{G}_c([x]\alpha)([x]\beta)$, wenn $\alpha,\beta\in L^*_b$.

Beim Wegerklären der Bindung ist K also für die leere Bindung zuständig, S für die Funktionalapplikation und G für die Identität. Nicht-leere Bindung wird auf den Fall '$\lambda x\ x$' reduziert und durch eine Kombination von S und K abgedeckt; in der älteren Literatur findet man stattdessen auch eine eigene Operation I mit demselben Effekt (und stattdessen eine vereinfachte Version von K). Den Operator G findet man stattdessen (m.W.) nicht, weil in der traditionellen kombinatorischen Logik Identität allenfalls als Konstante (des Typs $a(at)$) erscheint.

Der obige Satz hat auch eine (weit offensichtlichere) Umkehrung:

Beobachtung

Sei L eine typenlogische Sprache und $a\in\boldsymbol{T}$. Dann gibt es für jedes $\alpha\in L^{K}*_a$, das kein 'λ' und kein '=' enthält, ein $\underset{\sim}{\alpha}\in L^*_a$, so daß gilt: $Fr(\underset{\sim}{\alpha}) = Fr(\alpha)$, und für jedes L-Modell M und jede M-Belegung g ist $[\![\tilde{\alpha}]\!]^{M^K,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g}$.

Die Kombinatoren sind ja alle äquivalent zu gewissen Definitionen ersetzen– z.B. S zu: '$\lambda f\ \lambda g\ \lambda u\ f(u)(g(u)$'.

3. λ-Kalkül

In den *Termen* des (typenfreien) λ-Kalküls lassen sich beliebige Konstanten und Variablen per Applikation und Abstraktion kombinieren:

Definitionen

Es sei L eine beliebige, von H = [{ '(', ')', 'λ', '='}] und Var^* disjunkte Menge. Dann ist Λ_L die kleinste Menge, so daß $Var\cup L\subseteq\Lambda_L$ und für alle $\alpha,\beta\in\Lambda_L$ und $x\in Var$ gilt: "$\alpha(\beta)$"$\in\Lambda_L$, und "$(\lambda x\ \alpha)$"$\in\Lambda_L$.

Eine *Gleichung [des λ_L-Kalküls]* ist ein Ausdruck der Gestalt $(\alpha{=}\beta)$, so daß $\alpha,\beta\in\Lambda_L$.

Eine Gleichung $(\alpha{=}\beta)$ ist *ableitbar [im λ_L-Kalkül]* gdw. $\alpha \times_\lambda \beta$ und $\beta \times_\lambda \alpha$.

Die Sprache des λ-Kalküls ist also typenfrei und enthält keine Identität: "$(\lambda x\ (x = x))$" ist ein typenlogischer Ausdruck (für $x\in Var^*$), aber kein Term des λ-Kalkül – umgekehrt ist "$x\ (x)$" ein Term des λ-Kalküls, aber kein typenlogischer Ausdruck; "$(\lambda x\ x)$" ist beides, "$(\lambda = x)$" weder noch. – Achtung: Die Gleichungen sind selbst keine Ausdrücke der Sprache des λ-Kalküls. – Die Beziehung $\times_\lambda$ wird genau wie $\times$ definiert, aber für die Ausdrücke in Λ_L.

Die Begriffe *alphabetische Variante* und *Normalform* übertragen sich ebenfalls. Es gilt dann der:

Church-Rosser-Satz

Die Normalformen beliebiger normalisierbarer $\alpha \in \Lambda_L$ sind jeweils alphabetische Varianten voneinander.

Normalisierbarkeit heißt dabei: der Ausdruck besitzt überhaupt eine Normalform. Das ist im λ-Kalkül keine Selbstverständlichkeit: $(\lambda x\ x(x))\ (\lambda x\ x(x))$ ist auf sich selbst – und nur auf sich selbst – β-kontrahierbar, kann also nicht in Normalform gebracht werden. Der Normalisierungssatz gilt also nicht für den gesamten λ-Kalkül.

Der λ-Kalkül ist ein Kind der *Rekursionstheorie*, dem Zweig der mathematischen Logik, in dem der Begriff der (algorithmischen) *Berechenbarkeit* von Funktionen untersucht wird. Die Ausdrücke der Sprache des λ-Kalküls lassen sich nicht als Funktionen im Sinne der Mengenlehre deuten, sondern erfordern kompliziertere Rekonstruktionen des Funktionsbegriffs.

2.9 Anhang: Generalisierte Quantoren

Definition

Sei $U \neq \emptyset$. Ein *einstelliger* Quantor Q über U ist eine Teilmenge der Potenzmenge von U: $Q \subseteq \wp(U)$ – bzw. (funktional): $Q \in U_{(et)t}$.

Notation (s.o.): Man schreibt: "$(Qx)\ \varphi$" für "$\{x \in U \mid \varphi\} \in U$".

Beispiele

$\forall = \{M \subseteq U \mid \text{alle Elemente von } U \text{ sind in } M\} = \{M \subseteq U \mid U \subseteq M\} = \{U\}$

$\exists = \{M \subseteq U \mid \text{mindestens ein Element von } U \text{ ist in } M\} = \{M \subseteq U \mid U \neq \emptyset\}$

$\quad = \wp(U) \setminus \{\emptyset\}$

$\overline{\exists} = \{M \subseteq U \mid \text{kein Element von } U \text{ ist in } M\} = \{M \subseteq U \mid M \cap U = \emptyset\} = \{\emptyset\}$

$u^* = \{M \subseteq U \mid u \in M\}$ [für gegebenes $u \in M$]

$\exists^{=1} = \{M \subseteq U \mid \text{es gibt ein } u \in U, \text{ so daß: } M = \{u\}\} = \{M \subseteq U \mid \overline{\overline{M}} = 1\}$

$\exists^{>50\%} = \{M \subseteq U \mid \overline{\overline{M}} > \overline{\overline{(U \setminus M)}}\}$

[$\overline{\overline{M}}$ ist die Kardinalität von M, d.h. die kleinste zu M gleichmächtige Kardinalzahl]

Viele Quantoren sind extensionale Entsprechungen quantifizierender Nominalphrasen: $\forall$ entspricht *alles*, $\exists$ entspricht *etwas*, etc.; denn *alles schläft* heißt: $\{x \subseteq U \mid x \text{ schläft}\} = U$ – d.h.: $(\forall x)\ x$ schläft, etc. Demgemäß entsprechen Schlußschemata in der natürlichen Sprache Eigenschaften von Quantoren:

Definition

Sei Q ein *einstelliger* Quantor über einer Menge U.Q ist *monoton steigend* [*fallend*] gdw. für alle $X, Y \subseteq U$ gilt: wenn $X \in Q$ und $X \subseteq Y$ [$Y \subseteq X$], dann ist $X \in Q$.

Beobachtungen

Q ist monoton steigend [fallend] gdw. für alle$X, Y \subseteq U$ gilt: wenn $X \in Q$, dann ist $X \cup Y$ [$X \cap Y$] $\in Q$.

$\forall$, $\exists$, u^* und $\exists^{\geq 50\%}$ sind monoton steigend, aber nicht fallend, $\bar{\exists}$ ist monoton fallend, $\exists^{=1}$ ist weder noch.

Aus den Beobachtungen ergibt sich die Gültigkeit von schematischen Schlüssen wie dem von: Nichts ist P auf: Nichts ist P und Q.

Definition

Sei $U \neq \emptyset$. Ein *zweistelliger* Quantor D über U ist zweistellige Relation über der Potenzmenge von U: $D \subseteq \wp(U)^2$ – bzw. (funktional): $D \in U_{(et)((et)t)}$.

Notation: Man schreibt: "$X\ D\ Y$" für "$(X,Y) \in D$" bzw. (funktional) "$D(X)(Y) = 1$".

Die Reihenfolge ist also umgekehrt zur Schönfinkelei!

Beispiele

ALL = $\{(X,Y) \in \wp(U)^2 \mid$ alle Elemente von X sind in $Y\} = \{(X,Y) \in \wp(U)^2 \mid X \subseteq Y\}$

SOME = $\{(X,Y) \in \wp(U)^2 \mid$ mindestens ein Element von X ist in $Y\}$ =
$\{(X,Y) \in \wp(U)^2 \mid X \cap Y \neq \emptyset\}$

NO = $\{(X,Y) \in \wp(U)^2 \mid$ kein Element von X ist in $Y\} = \{(X,Y) \in \wp(U)^2 \mid X \cap Y = \emptyset\}$

THE = $\{(X,Y) \in \wp(U)^2 \mid$ es gibt ein $u \in U$, so daß: $X = \{u\}$ und $u \in Y\}$

MOST = $\{(X,Y) \in \wp(U)^2 \mid \overline{\overline{(X \cap Y)}} > \overline{\overline{(X \setminus Y)}}\ \}$

THE ist der Russellsche Kennzeichnungsoperator. Alle Beispiele entsprechen englischen *Determinatoren* und haben besondere Eigenschaften:

Definitionen

Sei D ein *zweistelliger* Quantor über einer Menge U.

D ist *konservativ* gdw. für alle $X,Y \subseteq \wp(U)$ gilt: $X\ D\ Y$ gdw. $X\ D\ (X \cap Y)$.

D ist ein *Determinator* gdw. für alle $X,X',Y,Y' \subseteq \wp(U)$ gilt:

wenn: $(X \cap Y) \sim (X' \cap Y')$ und $(X \setminus Y) \sim (X' \setminus Y')$
dann: $X\ D\ Y$ gdw. $X'\ D\ Y'$.

Beobachtung

Jeder Determinator ist konservativ.

Bei Determinatoren kommt es also nur auf zwei Kardinalitäten an. Beschränkt man sich auf endliche U, kann ein Determinator mit einer zweistelligen Relation über den natürlichen Zahlen identifiziert werden; z.B. ist dann NO = $\{(n,m) \mid n = 0\}$ und MOST = $\{(n,m) \mid n > m\}$.
Wie die Terminologie schon suggeriert, sind vermutlich alle natürlichsprachlichen Determinatoren (bzw. ihre Extensionen) Determinatoren im logischen Sinn. Scheinbare Gegenbeispiele – wenn man Nur Hühner gackern als "nur(H,G)" formalisiert und im Sinne von "G⊆H" deutet, ist nur nicht konservativ – lassen sich meist durch alternative syntaktische Analyse wegerklären.

Wir beschließen den Anhang mit einem Nachtrag zur Typenverschiebung:

4. Beispiel: Argument-Anhebung

Die durch Montague-Anhebung einheitliche gewonnene Funktor-Argument-Struktur läßt sich wieder umkehren: $P(a) \equiv (\lambda Q\ Q(a))(P) = a^*(P) \equiv (\lambda\ \boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{Q}\ (P))\ (a^*) = P^*(a^*)$. P^* ist dann vom Typ $((et)t)t$ und nimmt beliebige Quantoren *als Argument*; z.B. ist: $P^*(\forall) = (\lambda\ \boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{Q}\ (P))\ (\forall) \equiv \forall\ (P) \equiv \forall\ (\lambda x\ P(x)) = (\forall x)\ P(x)$. Bei der Quantifikation über die Argumente einer mehrstelligen Relation benötigt man ein etwas allgemeineres Verfahren, das wir hier nur für den zweistelligen Fall betrachten; in Ermangelung eines metasprachlichen Abstraktionsoperators empfiehlt es sich, die entsprechende Typenverschiebung in der Typenlogik zu definieren:

Definition

Es seien $a,b \in \boldsymbol{T}$ und D eine nicht leere Menge. Dann ist die (*zweite*) *Argumentanhebung* (*in* $a(bt)$) der Wert der Definition:

$$[\![(\lambda R_{a(bt)}\ (\lambda \boldsymbol{Q}_{(at)t}\ (\lambda x_a\ \boldsymbol{Q}(\lambda y_b\ R(x,y)))))]\!]^{M,g[R/F]}$$

In der Montague-Grammatik wird diese *Argumentanhebung benutzt*, um transitive Verben einheitlich zu kategorisieren: manchen Verben wie suchen wird (aus unabhängigen Gründen) der Typ $((et)t)(et))$ zugewiesen, die anderen, ‘normalen’ Verben werden von $e(et)$ aus Argument-angehoben.

3. *Prädikatenlogik*
3.0 Aussagenlogik

Definition

f ist eine [*n-stellige*] *Wahrheitstafel* gdw. f: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$.
Eine aussagenlogische Sprache ist ein Paar $L = (J_L, F_L)$, so daß J_L eine (in der Regel endliche) Menge von Symbolen (den *Junktoren von L*) ist, wobei $J_L \cap Var_t \cap H = \emptyset$, und F_L eine Fuktion von J_L in die Menge der Wahrheitstafeln ist.

Mit Schönfinkelei sind natürlich alle Wahrheitstafen in jeder Typenhierarchie zu finden. Die Disjunkteitsbedingung für die Junktoren deutet bereits an, daß wir als Aussagenvariablen die der Typenlogik nehmen:

Beispiele für aussagenlogische Sprachen

$L_{\neg,\&,\vee} = (\{\neg,\&,\vee\},\{(\neg,\mathrm{NEG}),(\&,\mathrm{CONJ}),(\vee,\mathrm{DISJ})\})$, wobei NEG, CONJ und DISJ die üblichen Wahrheitstafeln für Negation, Konjunktion und Disjunktion sind:
$\mathrm{NEG}(n) = 1-n$, $\mathrm{CONJ}(n,m) = n \cdot m$, $\mathrm{DISJ}(n,m) = min(n,m)$.
Ähnlich definiert man die Sprachen $L_{\neg,\vee}$, $L_{\neg,\&}$, $L_{\perp,\to}$ etc.
$L\downarrow = (\{\downarrow\},\{(\downarrow,\mathrm{NOR})\})$ und $L_| = (\{|\},\{(|,\mathrm{NAND})\})$, wobei NOR die Wahrheitstafel für 'weder-noch' ist – $\mathrm{NOR}(n,m) = (1-n)\cdot(1-m)$ – und NAND ihr *Dual*, das entsteht, wenn man 1 und 0 vertauscht: $\mathrm{NAND}(n,m) = 1-nm$.
'|' heißt auch *Shefferscher Strich*.[18]

Definition

Es sei L eine aussagenlogische Sprache. Die Menge AL_L ist dann die kleinste Menge, so daß für alle $n \in \omega$ gilt: $Var_t \subseteq AL_L$; und wenn $A_1,\ldots,A_n \in AL_L$, $© \in J_L$ und $F_L(©) \in \{0,1\}^n$ – d.h. © ist *n-stellig [in L]* – dann ist "$©(A_1,\ldots,A_n)$"$\in AL_L$.

Wie üblich setzen wir zweistellige Junktoren zwischen ihre Argumente und lassen bei einstelligen die Klammer weg.

Definition

Eine *aussagenlogische Belegung* ist eine Funktion g: $Var_t \to \{0,1\}$.
Es sei L eine aussagenlogische Sprache. Der L-Wert $[\![A]\!]^{L,g}$ einer aussagenlogischen Formel $A \in AL_L$ unter der Belegung g bestimmt sich induktiv nach As Tiefe: $[\![A]\!]^{L,g} = g(A)$, wenn $A \in Var_t$; und $[\![©(A_1,\ldots,A_n)]\!]^{L,g} = J_L(©)([\![A_1]\!]^{L,g},\ldots,[\![A_n]\!]^{L,g})$.

Den Index 'L' läßt man meist weg, wenn klar ist, um welche Sprache es sich handelt.
Üblicher- und sinnigerweise benutzt man Sprachen mit der folgenden Eigenschaft:

18 Nach Henry Maurice Sheffer (1883–1964), der 1913 die funktionale Vollständigkeit von '$\downarrow$' [!] bewiesen hat (s.u.), die allerdings Charles Sanders Peirce (1839–1914) längst bekannt war.

Definition

Eine aussagenlogische Sprache L ist *funktional vollständig*, falls jede Wahrheitstafel in L *definierbar* ist – d.h. falls es für jede Wahrheitstafel f eine Formel $A_f \in AL_L$ gibt, so daß für alle aussagenlogischen Belegungen g gilt: $[\![A]\!]^{L,g} = f([\![p_1]\!]^{L,g}, \ldots, [\![p_n]\!]^{L,g})$.

Dabei sind $p_1,\ldots, p_n$ die ersten n Variablen vom Typ t – in einer (festen) Standardaufzählung.

Satz

(i) $L_{\neg,\&,\vee}$ ist funktional vollständig.

(ii) $L_{\neg,\vee}$, $L_{\neg,\&}$, $L_{\perp,\to}$, $L_{\downarrow}$ und $L_{|}$ sind funktional vollständig.

Beweisskizze

ad (i): Der Beweis geht indukiv über die *Stelligkeit* n von Wahrheitstafeln f: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Für n= 0 genügen Definitionen der beiden 0-stelligen Junktoren $\perp$ und $\top$ (*Verum*), z.B.: $A_\perp = (p_0 \& \neg p_0)$ und $A_\top = (p_0 \vee \neg p_0)$. Für $n = m$+1 setzt man die $L_{\neg,\&,\vee}$-Definierbarkeit aller m-stelligen Wahrheitstafeln voraus und betrachtet ein m+1-stelliges f:

p_1	p_2	…	p_m	p_{m+1}	$f(p_1,\ldots,p_{m+1})$
0	0	…	0	0	v_1
1	0	…	0	0	v_2
1	1	…	0	0	v_3
…	…	…	…	0	v_i
1	1	…	1	0	v_{2^m}
0	0	…	0	1	v_{2^m+1}
1	0	…	0	1	v_{2^m+2}
1	1	…	0	1	v_{2^m+3}
…	…	…	…	1	v_{2^m+i}
1	1	…	1	1	$v_{2^{m+1}}$

Der grauschattierte Teil (also die obere Hälfte *ohne* die Spalte für p_{m+1}) ist offenbar eine m-stellige Wahrheitstafel f_0; ebenso ist die untere Hälfte eine Tafel f_1. Nach I.V. sind f_0 und f_1 $L_{\neg,\&,\vee}$-definierbare durch irgendwelche Formeln A_0 und A_1. Wie man leicht nachprüft, ist dann

$$(\neg\, p_{m+1} \,\&\, A_0) \vee (\, p_{m+1} \,\&\, A_1)$$

eine $L_{\neg,\&,\vee}$-Definition von f.

ad (ii): Es genügt jeweils zu zeigen, daß sich '¬', '&' und '∨' in den genannten Sprachen definieren lassen. Für die Definitionen von '&' und '∨' in $L_{\neg,\vee}$ bzw. $L_{\neg,\&}$ benutzt man das Gesetz der doppelten Negation – $A \equiv \neg\neg A$ – sowie die *de Morganschen Gesetze*[19]:

$$\neg (A \vee B) \equiv (\neg A \,\&\, \neg B);$$
$$\neg (A \,\&\, B) \equiv (\neg A \vee \neg B).$$

In den anderen Fällen kann man folgende (Ketten von) Äquivalenzen ausnutzen:

$$(A \,\&\, B) \equiv \neg (A \to \neg B) \equiv \neg (A \to \neg B) \equiv \neg (A \mid B)$$
$$(A \vee B) \equiv \neg (A \downarrow B)$$
$$\neg A \equiv (A \to \bot) \equiv (A \mid A) \equiv (A \downarrow A)$$

All diese Äquivalenzen weist man leicht durch Ausrechnen der Wahrheitstafeln nach.

Definition

Eine Formel A der Sprache $L_{\neg,\&,\vee}$ ist in *disjunktiver* [bzw.: *konjunktiver*] *Normalform* gdw. gilt: $A = (A_1 \vee \ldots \vee A_n)$ [$(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n)$], wobei für jedes A_i die Gestalt $A_i = (L_1 \,\&\, \ldots \,\&\, L_{m_i})$ [$(L_1 \vee \ldots \vee L_{m_i})$] hat und jedes L_j wiederum entweder eine Aussagevariable oder die Negation einer solchen ist.

NB: (i) Die Definition läßt sich auf andere funktional vollständige Sprachen übertragen, wenn man sich an irgendwelche Standarddefinitionen von Konjunktion, Disjunktion und Negation hält.
(ii) Die Definition setzt bereits die *Assoziativität* von Konjunktion und Disjunktion voraus – $(A \,\&\, B) \,\&\, C \equiv A \,\&\, (B \,\&\, C)$ bzw.: $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ – denn die Klammerung von Konjunkten und Disjunkten ist für ihre Deutung unwichtig.

Beispiele

Es seien $p, q, r \in \mathrm{Var}_t$. Dann sind '$(p \,\&\, \neg q) \vee (p \& \neg r) \vee \neg p$' und '$(\neg p \vee q \vee r) \,\&\, (p \vee \neg r)$' in konjunktiver bzw. disjunktiver Normalform.

Satz

Jede aussagenlogische Formel A der Sprache $L_{\neg,\&,\vee}$ ist äquivalent mit Formeln $DNF(A)$ und $KNF(A)$ in disjunktiver bzw. konjunktiver Normalform.

Beweis: Hausaufgabe.
[Tip: Der Beweis der funktionalen Vollständigkeit von $L_{\neg,\&,\vee}$ läßt sich so modifizieren, daß sich die Behauptung als Korollar ergibt.]

19 Dem englischen Logiker Augustus de Morgan (1806–1871) zu Ehren so genannt – obwohl die Prinzipien an sich bereits in der Antike bekannt waren.

3.1 Syntax und Semantik der Prädikatenlogik

Definitionen

$a \in \boldsymbol{T}$ ist ein *pradikatenlogischer Typ* gdw. $a = t$ oder $a = eb$, wobei b ein prädikatenlogischer Typ ist,
Eine *prädikatenlogische Sprache* ist eine Menge von Konstanten beliebiger prädikatenlogischer Typen.
Sei L eine prädikatenlogische Sprache. Die Menge Fml_L der *Formeln* von L ist die kleinste Menge, für die gilt: $\bot \in Fml_L$; ‘$(x = y)$’$\in Fml_L$, falls $x,y \in Var_e$; ‘$R(x_1,\ldots,x_n)$’$\in Fml_L$, falls $x_1,\ldots,x_n \in Var_e$, $R \in L$ und ‘$R(x_1)\ldots(x_n)$’$\in L^*_t$; ‘$(\varphi \rightarrow \psi)$’$\in Fml_L$, falls $\varphi,\psi \in Fml_L$; ‘$(\forall x)\ \varphi$’$\in Fml_L$, falls $\varphi \in Fml_L$ und $x \in Var_e$.

Jede prädikatenlogische Sprache ist also auch eine typenlogische Sprache. Faßt man ‘$R(x_1,\ldots,x_n)$’ als Notationsvariante von ‘$R(x_n)\ldots(x_1)$’ auf, gilt zudem: $Fml_L \subseteq L^*_t$. Auch die Deutung ist gleich:

Definitionen

Sei L eine prädikatenlogische Sprache, $M = (D,F)$ ein (typenlogisches) L-Modell, g: $Var_e \rightarrow D$. Dann ist $[\![\cdot]\!]^{M,g} : Fml_L \rightarrow \{0,1\}$ die durch folgende Induktion bestimmte Funktion:

$[\![\bot]\!]^{M,g} = 0$;

$[\![(x = y)]\!]^{M,g} = 1$ gdw. $g(x) = g(y)$;

$[\![R(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{M,g} = [\![R(x_n),\ldots,(x_1)]\!]^{M,g'}$

– wobei letztere im Sinne der Typenlogik verstanden wird und g' irgendeine M-Belegung ist, so daß $g \subseteq g'$;

$[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!]^{M,g} = 1$ gdw. $[\![\varphi]\!]^{M,g} \leq [\![\psi]\!]^{M,g}$;

$[\![(\forall x)\ \varphi]\!]^{M,g} = 1$ gdw. $\{u \in D \mid [\![\varphi]\!]^{M,g[x/u]} = 1\} = D$.

Die Notation ist dieselbe wie in der Typenlogik; das macht nichts, denn es werden auch dieselben Werte zugewiesen. (Für den Vergleich muß man natürlich innerhalb der Typenlogik die Junktoren und Quantoren als Abkürzungen lesen.) Die Unbestimmtheit der M-Belegung g' im Induktionsanfang wird durch das Koinzidenzlemma gerechtfertigt.
Alle allgmeinen semantischen Eigenschaften der Typenlogik gelten auch – entsprechend eingeschränkt – für die Prädikatenlogik: Substituierbarkeit von logisch Äquivalentem, Koinzidenzlemma, Substitutionslemma, die Gesetze von Freiheit und Bindung, die gebundene Umbenennung sowie die Zusammenhänge zwischen Gültigkeit, Folgerung und logischer Äquivalenz: $\models \varphi$ gdw. $\varnothing \models \varphi$, $\varphi \equiv \psi$ gdw. $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ etc. Auch für die Prädikatenlogik läßt sich eine substitutionelle Deutung angeben, die sich dann ebenfalls als zur kompositionellen (Standard-) Interpretation äquivalent erweist.

Typische prädikatenlogische Gesetze

$(\forall x)\ \varphi \equiv \varphi$, wenn $x \notin Fr(\varphi)$;

$(\forall x)\,(\forall y)\ \varphi \equiv (\forall y)\,(\forall x)\ \varphi$;

$(\exists x)\,(\exists y)\ \varphi \equiv (\exists y)\,(\exists x)\ \varphi$;

$\models ((\exists x)\,(\forall y)\ \varphi \rightarrow (\forall y)\,(\exists x)\ \varphi)$;

$\models ((\forall x)\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\ \varphi \rightarrow (\forall x)\ \psi))$.

‘$(\exists x)\ \varphi$’ ist dabei als Abkürzung für ´$\neg\, (\forall x)\ \neg\ \varphi$’ zu verstehen, wobei ´$\neg\ \varphi$’ wiederum für ‘$(\varphi \rightarrow \bot)$’ steht – und analog für andere, noch zu verwendende Junktoren.

3.2 Komplexität der Prädikatenlogik

Um die Gültigkeit einer aussagenlogischen Formel festzustellen, genügt es, die entsprechende Wahrheitstafel zu konstruieren und zu überprüfen, ob sie in allen Fällen den Wahrheitswert 1 liefert. Diese Überprüfung läßt sich jeweils in endlich vielen Schritten vornehmen – wie viele, hängt von der Formel ab – und folgt stets demselben, prinzipiell mechanisierbaren Verfahren, einem *Algorithmus*[20]. Die Aussagenlogik ist in diesem Sinne *entscheidbar*.

Der Gültigkeitsbegriff der Prädikatenlogik läßt sich nicht auf diese Weise entscheiden: nicht nur die Wahrheitstafelmethode versagt hier – man kann zeigen, daß es gar keinen Algorithmus zur Entscheidung der prädikatenlogischen Gültigkeit geben kann. Die Prädikatenlogik ist in diesem Sinne *unentscheidbar*. Allerdings ist sie in dem Sinne *vollständig*, als sich Verfahren angeben lassen, mit dem sich alle prädikatenlogisch gültigen Formeln – und nur diese – nach festen Regeln ableiten lassen. Ein solches Verfahren mit samt dem dazugehörigen Beweis des *Gödelschen Vollständigkeitssatzes*[21] findet man in einem Extra-Skript.

Dort wird auch gezeigt, daß es ein analoges Verfahren für die Prädikatenlogik 2. Stufe – in der außer den Variablen des Typs *e* (*Individuenvariablen*) auch Variablen beliebiger prädikatenlogischer Typen (*Prädikatsvariablen*) zugelassen sind – nicht geben kann. Man kann sogar zeigen, daß es überhaupt kein Verfahren geben kann, mit dem sich alle gültigen Sätze der Prädikatenlogik 2. Stufe mechanisch herleiten lassen; sie ist in diesem Sinne *unvollständig*; das gilt auch für jede Sprache, die die Prädikatenlogik der 2. Stufe umfaßt – also insbesondere für die Typenlogik. Der Begriff der logischen Gültigkeit (Folgerung, Äquivalenz,…) läßt sich in diesen Sprachen demnach nicht von der Metatheorie, der Mengenlehre, trennen.

Behauptungen über Unentscheidbarkeit und Unvollständigkeit sind zunächst nur im Sinne entsprechender Präzisierungen von Begriffen wie *Algorithmus* und *Aufzählbarkeit* zu verstehen, wie sie ein Zweig der mathematischen Logik namens *Rekursionstheorie* liefert. Es muß allerdings bedacht werden, daß sich alle bisherigen – und teilweise sehr unterschiedlichen – Versuche, diese Begriffe zu präzisieren, als äquivalent erwiesen haben, so daß die meisten Logiker davon ausgehen, daß man es hier mit dem (nahezu einmaligen) Fall einer exakten Rekonstruktion eines vortheoretischen Begriffsfelds zu tun hat; diese Annahme geistert als *Churchsche These*[22] durch die Literatur.
Mit der Ausdrucksstärke einer Logik nimmt also offenbar die Komplexität ihres Gültigkeitsbegriffs zu. Damit stellt sich die natürliche Frage nach möglichst ausdrucksstarken entscheidbaren bzw. vollständigen Logiken. Ein berühmtes Resultat in diesem Zusammenhang ist der

Satz von Lindström[23]
Keine ausdrucksstärkere Erweiterung Prädikatenlogik erster Stufe erfüllt Kompaktheit und Löwenheim-Skolem abwärts.

---

20 Das Wort *Algorithmus* i.S.v. '(mechanisierbarem) Rechenverfahren' geht über Umwege auf den Beinamen *Al Chwarismi* des ['Mann aus Chwarism'] des persischen Mathematikers Muhammad Ibn Musa zurück, der im 9. Jahrhundert lebte.

21 Kurt Gödel (vgl. Fn. 8) hat 1930 die Vollständigkeit der Prädikatenlogik erstmals bewiesen. Heutige Beweise – wie der im Begleitskript – orientieren sich an Leon Henkins (*1921) *Completeness of the first-order functional calculus* (1949).

22 Nach Alonzo Church (vgl. Fn. 14), der sie erstmals 1936 aufgestellt hat. Church hat übrigens auch die Unvollständigkeit der Prädikatenlogik 2. Stufe bewiesen.

23 Per Lindström (*1936) hat diesen Satz 1969 bewiesen. Die *Kompaktheits-* und *Löwenheim-Skolem-Sätze* tauchen am Ende Begleitskripts (als Korollare zur Vollständigkeit) auf.

3.3 Theorien

Definitionen

Sei L eine prädikatenlogische Sprache und $\Sigma \subseteq Fml_L$ eine Menge geschlossener L-Formeln. Dann ist $Cn(\Sigma) := \{\varphi \in Fml_L \mid \Sigma \models \varphi\}$.

Eine L-*Theorie* ist eine Menge $T \subset Fml_L$ geschlossener L-Formeln, so daß $T = Cn(T) \neq Fml_L$.

Die $\neq$-Bedingung stellt nur sicher, daß jede Theorie überhaupt ein Modell besitzt! (WARUM?)

In den folgenden Beispiele tauchen neben Prädikaten auch *Funktionskonstanten* auf, das sind Konstanten der Typen *e*, *ee*, *e*(*ee*), etc. Die Erweiterung der prädikatenlogischer Sprachen um solche Konstanten ist in dem Sinne harmlos, als sie so gut wie alle allgemeinen Eigenschaften der Logik erhält. (Es gibt Ausnahmen, die wir hier aber nicht betrachten.) Aus Bequemlichkeit haben wir diese Möglichkeit weggelassen – vor allem weil sie eine weitere Induktion in der Formel-Definition verursacht hätte.

Beispiele

a. Es sei R eine zweistellige Prädikatskonstante, L_0 enthalte nur R, *DLO* (für *dense linear orders* – dichte lineare Ordnungen) sei die L_0-Theorie $Cn(\Sigma_0)$, wobei

$$
\begin{aligned}
\Sigma_0 = \{ \quad & (\forall x)(\forall y)(\forall z)((R(x,y) \,\&\, R(y,z)) \rightarrow R(x,z)), \\
& \neg (\exists x)(\exists y)(R(x,y) \,\&\, R(y,x)), \\
& (\forall x)(\forall y)((R(x,y) \vee R(y,x) \vee (x = y)), \\
& (\forall x)(\forall z)(R(x,z) \rightarrow (\exists y)(R(x,y) \,\&\, R(y,z)), \\
& (\forall y)(\exists x)(\exists z)(R(x,y) \,\&\, R(y,z))\}.
\end{aligned}
$$

b. Sei M ein beliebiges L-Modell. Dann ist $Th(M) = \{\varphi \in Fml_L \mid M \models \varphi\}$ eine L-Theorie.

c. ist ein Spezialfall von b.: Sei L_{A} die Sprache mit den Funktionskonstanten '0' (Typ *e*), ''' [Typ *ee*], '+' [Typ *e*(*ee*)],'·' [Typ *e*(*ee*)] und $\mathsf{A} = (\omega, F_{\mathsf{A}})$, das L-Modell, in dem F_{A} diesen Konstanten die 0, die Nachfolgeroperation bzw. Addition und Multiplikation über den natürlichen Zahlen zuweist. Die Theorie $Th(\mathsf{A})$ heißt *Standard-Arithmetik*, A das *Standardmodell der Arithmetik*.

d. Die *Peano-Arithmetik* ist die L_{A}-Theorie $Cn(\Sigma_{PA})$, wobei

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{PA} = \{ \quad & (\forall x)(\forall y)((x' = y') \rightarrow (x = y)), \\
& (\forall x) \neg (x' = 0), \\
& (\forall x)((x + 0) = x), \\
& (\forall x)(\forall y)((x + y') = (x + y)'), \\
& (\forall x)((x \cdot 0) = 0), \\
& (\forall x)(\forall y)((x \cdot y') = ((x \cdot y) + x))\} \cup \\
& \{\varphi \in Fml_L \mid Fr(\varphi) = \varnothing \text{ und } \varphi \text{ hat die Gestalt} \\
& \quad `(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\psi[x/0] \,\&\, (\forall x)(\psi \rightarrow \psi[x/x']) \rightarrow (\forall x)\psi))'\}
\end{aligned}
$$

e. Die *Mengenlehre ZF* läßt sich als $L_{\in}$-Theorie der Gestalt $Cn(\Sigma_{ZF})$ formulieren; die Details dieser Formalisierung interessieren hier nicht. [Hausaufgbe für Unerschrockene]

Definitionen

Eine L-Theorie T ist *vollständig* gdw. für alle geschlossenenen $\varphi \in Fml_L$ gilt: $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$.

Eine L-Theorie T ist [*endlich*] *axiomatisierbar* gdw. es eine [endliche] aufzählbare Menge $\Sigma \subseteq Fml_L$ geschlossener L-Formeln gibt, so daß gilt: $T = Cn(\Sigma)$.

Eine L-Theorie T ist *entscheidbar* gdw. es einen Algorithmus gibt, der für beliebige geschlossene $\varphi \in Fml_L$ (nach endlich vielen Schritten) entscheidet, ob $\varphi \in T$.

Wenn κ eine Kardinalzahl ist, ist eine L-Theorie T κ-*kategorisch* gdw. für alle L-Modelle (D,F) und $M' = (D',F')$ gilt: wenn $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{D'}} = \kappa$, dann sind M und M' isomorph.

Eine Menge ist *aufzählbar*, falls es einen Algorithmus gibt, der alle Elemente der Menge aufzählt; endliche Mengen sind stets aufzählbar.

Vorsicht: Der rekursionstheoretische Begriff der *Aufzählbarkeit* [engl. *enumerability*] darf nicht verwechselt werden mit dem mengentheoretischen Begriff der Abzählbarkeit [engl. *countability*] – Gleichmächtigkeit mit einer Teilmenge von ω. Jede aufzählbare Menge ist abzählbar, aber nicht umgekehrt.

Vorsicht: Der *Vollständigkeitsbegriff* für Theorien hat nichts mit dem für Logiken zu tun! Die Prädikatenlogik selbst kann man zwar auch als Theorie $Cn(\varnothing)$ verstehen – das sind ja gerade die gültigen Formeln – aber diese Theorie ist nicht vollständig im Sinne der obigen Definition. (Warum nicht?) Vollständigkeit einer Logik heißt: es gibt Algorithmen, die alle gültigen Formeln der Logik lückenlos aufzählen; Vollständigkeit einer Theorie heißt: alle Formeln der Sprache werden lückenlos von der Theorie nach wahr oder falsch kategorisiert.

Bemerkungen

- Jede Theorie besitzt ein Modell.
- Für beliebige Σ gilt: $Cn(\varnothing) \subseteq \Sigma \subseteq Cn(\Sigma) = Cn(Cn(\Sigma)) \neq \varnothing$.
- Wenn T axiomatisierbar und vollständig ist, ist T entscheidbar.
- Wenn T nur unendliche Modelle besitzt, für irgendein unendliches κ κ-kategorisch ist und Modelle der Kardinalität κ besitzt, ist T vollständig.
- Wenn T für alle κ κ-kategorisch ist, besitzt T nur endliche Modelle.

Der erste Punkt gilt folgt unmittelbar aus der obigen Theorie-Definition (ist aber nach einer gängigeren, äquivalenten Definitionen ein Korollar des Vollständigkeitssatzes). Der zweite Punkt ist leicht nachzuweisen. Der Entscheidungsalgorithmus für den dritten Punkt muß nur T aufzählen (was wegen der Axiomatisierbarkeit geht) und warten, bis φ oder $\neg\varphi$ kommt: eines muß wegen der Vollständigkeit eintreten. Der vierte und fünfte Punkt folgen aus dem Löwenheim-Skolem-Satz[24], nach dem jede Theorie, die überhaupt ein unendliches Modell besitzt, Modelle beliebiger unendlicher Kardinalitäten besitzt. (Für endliche κ gilt der Punkt nicht: wenn P das einzige Prädikat ist, ist z.B. "$(\exists x)\ (\exists y)\ [\ P(x)\ \&\ \neg\ P(y)\ ]$" ist 2-kategorisch, aber unvollständig.)

Beispiele (Forts.)

a. *DLO* ist per definitionem endlich axiomatisierbar. Mit mengentheoretischen Mitteln kann man außerdem zeigen, daß R auch $\aleph_0$-kategorisch ist (und damit die rationalen Zahlen bis auf Isomorphie charakterisiert). Damit ist R auch vollständig und entscheidbar.

b. $Th(M)$ ist immer vollständig (warum?) und für endliche M auch immer entscheidbar (weil man die Wahrheitswerte dann stets in endlich vielen Schritten

24 Nach dem Mathematiklehrer Leopold Löwenheim (1878–1957), der 1915 einen unvollständigen Beweis geliefert hat, und dem norwegischen Logiker Thoralf Skolem (s. Fn. 25), der 1920 Löwenheims Satz erstmals lückenlos (und in allgemeinerer Form) bewiesen hat.

berechnen kann) und *kategorisch* (= κ–kategorisch für beliebige κ).
c. $Th(\mathsf{A})$ ist also auch vollständig, aber nicht entscheidbar – ja nicht einmal axiomatisierbar – was aus dem *Zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz* [s.u.] folgt. Mit Hilfe des Kompaktheitssatzes kann man außerdem schließen, daß $Th(\mathsf{A})$ nicht $\aleph_0$-kategorisch ist.
d. Die Peano-Arithmetik ist unvollständig. Das besagt der erste *Gödelschen Unvollständigkeitssatz* [s.u.].
e. ZF ist (wegen des Zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes) unvollständig.
Die erststufige Axiomatisierung von ZF führt im Zusammenhang zu einem speziellen Problem, dem sog. *Skolem-Paradox*[25]: aus dem Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes schließt man – das ist der sog. *Löwenheim-Skolem-Satz Abwärts* – auf die Existenz *abzählbarer* Modelle der Mengenlehre (vorausgesetzt, sie besitzt überhaupt Modelle). Aber aus den mengentheoretischen Axiomen folgt der Satz vonCantor (s.o.), der gerade besagt, daß es überabzählbar viele Mengen von natürlichen Zahlen gibt, die dann auch alle im mengentheoretischen Universum vorhanden sein müßten – das ja dann eigentlich nicht abzählbar sein kann. Das Paradox wird auf der letzten Seite des Begleitskripts aufgelöst.

3.4 Prädikat-Funktor-Logik

Wie in der Typenlogik lassen sich auch in der Prädikatenlogik die gebundenen Variablen wegerklären, allerdings auf andere Weise: die Operationen der kombinatorischen Logik führen über die erste Stufe hinaus. Man kann aber andere Operationen finden, die genau den prädikatenlogischen Manipulationen gebundener Variablen entsprechen, z.B.:

Definition

Sei L eine prädikatenlogische Sprache. Dann ist die *Prädikat-Funktor-Logik* die durch folgende Induktion (über die Länge gewisser Folgen) bestimmte Familie $(PFL_L^n)_{n\in\omega}$:

(i) Wenn $R\in L$ ein n-stelliges Prädikat ist, ist $R\in PFL_L^n$;
(ii) wenn $P\in PFL_L^n$, dann auch ‘NP’, ‘JP’ und ‘SP’;
(iii) wenn $P\in PFL_L^{n+1}$, dann sind ‘EP’ und ‘RP’ in PFL_L^n;
(iv) wenn $P\in PFL_L^n$ und $Q\in PFL_L^m$, dann ist ‘APQ’$\in PFL_L^{n+m}$.

(Dabei sind N, J, S, E, R und A irgendwelche Symbole, die nicht in L vorkommen.)

J und B werden als *Inversionsoperationen* über Relationen gedeutet, R als eine (verallgemeinerte) *Reflexivierung*; N, E und A sind typenverschobene Versionen von Negation, Existenzquantifikation und Konjunktion. Die Idee ist, daß die Elemente von PFL_n jeweils n-stellige Relationen denotieren, die in gewisser Weise prädikatenlogischen Formeln mit n freien Variablen entsprechen, so daß insbesondere PFL_0 gerade der Menge der geschlossenen prädikatenlogischen Formeln entspricht:

Definition

Sei L eine prädikatenlogische Sprache und $M = (D,F)$ ein (typenlogisches) L-Modell. Dann ist $\|\cdot\|^M: \bigcup_{n\in\omega} PFL_L^n \to \bigcup_{n\in\omega}\wp(D^n)$ die durch folgende Induktion bestimmte Funktion:

(i) $\|R\|^M = \{(u_1,\ldots,u_n)\in D^n \mid F(R)(u_n)\ldots(u_1) = 1\}$, wenn $R\in L$ n-stellig ist;
(ii-a) $\|\mathbf{N}P\|^M = \wp(D^n) \setminus \|P\|^M$, wenn $P\in PFL_L^n$;

25 Nach Thoralf Skolem (1887–1963), der es 1920 formuliert hat.

(ii-b) $\| \mathbf{J}P \|^M = \{(u_2,\ldots,u_n,u_1) \mid (u_1,\ldots,u_n) \in \| P \|^M\}$, wenn $P \in PFL_L^n$;
(ii-c) $\| \mathbf{S}P \|^M = \{(u_1,\ldots,u_n,u_{n-1}) \mid (u_1,\ldots,u_n) \in \| P \|^M\}$, wenn $P \in PFL_L^n$;
(iii-a) $\| \mathbf{E}P \|^M = \bigcup_{u_n} \{(u_1,\ldots,u_{n-1}) \mid (u_1,\ldots,u_n) \in \| P \|^M\}$, wenn $P \in PFL_L^{n+1}$;
(iii-b) $\| \mathbf{R}P \|^M = \{(u_1,\ldots,u_n) \mid (u_1,\ldots,u_n,u_n) \in \| P \|^M\}$, wenn $P \in PFL_L^{n+1}$;
(iv) $\| \mathbf{A}PQ \|^M = [\![(\forall x)\, \varphi]\!]^{M,g}$
wenn $P \in PFL_L^n$ und $Q \in PFL_L^m$.

Satz

Sei L eine prädikatenlogische Sprache. Dann gibt es für jede Formel $\varphi \in Fml_L$ mit n freien Variablen $x_1,\ldots,x_n$(in dieser Reihenfolge) ein $P_\varphi \in PFL_L^n$, so daß für alle L-Modelle $M = (D,F)$ und (prädikatenlogischen) Belegungen g: $Var_e \to D$ gilt:

$$\| P_\varphi \|^M = \{(u_1,\ldots,u_n) \mid [\![\varphi]\!]^{M,g[^{x_1}/_{u_1}],\ldots,[^{x_1}/_{u_1}]} = 1\}.$$

Insbesondere gibt es für jede geschlossene prädikatenlogische Formel ein nullstelliges PFL-Prädikat, das mit ihr stets im Wahrheitswert übereinstimmt. Der Beweis basiert wesentlich auf der kombinatorischen Tatsache, daß jede Permutation einer *n*-stelligen Folge – in diesem Fall der Variablen in der Reihenfolge ihres ersten Vorkommens in φ – durch eine Verknüpfung der durch die Prädikatfunktoren J und S ausgedrückten Basispermutationen erreicht werden kann.

Beispiel ($R,S \in Con_{e(et)}$):
(φ) $\neg\, (\exists y)\, [R(x,y)\ \&\ S(y,z)]$
(P_φ) N ESJJJ JRJJJA *RS*

Satz

Sei L eine prädikatenlogische Sprache. Dann gibt es für jedes $P_\varphi \in PFL_L^n$ ($n \in \omega$) eine Formel $\varphi \in Fml_L$ mit n freien Variablen $x_1,\ldots,x_n$ (in dieser Reihenfolge), so daß für alle L-Modelle $M = (D,F)$ und (prädikatenlogischen) Belegungen g: $Var_e \to D$ gilt:

$$\| P_\varphi \|^M = \{(u_1,\ldots,u_n) \mid [\![\varphi]\!]^{M,g[^{x_1}/_{u_1}],\ldots,[^{x_1}/_{u_1}]} = 1\}.$$

Beim Beweis kann man das Substitutionslemma zum Einsatz bringen, um die kombinatorischen Prädikat-Funktoren R, J und S zu übersetzen.

4. *Modallogik*
4.0 Modale Aussagenlogik

Es sei L eine aussagenlogische Sprache. Die Menge MAL_L ist dann die kleinste Menge, so daß für alle $n\in\omega$ gilt: $Var_t\subseteq MAL_L$; wenn $A_1,\dots,A_n\in MAL_L$ und $©\in J_L$ n-stellig ist, dann ist "$©(A_1,\dots,A_n)$"$\in AL_L$; und wenn $A\in AL_L$, dann ist "$\Box A$"$\in MAL_L$.

"$\Box$ A" wird gelesen als: "es ist notwendigerweise so, daß A"; "$\Diamond A$" ist kurz für "$\neg \Box \neg A$" und kann dementsprechend gelesen werden als: "es ist möglicherweise so, daß A".
Wir werden für das folgende die Sprache $L = L_{\perp,\rightarrow}$ festhalten und dementsprechend als Index weglassen.

Beispiele für berühmte [schematische] Formeln der modalen Aussagenlogik ($A,B \in MAL$):

(K) $\Box(A\rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

(D) $(\Box A \rightarrow \Diamond A)$

(T) $(\Box A \rightarrow A)$

(4) $(\Box A \rightarrow \Box\Box A)$

(B) $(\Diamond \Box A \rightarrow A)$

(E) $(\Diamond A\rightarrow \Box \Diamond A))$

Definition

Sei S ein *System* der modalen Aussagenlogik, d.h. ist eine (in der Regel endliche) Menge von Formeln der modalen Aussagenlogik. $A\in MAL$ ist in n Schritten ableitbar aus S gdw. gilt:

(I.A.) $n= 0$ und:
$A\in S$; oder:
A ist eine (modallogische) Instanz eines der aussagenlogischen Axiome (AL1), (AL2) und (AL3); oder:

(I.S.) $n> 0$ und es gibt m, $m'< n$ und $B\in MAL$,so daß gilt:
A ist in m Schritten ableitbar aus S oder:
B und $(B\rightarrow A)$ sind in m bzw. m' Schritten aus S ableitbar (*Modus Ponens*); oder:
$A = \Box B$, und B ist in m Schritten aus S ableitbar (*Nezessitation*).

Zur Erinnerung

Die (vollständigen) Axiome der Aussagenlogik sind:

(AL1) $(A \rightarrow (C\rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$

(AL2) $(B \rightarrow (A \rightarrow B))$

(AL3) $(\neg\neg A \rightarrow A)$

"Modallogische Instanzen" sind Einsetzungen für A, B und C aus MAL, dürfen also auch "$\Box$" enthalten.

Beispiele für berühmte Systeme der modalen Aussagenlogik:

D = (K) + (D) (deontische Logik)

T = (K) + (T) (alethische Logik)

B = (K) + (T) + (B) (Brouwersches[26] System)

$S4$ = (K) + (T) + (4) (Lewis-System[27] 4)

$S5$ = (K) + (T) + (E) [≡ (K) + (T) + (4) + (B) !] (Lewis-System[27] 5)

"+" ist als Vereinigung aller Instanzen zu verstehen, "≡" als Gleichheit der ableitbaren Formeln.

Definition

Ein (*modallogischer*) *Rahmen* (oder *Kripke-Rahmen*[28]) ist ein Paar F = (W,R), wobei W eine nicht-leere Menge und R eine zweistellige Relation über W ist.
Sei F = (W,R) ein Rahmen. Ein (F-)*Modell* ist ein Tripel M = (W,R,V), wobei $V{:}Var_t \rightarrow \wp(W)$.
Die Elemente von W nennt man die *Welten* des Modells, R seine *Zugänglichkeitsrelation*; wenn $w \in W$, ist $wR := \{w' \in W \mid wRw'\}$ die Menge der (in F) *für w möglichen* Welten.

Semantische Hauptdefinition

Es sei $M = (W,R,V)$ ein Modell. Dann bestimmt sich der *Wert* $[\![A]\!]^M$ einer Formel $A \in MAL$ *im Modell M* wie folgt induktiv über As Länge:

(i) $[\![A]\!]^M = F(A)$, falls $A \in Var_t$;

(ii) $[\![A]\!]^M = \emptyset$, falls $A = \bot$;

(iii) $[\![A]\!]^M = (W \setminus [\![B]\!]^M) \cup [\![C]\!]^M$ falls $A = (B \rightarrow C)$;

(iv) $[\![A]\!]^M = \{w \in W \mid wR \subseteq [\![A]\!]^M\}$, falls $A = \Box B$.

Der Wert der charakteristischen Funktion von $[\![A]\!]^M$ (*gemäß M*) heißt *Wahrheitswert von A in w* (*relativ zu M*) und wird notiert als: $[\![A]\!]^{M,w}$.

Sei F = (W,R) ein Rahmen, M ein F-Modell und $A \in MAL$.
A ist M-gültig – symbolisch: $M \models A$ – falls $[\![A]\!]^M = W$ (gdw. für alle $w \in W$ gilt: $[\![A]\!]^{M,w} = 1$).
A ist F-gültig – symbolisch: F $\models A$ – falls für alle F-Modelle M gilt: A ist M-gültig.

Beispiele

(0) F $\models$ (K), für alle Rahmen F.

(1) F $\models$ (T), für alle reflexiven Rahmen F (also solche mit reflexiver Zugänglichkeit).

(2) F $\models$ (4), für alle transitiven Rahmen F.

26 Nach dem niederländischen Mathematiker Luitzen Brouwer (1881–1966), dem Begründer des *Intuitionismus*, einer alternativen Auffassung von Logik und Mathematik, bei der modale Begriffe (wie *Beweisbarkeit* und *Konstruierbarkeit*) die klassischen realistischen Begriffe (wie *Wahrheit* und *Existenz*) ersetzen.

27 Nach dem amerikanischen Philosophen Clarence Irving Lewis (1883–1964), auf den die Aufspaltung der Modallogik in verschiedene Axiomensysteme zurückgeht.

28 Saul Kripke (*1940) hat im Jahre 1959 – ausgehend von Rudolf Carnaps (1891–1970) *Meaning and Necessity* (1947) – die zentralen semantischen Begriffsbildungen der Modallogik entwickelt.

ad (0): wenn $wR \subseteq [\![A \to B]\!]^M = (W \setminus [\![A]\!]^M) \cup [\![B]\!]^M$, $wR \subseteq [\![A]\!]^M$ und wRw', dann ist $wR \subseteq ((W \setminus [\![A]\!]^M) \cup [\![B]\!]^M) \cap [\![A]\!]^M = [\![B]\!]^M$.
ad (1): wenn $wR \subseteq [\![A]\!]^M$ und R reflexiv ist, dann ist insbesondere $w \in [\![A]\!]^M$.
ad (2): zum Selbstüberlegen!

Übersetzung

Es sei L_{mod} die prädikatenlogische Sprache mit dem zweistelligen Prädikat R^* und den einstelligen Prädikaten p^* (für jedes $p \in Var_t$); $x^* \in Var_e$ sei eine feste Variable. Für $A \in MAL$ bestimmt sich die (*prädikatenlogische*) *Übersetzung* $A^* \in Fml_{L_{mod}}$ durch folgende Induktion:

(i) $p^* = R^*(x^*)$, falls $p \in Var_t$;

(ii) $\bot^* = \bot$;

(iii) $(B \to C)^* = (B^* \to C^*)$;

(iv) $(\Box B)^* = (\forall y)\,[\,R^*(x^*,y) \to B^*[x^*/y]\,]$

Satz

Es sei $M = (W,R,V)$ ein Modell und M^* das *entsprechende* L_{mod}-Modell: $M^* = (W,F^*)$, wobei R von $F^*(R^*)$ geschönfinkelt wird und für jedes $p \in Var_t$ gilt: $F^*(p^*)$ ist die charakteristische Funktion von $V(p)$. Dann gilt für jede (prädikatenlogische) M^*-Belegung g und jede Formel $A \in MAL$:

$$[\![A]\!]^{M,g(x^*)} = [\![A^*]\!]^{M^*,g}.$$

Das beweist man leicht durch Induktion über den Formelaufbau. Der Satz hat in dem Sinne keine Umkehrung, als nicht jede prädikatenlogische Formel einer übersetzten *MAL*-Formel äquivalent ist (s.u.). Die modale Aussagenlogik entspricht in diesem Sinne einem *Fragment* der Prädikatenlogik erster Stufe.

Definition

Es sei E eine Eigenschaft von Rahmen.
Eine Formel $A \in MAL$ ist E-*gültig*, falls A in allen Rahmen gültig ist, die E haben.

Statt von *Eigenschaften* ist in der Literatur meistens von *Klassen* von Rahmen die Rede; beides setzt irgendeine Erweiterung der ZF-Mengenlehre voraus. In der Praxis werden solche Eigenschaften betrachtet, die wesentlich von der Zugänglichkeitsrelation abhängen (wie z.B. Transitivität); da aber z.B. Reflexivität auch von der Weltenmenge abhängt – R ist reflexiv über W, wenn für alle $w \in W$ gilt: wRw – spricht man allgemeiner von Eigenschaften des Rahmens, nicht nur der Zugänglichkeit.

Beispiele (s.o)

(1) (T) ist Reflexivitäts-gültig.
(2) (4) ist Transitivitäts-gültig.

Ein System S ist *korrekt für* [*Rahmen mit der Eigenschaft*] E, wenn alle aus S ableitbaren Formeln E-gültig sind. Ein System S ist *vollständig für* [*Rahmen mit der Eigenschaft*] E, wenn die aus S ableitbaren Formeln genau die E-gültigen Formeln sind.

Vollständigkeitssätze

- D ist vollständig für *serielle* Rahmen (= solche (W,R), bei denen stets $wR \neq Ø$).
- T ist vollständig für reflexive Rahmen.
- B ist vollständig für symmetrische Rahmen.
- $S4$ ist vollständig für Rahmen, die sowohl reflexiv als auch transitiv sind.
- $S5$ ist vollständig für Äquivalenzrelationen (= Rahmen, deren Zugänglichkeit eine Äquivalenzrelation ist).
- $S5$ ist vollständig für totale Relationen.

Daß $S5$ für verschiedene Rahmeneigenschaften vollständig ist, zeigt die begrenzte Ausdrucksstärke der modalen Aussagenlogik gegenüber der Prädikatenlogik: die Formel $(\forall x)(\forall y)\ R^*(x,y)$ kann keine Übersetzung einer MAL-Formel sein, denn sie gilt für totale Relationen, aber nicht für beliebige Äqivalenzrelationen.

Beim Beweis modallogischer Vollständigkeitssätze geht die folgende Konstruktion wesentlich ein:

Definition

Es sei S ein modallogisches System. Das *kanonische Modell für S* ist das Tripel $M_S = (W_S,R_S,V_S)$ bestehend aus:

- der Menge aller S-maximalen Mengen Teilmengen von MAL, d.h. aller $X \subseteq MAL$, für die gilt: $\perp$ ist nicht S-ableitbar aus X, aber aus jedem Y mit $X \subset Y \subseteq MAL$;
- der zweistelligen Relation $R_S =$
  $\{(X,Y) \in W_S \times W_S \mid \text{für alle } A \text{ gilt: wenn } \Box A \in X, \text{ dann ist } A \in Y\}$;
- der Interpretation V_S: $MAL \to \wp(W_S)$, so daß für alle $p \in Var_t$ gilt:
  $V_S(p) = \{X \in W_S \mid p \in X\}$.

Im kanonischen Modell entsprechen den Welten also genau die Faktenkonstellationen, die im jeweiligen System nicht zum Widerspruch führen; und zugänglich sind jeweils die Welten, in denen alles, was mit Notwendigkeit gilt, auch der Fall ist.

Satz

Es sei S ein System, das (K) als Axiomenschema enthält, und E eine Rahmeneigenschaft. Dann gilt:
Wenn S korrekt ist für E und der *kanonische Rahmen* (W_S,R_S) selbst die Eigenschaft E hat, dann ist S vollständig für E.

Der Beweis basiert wesentlich darauf, daß beliebige modallogische Formeln A in einer Welt des kanonischen Modells genau dann wahr sind, wenn sie Elemente dieser Welt (die ja definitionsgemäß eine Formelmenge ist) sind.

Modallogische Systeme beschreiben also in gewisser Weise Eigenschaften zweistelliger Relationen (auf einer Weltenmenge). Die aussagenlogischen Variablen liest man dabei als stellvertretend für *beliebige* Propositionen (= Weltenmengen). Diesen Effekt kann man auch direkter erzielen, indem man die modale Aussagenlogik in die Prädikatenlogik *zweiter Stufe* übersetzt:

Definition

Es sei L_2 die prädikatenlogische Sprache 2. Stufe mit dem zweistelligen Prädikat R^* und den einstelligen Prädikatsvariablen p^* (für jedes $p \in Var_t$); $x^* \in Var_e$ sei eine feste Individuenvariable. Für $A \in MAL$ ist die *korrespondierende Formel* A^{**} die zweitstufige Formel

$$(\forall p^*_1) \ldots (\forall p^*_n) (\forall x^*) A^*;$$

dabei sind $p^*_1, \ldots, p^*_n$ die (in dieser Reihenfolge) in der erststufigen Übersetzung A^* von A vor kommenden einstelligen Prädikate.

Der Einfachheit halber nehmen wir als Variablen der zweiten Stufe die Prädikats*konstanten* der erststufigen Logik.

Beispiel

$$(T)^{**} = (\forall x^*) (\forall P) [(\forall y) (R^*(x^*,y) \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x^*)]$$

Definition

Eine modallogische Formel $A \in MAL$ *charakterisiert* eine Rahmeneigenschaft E gdw. für alle Modelle $M = (D,F)$ gilt: $M \models A^{**}$ gdw. $(D,F(R^*))$ hat E.

NB: Wenn eine Formel zwei Rahmeneigenschaften charakterisiert, treffen diese auf genau dieselben Rahmen zu!

Eine zweistellige Relation R ist *euklidisch*[29] gdw. für alle x, y und z gilt: wenn xRy und xRz, dann ist auch yRz.

Denksportaufgabe

Zu zeigen ist: Die Äquivalenzrelationen sind gerade die reflexiven euklidischen Relationen!

Beispiele

Formel	*d.h.*	*charakterisiert*
(D)	$(\Box p \rightarrow \Diamond p)$	Serialität
(T)	$(\Box p \rightarrow p)$	Reflexivität
(4)	$(\Box p \rightarrow \Box \Box p)$	Transitivität
(B)	$(\Diamond \Box p \rightarrow p)$	Symmetrie
(E)	$(\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p))$	Euklidizität

In der Tabelle steht 'p' für eine beliebige Aussagenvariable $p \in Var_t$; es handelt sich also strenggenommen um Instanzen der entsprechenden Schemata.

29 Nach dem griechischen Mathematiker Euklid (~300 v. Chr.) – wohl weil das für seine Geometrie charakteristische Parallelen-Axiom besagt, daß die Beziehung des nicht-orthogonalen Schneidens (zwischen Geraden) euklidisch ist.

Nachweis am Beispiel von (B) – wir setzen $R := F(R^*)$:

$(W,F) \models (\Diamond \Box p \rightarrow p)^{**}$

gdw. $(W,F) \models (\forall x^*)(\forall P)\,[\,(\exists y)\,[\,R^*(x^*,y)\;\&\;(\forall z)\,[R^*(y,z) \rightarrow P(z)\,]\,]$ [Def. **]

gdw. für jedes $w \in W$ gilt und jedes $M \subseteq W$ gilt: wenn es ein $w' \in wR$ gibt, so daß $w'R \subseteq M$, dann ist $w \in M$ [Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe]

Wenn also (B)** wahr ist und wRw', können wir $M = w'R$ setzen und auf $w'Rw$ schließen – d.h. R ist symmetrisch; und wenn R symmetrisch ist, wRw' und $w'R \subseteq M$, ist mit $w'Rw$ auch $w \in M$ – d.h. (B)** ist wahr.

Die *zweitstufige* Formel (B)** erweist sich also als logisch äquivalent zu der erststufigen Formel $(\forall x)(\forall y)\,[\,R^*(x^*,y) \rightarrow R^*(x^*,y)\,]$ – und analog in den anderen Fällen in der Tabelle. Aber nicht jede modallogische Formel charakterisiert eine durch eine erststufige Formel definierbare Eigenschaft. Man kann z.B. zeigen, daß '$\Box((\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p)$' besagt, daß die der Zugänglichkeit inverse Relation fundiert ist, was sich in der erststufigen Logik nicht ausdrücken läßt. Im allgemeinen sieht man es einer gegebenen *MAL*-Formel nicht an, ob die ihr korrespondierende Formel einer erststufigen Formel äquivalent ist.

Die Charakterisierung einer Rahmeneigenschaft E darf man nicht mit der Vollständigkeit für E verwechseln. Vollständigkeit besagt nur, daß alle modallogisch ausdrückbaren allgemeingültigen Aussagen über E-Rahmen ableitbar sind. *S5* ist z.B. vollständig für Äquivalenz- und Totalrelationen, aber "(T) & (E)" charakterisiert nur Äquivalenzrelationen. Umgekehrt kann man Systeme finden, die die Identität charakterisieren – also die Eigenschaft, die ein Rahmen besitzt, wenn seine Zugänglichkeit die Identität über seiner Weltenmenge ist – für diese aber unvollständig sind.

Ein *vollständiges* System für die Identität ist übrigens (K) + "$(\Box A \leftrightarrow A)$"; die Formel "$(\Box p \leftrightarrow p)$" *charakterisiert* auch die Identität.

4.1 Modale Prädikatenlogik

Definition

Sei L eine prädikatenlogische Sprache. Die Menge PML_L der *modalen Formeln von L* ist die kleinste Menge, für die gilt: $\perp PML_L$; '$(x = y)$'$\in PML_L$, falls $x,y \in Var_e$; '$R(x_1,\ldots,x_n)$'$\in PML_L$, falls $x_1,\ldots,x_n \in Var_e$, $R \in L$ und '$R(x_1)\ldots(x_n)$'$\in L^*_t$; '$(\varphi \rightarrow \psi)$'$\in PML_L$, falls $\varphi,\psi \in PML_L$; '$(\forall x)\,\varphi$'$\in PML_L$, falls $\varphi \in Fml_L$ und $x \in Var_e$; '$\Box\,\varphi$'$\in PML_L$, falls $\varphi \in PML_L$.

PML-Formeln verhalten sich also zu prädikatenlogischen Formeln wie *MAL*-Formeln zu aussagenlogischen.

Definitionen

Sei L eine prädikatenlogische Sprache. Ein *L-Modell* ist ein Quadrupel $M = (D,W,R,F)$, wobei gilt:

- (W,R) ist ein Rahmen;
- D ist eine Funktion mit Definitionsbereich W, so daß für alle $w \in W$ gilt: $D_w \neq \varnothing$;
- F ist eine Funktion mit Definitionsbereich L, so daß für alle n-stelligen

$R \in L$ gilt: $F(R)$: $W \to \wp(\boldsymbol{D}^n)$, wobei $\boldsymbol{D} = \bigcup_{w \in W} D_w$.

Eine M-Belegung g ist dann eine Funktion g: $Var_e \to \boldsymbol{D}$, und $[\![\cdot]\!]^{M,g} : Fml_L \to \wp(W)$ ist die durch folgende Induktion bestimmte Funktion:

$[\![\bot]\!]^{M,g} = \varnothing$;

$[\![(x = y)]\!]^{M,g} = \{w \in W \mid g(x) = g(y)\}$;

$[\![R(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{M,g} = \{w \in W \mid (g(x_1),\ldots,g(x_n)) \in F(R)(w)\}$;

$[\![(\varphi \to \psi)]\!]^{M,g} = (W \setminus [\![\varphi]\!]^{M,g}) \cup [\![\psi]\!]^{M,g}$;

$[\![\Box\varphi]\!]^{M,g} = \{w \in W \mid wR \subseteq [\![\varphi]\!]^{M,g}$;

$[\![(\forall x)\,\varphi]\!]^{M,g} = \{w \in W \mid \underline{\text{für alle } d \in \boldsymbol{D}}$ ist $w \in [\![\varphi]\!]^{M,g[x/u]}\}$.

Nach dieser Semantik hängen nicht nur die Extensionen der Prädikate von der jeweiligen Welt ab – sonst würden sich keine vernünftigen Wahrheitsbedingungen ergeben –, sondern auch *(a)* der Individuenbereich, aber *(b)* nicht die Extensionen der (freien) Variablen; die Quantoren quantifizieren dagegen *(c)* über alle Individuenbereiche. Das ist nicht die einzige Möglichkeit, Prädikaten- und Modallogik miteinander zu verbinden. Insbesondere lassen sich *(a)* – *(c)* individuell variieren, indem man etwa *(a')* in der Modelldefinition zusätzlich fordert, daß stets $D_w = D_{w'}$, bzw. *(b')* Belegungen Paare aus Variablen und Welten Individuen zuordnen läßt bzw. *(c')* die oben unterstrichene Restriktion durch 'für alle $d \in D_w$' ersetzt. Die Variante *(c')* ist insofern interessant, als sie die Gültigkeit der sog. *Barcanschen Formel*[30] – "$(\forall x)\ \Box\ \varphi \leftrightarrow \Box\ (\forall x)\ \varphi$" – erzwingt, die nach der obigen Semantik nicht gültig ist. (Warum eigentlich nicht?) Auch andere, radikalere Abweichungen von diesen Definitionen sind denkbar (und vorgeschlagen worden).

Wie die Quantoren lassen sich die Modaloperatoren auf (eine spezielle Art der) Abstraktion von möglichen Welten zurückführen – in der folgenden Kombination von Modal- und Typenlogik:

4.2 Intensionale Typenlogik

Es sei s ein (ab jetzt festes) von e und t verschiedenes Objekt, aber kein geordnetes Paar. Die Menge der *intensionalen Typen* ist die kleinste Menge $\boldsymbol{IT}$, so daß gilt:

$e \in \boldsymbol{IT}$, $t \in \boldsymbol{IT}$, $(a,b) \in \boldsymbol{IT}$, und $(s,b) \in \boldsymbol{IT}$ sobald $a \in \boldsymbol{IT}$ und $b \in \boldsymbol{IT}$.

Es seien D und W beliebige, nicht leere Mengen. Durch Induktion über die Länge der intensionalen Typen definiert man dann eine Familie $(D_a)_{a \in \boldsymbol{IT}}$:

$D_e = D$; $D_t = \{0,1\}$ [$= 2!$]; $D_{ab} = D_b{}^{D_a}$; $D_{sb} = D_b{}^W$.

$D^* = \bigcup\{D_a \mid a \in \boldsymbol{IT}\}$.

Eine *intensionallogische Sprache* ist eine Familie $(Con_a)_{a \in \boldsymbol{IT}}$ beliebiger, jeweils paarweise voneinander disjunkter Mengen (von *Konstanten*), die keines der Hilfssymbole und keine Variablen enthalten.

Es sei $L = (Con_a)_{a \in \boldsymbol{IT}}$ eine intensionallogische Sprache. Die *Ausdrücke von L* sind die kleinste Familie $(L^*_a)_{a \in \boldsymbol{IT}}$, so daß für alle α und β und Typen a,b,c gilt:

(i) $Con_a \subseteq L^*_a$;

(ii) $Var_a \subseteq L^*_a$;

(iii) wenn $\alpha \in L^*_{ab}$ und $\beta \in L^*_a$, dann "$\alpha(\beta)$" $\in L^*_b$;

(iv) wenn $x \in Var_a$ und $\alpha \in L^*_b$, dann "$(\lambda x\alpha)$" $\in L^*_{ab}$;

30 Nach Ruth Barcan Marcus.

(v) wenn $\alpha \in L*_a$ und $\beta \in L*_a$, dann "$(\alpha{=}\beta)$" $\in L*_t$;

(vi) wenn $\alpha \in L*_{sb}$, dann "$^\vee\alpha$" $\in L*_b$;

(vii) wenn $\alpha \in L*_b$, dann "$^\wedge\alpha$" $\in L*_{sb}$.

Sei $L = (Con_a)_{a \in \boldsymbol{IT}}$ eine typenlogische Sprache. Ein *L-Modell* ist ein Tripel $M = (D,W,F)$, so daß gilt: $D \neq \varnothing$, $W \neq \varnothing$, und F ist eine (auf den Konstanten von L definierte) Funktion, so daß für alle $a \in \boldsymbol{IT}$ und $c \in Con_a$ gilt: $F(c) \in D_{sa}$ [sic].
Wenn $M = (D,W,F)$ ein L-Modell ist, dann ist g: $Var^* \rightarrow D^*$ eine *M-Belegung*, falls für jeden Typ $a \in \boldsymbol{IT}$ und jedes $x \in Var_a$ gilt: $g(x) \in D_a$[sic].

Es sei $M = (D,W,F)$ ein L-Modell, g eine M-Belegung und $w \in W$. Dann bestimmt sich der *Wert* $[\![\alpha]\!]^{M,g,w}$ eines Ausdrucks $\alpha \in L_a^M$ *im Modell M* wie folgt induktiv über αs Länge:

(i) $[\![\alpha]\!]^{M,g,w} = F(\alpha)(w)$, falls $\alpha \in Con_a$;

(ii) $[\![\alpha]\!]^{M,g,w} = g(\alpha)$, falls $\alpha \in Var_a$;

(iii) $[\![\alpha]\!]^{M,g,w} = [\![\alpha_1]\!]^{M,g,w}([\![\alpha_2]\!]^{M,g,w})$, falls $\alpha = \alpha_1(\alpha_2)$;

(iv) $[\![\alpha]\!]^{M,g,w} = \{(u,[\![\alpha_1]\!]^{M,g[x/u],w}) \mid u \in D_b\}$, falls $\alpha = (\lambda x\, \alpha_1)$ und $x \in Var_b$;

(v) $[\![\alpha]\!]^{M,g,w} = \{u \mid [u = 0$ und $[\![\alpha_1]\!]^{M,g,w} = [\![\alpha_2]\!]^{M,g,w}]\}$, falls $\alpha = (\alpha_1 = \alpha_2)$;

(vi) $[\![\alpha]\!]^{M,g,w} = [\![\alpha_1]\!]^{M,g,w}(w)$, falls $\alpha = {}^\vee\alpha_1$;

(vii) $[\![\alpha]\!]^{M,g,w} = \{(w',[\![\alpha_1]\!]^{M,g,w'}) \mid w' \in W\}$, falls $\alpha = {}^\wedge\alpha_1$.

Der Auswertungsparameter w spielt die Rolle ein 'unischtbaren' Variablen, die durch den Operator '^' (genannt *Intensor*, oder engl. *Cap*) gebunden werden kann; '∨' bindet w nicht, sondern drückt Applikation auf w aus. Es gilt ein der β-Konversion entsprechender Zusammenhang zwischen '^' und '∨':

<u>Down-Up Cancellation:</u> $^{\vee\wedge}\alpha \equiv \alpha$, für alle intensionallogischen Ausdrücke α.

Eine Variablenbeschränkung braucht man nicht; es handelt sich also um einen Speziafall einer β-Konversion der Form $(\lambda x\alpha)(x) \equiv \alpha$. – Ein der η-Konversion entspürechender umgekehrter Operatorenabbau ist im allgemeinen nicht äquivalenzerhaltend, sondern unterliegt einer analogen Beschränkung:

<u>Up-Down Cancellation:</u> $^{\wedge\vee}\alpha \equiv \alpha$, falls α <u>modal geschlossen</u> (und $^{\wedge\vee}\alpha$ ein intensionallogischer Ausdruck) ist.

Die eingeklammerte Bedingung soll daran erinnern, daß α von einem Typ der Gestalt *sa* sein muß. Der Begriff der modalen Geschlossenheit (s.u.) besagt, daß die 'unischtbare Variable nicht frei ist in α' – was man in Analogie zur η-Konversion fordern muß. Der Begriff spielt auch eine Rolle in der:

<u>β-Konversion:</u> $((\lambda x\, \alpha)\,(\beta)) \equiv \alpha[x/\beta]$, falls β für x in α einsetzbar ist.

Einsetzbarkeit wird dabei so definiert, daß modal offene Ausdrücke beim Konvertieren niemals in den Skopus von '^' geraten dürfen (s.u.). Diese zusätzliche Beschränkung (ohne die das Prinzip nicht korrekt wäre) hat eine harte Konsequenz: für den entsprechenden β-Reduktionsbegriff gibt es keinen Church-Rosser Satz! So ist z.B. $(\lambda x\ P((\lambda y\ {}^\wedge y)(x)))(c)$ reduzierbar auf $P((\lambda y\ {}^\wedge y)(c))$ und auf $(\lambda x\ P({}^\wedge x))(c)$, die beide weder weiter β-kontrahierbar noch alphabetische Varianten voneinander sind.

Wie im Falle der modalen (Prädikaten- und) Aussagenlogik läßt sich auch die intensionale Typenlogik in eine entsprechende extensionale Sprache ersetzen, und zwar die der *zweisortigen Typenlogik*.

Zweisortige Typen werden definiert durch: $e \in \boldsymbol{2T}$, $s \in \boldsymbol{2T}$, $t \in \boldsymbol{2T}$, und $(a,b) \in \boldsymbol{2T}$, sobald $a \in \boldsymbol{2T}$ und $b \in \boldsymbol{2T}$. Der Rest der Definitionen läuft wie in der Typenlogik in Abschnitt 2.

Übersetzung

Für jede intensionallogische Sprache $L = (Con_a)_{a \in \boldsymbol{IT}}$ ist die *Extensionalisierung* die Sprache $L2 = (Con2_a)_{a \in \boldsymbol{2T}}$ der zweisortigen Typenlogik, so daß für jedes $a \in \boldsymbol{2T}$ gilt: wenn $a \in \boldsymbol{IT}$, ist $Con2_{sa} = Con_a$, und sonst ist $Con2_a = Con2_{sa} = \emptyset$. Sei i eine feste Variable des Typs s. Dann wird für jeden L-Ausdruck $\alpha \in L^*_a$ die *Übersetzung* $\alpha^* \in L2^*_a$ durch folgende Induktion definiert:

(i) $c^* =$ '$c\,(i)$', falls $c \in Con_a$;

(ii) $x^* = x$, falls $x \in Var_a$;

(iii) wenn $\alpha \in L^*_{ab}$ und $\beta \in L^*_a$, dann ist '$\alpha(\beta)$'* = '$\alpha^*(\beta^*)$';

(iv) wenn $x \in Var_a$ und $\alpha \in L^*_b$, dann ist '$(\lambda x \alpha)$'* = '$(\lambda x\, \alpha^*)$';

(v) wenn $\alpha \in L^*_a$ und $\beta \in L^*_a$, dann ist '$(\alpha = \beta)$'* = '$(\alpha^* = \beta^*)$';

(vi) wenn $\alpha \in L^*_{sb}$, dann ist '${}^\vee\alpha$'* = '$\alpha^*(i)$';

(vii) wenn $\alpha \in L^*_b$, dann ist '${}^\wedge\alpha$'* = '$(\lambda i\, \alpha^*)$'.

Satz

Sei L eine intensionallogische Sprache, $M = (D,W,F)$ ein L-Modell und g eine M-Belegung. Dann gilt für jedes $\alpha \in L^*_a$:

$$[\![\alpha]\!]^{M,g,w} = [\![\alpha^*]\!]^{M,g^*},$$

wobei g^* eine (zweisortige) M-Belegung ist, so daß gilt: $g \subseteq g^*$ und $g^*(i) = w$.

Der Beweis ist eine einfache Induktion über den Aufbau der Ausdrücke.

Beispiel

'$(\lambda x\, P((\lambda y\, {}^\wedge y)(x)))\,(c)$'* = $(\lambda x\, P(i)\, ((\lambda y\, (\lambda i\;\; y))\, (x)))\, (c(i))$

In der zweisortigen Typenlogik gilt das Gesetz der β-Konversion, wonach diese Übersetzung sowohl auf

(i) $P(i)\, ((\lambda y\, (\lambda i\;\; y))\, (c(i)))$ $\quad [\equiv P(i)\, ((\lambda y\, (\lambda j\, y))\, (c(i))) \equiv P(i)\, ((\lambda j\, c(i)))\,]$

als auch auf

(ii) $(\lambda x\, P(i)\, ((\lambda i\;\; x)))\, (c(i))$ $\quad [\equiv (\lambda x\, P(i)\, ((\lambda j\, x)))\, (c(i)) \equiv P(i)\, ((\lambda j\, c(i)))\,]$

β-kontrahiert werden kann. Das sind auch die Übersetzungen der entsprechenden intensionallogischen Kontraktionen, die – im Gegensatz zu (i) und (ii) nicht weiter reduziert werden konnten. In der zweisortigen Typenlogik gilt auch der Church-Rosser-Satz für die β-Reduktion.

Die Variablenbeschränkung bei der β-Konversion motiviert die folgende:

Definition:

Ein intensionallogischer Ausdruck α ist *modal geschlossen* gdw. $i \notin Fr(\alpha *)$.

Weiterführende Lektüre

zu 1.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter: *Einführung in die Mengenlehre*. BI-Wissenschaftsverlag, [3]1994.
Die beste mir bekannte Einführung in die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre

Rucker, Rudy: *Infinity and the Mind*. Paladon: London 1984. (Taschenbuchausgabe; Originalausgabe 1982).
Exzellente populärwissenschaftliche Darstellung der Mathematik des Unendlichen

Friedrichsdorf, Ulf; Prestel, Alexander: *Mengenlehre für den Mathematiker*. Vieweg, Braunschweig 1985.
Knappe, aber sehr lesenswerte Darstellung einer alternativen Mengenlehre

zu 2.

Andrews, Peter B: *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth through Proof*. Academy Press, Orlando/Florida: 1986.
Die einzige mir bekannte Logik-Einführung auf typenlogischer Basis

Hindley, J. Roger; Seldin, Jonathan P.: *Introduction to Combinators and λ-Calculus*. Cambridge University Press 1986.
Standardlehrbuch

van Benthem, Johan: *Language in Action*. North-Holland, Amsterdam 1991.
Wichtiges Werk zur Logik der Typenverschiebung

Muskens, Reinhard: *Meaning and Partiality*. CSLI, Stanford 1995.
Enthält einen Vergleich zwischen relationaler und funktionaler Typenlogik

Westerstahl, Dag: 'Quantifiers in Formal and Natural Languages'. In: Dov Gabbay, Franz Guenthner (eds.): *Handbook of Philosophical Logic. Vol. IV*, 1–131. Kluwer, Dordrecht 1989.
Solider Überblick über das Gebiet der generalisierten Quantoren

zu 3.

Hodges, Wilfrid: 'Elementary Predicate Logic'. In: Dov Gabby, Franz Guenthner (eds.): *Handbook of Philosophical Logic. Volume I: Elements of Classical Logic*. Dordrecht 1983. 1 – 131.
Der beste mir bekannte Überblick über die gesamte Prädikatenlogik

Ebbinghaus, Heinz-Dieter; Flum, Jörg; Thomas, Wolfgang: *Einführung in die mathematische Logik*. Wissenschaftliche Buchgesellshaft, Darmstadt 1978. (Das ist die erste Auflage; inzwischen überarbeitet & woanders.)
Eine der vielen Einführungen in die Prädikatenlogik – und sicher eine der besten

zu 4.

Chellas, Brian F.: *Modal Logic*. Cambridge University Press 1980.
Solide, moderne Einführung in die modale Aussagenlogik

Gamut, L. T. F.: *Logic, Language, and Meaning. Volume II. Intensional Logic and Logical Grammar*. University of Chicago Press 1991.
Enthält sehr gute Darstellungen verschiedener nicht-extensionaler Logiken

van Benthem, Johan: 'Correpsondence Theory'. In: Dov Gabby, Franz Guenthner (eds.): *Handbook of Philosophical Logic. Volume I: Elements of Classical Logic*.
Überblicksartikel mit vielen Beispielen und Literaturhinweisen

Formale Grundlagen der Sprachphilosophie

Aussagenlogik

Primformeln P = $\{p_1,\ldots,p_n,\ldots\}$; *Junktoren*: $\{\bot,\rightarrow\}$.

Formeln: $\bot\in$ Wff; $p\in$ P $\Rightarrow p\in$ Wff; A, B $\in$ Wff $\Rightarrow$ (A$\rightarrow$B) $\in$ Wff.

Modelle: Funktionen g: P $\rightarrow \{0,1\}$ (*Wahrheitswerte*).

Deutung: für Modelle g und Formeln A$\in$Wff wird der *Wahrheitswert von* A *nach* g induktiv definiert:

$[\![\bot]\!]^g = 0$; für $p\in$ P ist $[\![p]\!]^g = g(p)$; und $[\![(A\rightarrow B)]\!]^g = 1 - [\![A]\!]^g + [\![A]\!]^g[\![B]\!]^g$.

Statt ‘ $[\![A]\!]^g = 1$’ sagt man auch: ‘A ist wahr in g’.

Bemerkung: (a) $\{\bot,\rightarrow\}$ ist funktional vollständig: ‘$\neg$A’ ist ‘A$\rightarrow\bot$’; ‘A&B’ ist ‘$\neg$ (A $\rightarrow \neg$ B)’, also: ‘(A$\rightarrow$(B$\rightarrow\bot$))$\rightarrow\bot$’.

Wenn $\Sigma\subseteq$Wff und g: P$\rightarrow\{0,1\}$, dann ist g ein *Modell von* Σ (kurz: Σ-*Modell*), falls für jedes A$\in\Sigma$ gilt: $[\![A]\!]^g = 1$.

A$\in$Wff *folgt aus* $\Sigma\subseteq$Wff (‘$\Sigma \models$ A’), falls für jedes Σ-Modell g gilt: $[\![A]\!]^g = 1$.

A$\in$Wff ist *gültig* (= *tautologisch*: $\models$ A), falls für alle Modelle g gilt: $[\![A]\!]^g = 1$.

Bemerkung: (b) A ist gültig gdw. A aus der leeren Menge folgt: $\models$ A $\Leftrightarrow$ Ø $\models$ A;
(c) Aus Σ folgt $\bot$ gdw. es kein Σ-Modell gibt.

Sei $\Sigma\cup\{A\}\subseteq$Wff. Ein *Beweis* (*der Länge* $n\in\mathbb{N}$) *von* A *aus* Σ ist eine n-stellige Folge von Tripeln $\langle(1, A_1, b_1),\ldots,(n, A_n,b_n)\rangle$, so daß für alle i zwischen 0 und n+1 gilt:

(1) $A_i\in$ Wff;

(2) b_i ist eine *Begründung*, und zwar entweder (i) ‘Axiom’, wobei dann $A_i\in$ Ax, oder (ii) ‘n.V.’, wobei $A_i\in\Sigma$, oder (iii) ‘MP:j, k’, wobei j, k< i und $A_j = (A_k A_i)$ [‘MP’ steht für *Modus Ponens*];

(3) A_n = A.

Die Menge Ax der aussagenlogischen Axiome werden wir nach und nach entwickeln. Beweise werden üblicherweise untereinander geschrieben:

1.	A_1	b_1
…	…	…
n.	A_n	b_n

Bemerkung: (d) Wenn $\langle(1, A_1, b_1),\ldots,(n, A_n,b_n)\rangle$ ein Beweis von A_n aus Σ ist und i<n, dann ist $\langle(1, A_1, b_1),\ldots,(i, A_i,b_i)\rangle$ ein Beweis von A_i aus Σ.

A$\in$Wff ist *aus* $\Sigma\subseteq$Wff *beweisbar* (*herleitbar*, ‘$\Sigma \vdash$ A’), wenn es einen Beweis von A aus Σ gibt.

Bemerkung: (e) Wenn $\Sigma \vdash A \rightarrow B$ und $\Sigma \vdash A$, dann auch $\Sigma \vdash B$.
(f) Wenn $\Delta \vdash A$ und $\Delta \subseteq \Sigma$, dann auch $\Sigma \vdash A$. ('Monotonie der Beweisbarkeit')

Wir beweisen den Satz von der Vollständigkeit der Aussagenlogik:
Für alle aussagenlogischen Formeln A und Formelmengen Σ gilt:

$$\Sigma \models A \text{ gdw. } \Sigma \vdash A.$$

Die Richtung '$\Leftarrow$' heißt auch 'Korrektheitssatz'; sie ist deutlich leichter zu beweisen als '$\Rightarrow$', setzt aber die Kenntnis von Ax voraus und wird deshalb erst nach'$\Rightarrow$', der Vollständigkeit i.e.S., bewiesen. Der Nachweis von '$\Rightarrow$' erfolgt in 5 Schritten recht unterschiedlicher Komplexität:

1. $\Sigma \models A \Rightarrow \Sigma \models \neg\neg A$;
2. $\Sigma \models \neg\neg A \Rightarrow \Sigma \cup \{\neg A\} \models \bot$;
3. $\Sigma \cup \{\neg A\} \models \bot \Rightarrow \Sigma \cup \{\neg A\} \vdash \bot$;
4. $\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash \bot \Rightarrow \Sigma \vdash \neg\neg A$;
5. $\Sigma \vdash \neg\neg A \Rightarrow \Sigma \vdash A$.

Man beachte die Symmetrie der Beweisführung: Die Schritte 4. und 5. sind 2. und 1. 'rückwärts', aber mit '$\vdash$' statt '$\models$'. Es folgen Kommentare zu den einzelnen Schritten:

Ad 1. Der Schritt ist trivial, weil stets gilt:

(1) $[\![\neg\neg A]\!]^g = [\![A]\!]^g$.

Ad 2. Aufgrund der Definition von '$\neg$' ist 2. ein Spezialfall von:

(2) $\Sigma \models A \rightarrow B \Rightarrow \Sigma \cup \{A\} \models B$.

(2) ist leicht nachgewiesen: Wenn nämlich $(A \rightarrow B)$ in jedem Σ-Modell wahr ist, dann auch in jedem $\Sigma \cup \{A\}$-Modell. Aber aus $[\![A \rightarrow B]\!]^g = [\![A]\!]^g = 1$ folgt unmittelbar: $[\![B]\!]^g = 1$.

Ad 3. Das ist das Herzstück des Beweises; denn hier wird der Zusammenhang zwischen Folgerung und Beweisbarkeit hergestellt. Wieder weist man dazu eine allgemeinere Behauptung nach, nämlich:

(3) $\Sigma \models \bot \Rightarrow \Sigma \vdash \bot$.

(3) wird per Kontraposition bewisen, d.h. wir werden zeigen:

(3') $\Sigma \nvdash \bot \Rightarrow \Sigma \not\models \bot$.

('$\not\models$' und '$\nvdash$' heißen natürlich: 'folgt nicht' bzw. 'ist nicht beweisbar'.) Im Lichte der Bemerkung (c) heißt (3') so viel wie das:

Modellexistenzlemma

Wenn $\Sigma \not\vdash \perp$, dann gibt es ein Σ-Modell.

Dieses Lemma werden wir erst nach den Schritten 4. und 5. nachweisen.

Ad 4. Wir werden sogleich allgemein zeigen:

Deduktionstheorem

$\Sigma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Sigma \vdash A \to B.$

Der Schritt 4. ist wieder ein Spezialfall.

Ad 5. Offenbar kann dieser Schritt – im Sinne von Bemerkung (e) – vollzogen werden, wenn gesichert ist, daß $\Sigma \vdash \neg\neg A \to A$. Das wiederum erreichen wir wenn wir die Formel

- $(\neg\neg A \to A)$ (A3)

als Axiom nehmen (und zwar für jedes $A \in$ Wff); wir werden also annehmen, daß die gekennzeichnete Formel in Ax ist. Man beachte, daß dieses Axiom insofern (semantisch) *korrekt* ist, als es offensichtlich tautologisch ist; es folgt also aus Ø und damit aus jedem $\Sigma \subseteq$ Wff.

Zu zeigen bleiben also noch Deduktionstheorem und Modellexistenzlemma, in dieser Reihenfolge.

Beweis des Deduktiontheorems

Wir argumentieren induktiv über die Beweislänge, d.h. wir weisen nach, daß für jedes $n \geq 1$ die folgende Behauptung gilt:

(D) Für jede (!) Formelmenge der Gestalt $\Sigma \cup \{A\}$ gilt: wenn es einen Beweis der Länge n von B aus $\Sigma \cup \{A\}$ gibt, dann ist: $\Sigma \vdash A \to B$.

Induktionsanfang: n=1.

Eine Begründung per Modus Ponens ist mangels kleinerer Zahlen bei einem einzeiligen Beweis von B aus $\Sigma \cup \{A\}$ unmöglich, so daß 2 Fälle bleiben:

1. Fall: $B \in$ Ax. Dann gilt auch: $\Sigma \vdash B$. Um (per Modus Ponens) zu zeigen, $\Sigma \vdash A \to B$ bedarf es nur noch des (sematisch korrekten) Axioms:

- $B \to (A \to B)$ (A1)

2. Fall: $B \in \Sigma \cup \{A\}$. Wenn $B \in \Sigma$, ist wieder $\Sigma \vdash B$, und das obige Axiom hilft weiter. Wenn nicht, muß A = B sein, und wir müssen zeigen, daß $\Sigma \vdash A \to A$. Hier können wir wieder ein Axiom annehmen:

- $A \to A$ (A0)

Induktionsschritt: n>1.
Diesmal sind drei Begründungen möglich, von denen wir zwei (im Sinne der Bemerkung (d)) auf den Induktionsanfang zurückschieben können. Es bleibt also die Möglichkeit 'MP: i, j', wobei i und j kleiner sind als n. Dann gibt es (wieder wegen Bemerkung (d)) Beweise der Längen i und j für irgendwelche Formeln $C \rightarrow B$ und C aus $\Sigma \cup \{A\}$. Da i und j kleiner sind als n, erfüllen sie die Induktionsvoraussetzung, d.h.: $\Sigma \vdash A \rightarrow (C \rightarrow B)$, und $\Sigma \vdash A \rightarrow C$. Um auf $\Sigma \vdash A \rightarrow B$ zu schließen, nehmen wir wieder ein (korrektes!) Axiom an:

- $(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$ (A2)

Zweifache Anwendung der Bemerkung (e) führt dann zum gewünschten Ergebnis. QED.

Bleibt noch das *Modellexistenzlemma*: wie kann man aus einem gegebenen *widerspruchsfreien* $\Sigma \subseteq \mathrm{Wff}$ (also einem Σ, aus dem $\perp$ nicht herleitbar ist) ein Σ-Modell konstruieren?

Dazu einige *Vorüberlegungen*: Das gesuchte Modell g* muß (wie jedes Modell) allen Primformeln einen Wahrheitswert zuordnen – und zwar irgendeinen, solange dies mit Σ in Einklang zu bringen ist. Wenn also etwa $\Sigma = \{p_1 \rightarrow \neg p_2, p_1\}$, müssen nur p_1 wahr und p_2 falsch werden; was z.B. mit p_3 passiert, ist egal und kann willkürlich entschieden werden. Bei $\Sigma' = \{p_1 \rightarrow \neg p_2\}$ ist dagegen für jede Primformel jeder Wahrheitswert möglich; allerdings sind auch hier der Willkür Grenzen gesetzt: eine Entscheidung für p_1 kann Konsequenzen für p_2 haben. Wir könnten also die Primformeln dem Index nach durchgehen und bewerten; die Entscheidung soll dabei der Beweis-Kalkül treffen: eine Primformel wird als wahr akzeptiert, wenn aus ihr und den bis dato akzeptierten Formeln $\perp$ nicht herleitbar ist. Auf diese Weise vererbt sich die Eigenschaft der Widerspruchsfreiheit von Schritt zu Schritt.
Die folgende Konstruktion verallgemeinert diese Idee dahingehend, daß nicht nur die Primformeln, sondern alle Formeln überhaupt auf diese Weise durchlaufen werden. (Dabei wird die Abzählbarkeit von Wff vorausgesetzt, auf die wir noch zurückkommen!) Diese Komplikation ist in der Aussagenlogik eigentlich unnötig, nicht aber im Falle der Prädikatenlogik.

Beweis des Modellexistenzlemmas
Gegeben sei eine widerspruchsfreie Menge $\Sigma \subseteq \mathrm{Wff}$. Gesucht ist ein Modell g* von Σ. Wir definieren induktiv die Familie $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n, \text{ falls } \Sigma_n \cup \{A_n\} \vdash \perp \\ \Sigma_n \cup \{A_n\} \text{ sonst} \end{cases}$$

Dabei sei vorausgesetzt, daß $\mathrm{Wff} = \{A_1, A_2, \ldots\}$. Dann sammeln wir alle so erhaltenen Formeln in einer Menge Σ^* auf:

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n \quad (= \{A \in \mathrm{Wff} \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit: } A \in \Sigma_n\})$$

Bemerkung: (g) $\Sigma_i \subseteq \Sigma^*$, für alle $i \in \mathbb{N}$.
(h) $\Sigma_i \not\vdash \bot$, für alle $i \in \mathbb{N}$.
(i) $\Sigma_i \subseteq \Sigma_j$, wenn $i \leq j$.

Wir werden zeigen, daß Σ^* gerade die *Theorie* eines Modells, des gesuchten g^*, ist, d.h.:

$$(*)\ \Sigma^* = \{A \in Wff \mid [\![A]\!]^{g^*} = 1\}.$$

Wie sieht g^* aus? Offenbar muß es alle Primformeln in Σ^* wahr machen; andererseits gilt für Primformeln $p = A_n$, die nicht in Σ^* sind, daß sie Σ_n – und damit auch Σ – zum Widerspruch führen würden und dementsprechend falsch sein müssen in g^*. Wir setzen also:

$$g^*(p) = \begin{cases} 1, \text{ falls } p \in \Sigma^* \\ 0, \text{ falls } p \notin \Sigma^* \end{cases}$$

für beliebige $p \in P$. Bevor wir nun (*) zeigen, machen wir uns einige Eigenschaften der Σ^*-Konstruktion klar:

(B0) Für alle $A \in Wff$ gilt: $\Sigma^* \vdash A$ gdw. $\Sigma_i \vdash A$, für irgendein $i \in \mathbb{N}$.

(B1) Σ^* ist widerspruchsfrei.

(B2) Σ^* ist *deduktiv abgeschlossen*, d.h. wenn $\Sigma^* \vdash A$, dann $A \in \Sigma^*$ (für alle $A \in Wff$).

(B3) Σ^* ist *maximal*, d.h. $\neg A \in \Sigma^*$, sobald $A \notin \Sigma^*$ (für alle $A \in Wff$).

Beweis: (B0): Jeder Beweis von A aus Σ^* ist ein Beweis von A aus einem endlichen $\Delta = \{B_1, \ldots, B_k\} \subseteq \Sigma^*$ (weil der Beweis endlich lang ist und somit nur endlich viele Prämissen aus Σ benutzen kann). Da $\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$, kommt jedes B_i (für $i \leq k$) in einem der Σ_j vor. Eines dieser j ist das größte (es gibt ja höchstens k von ihnen), in dem alle $B_i \in \Delta$ vorkommen müssen (wg. Bem. (i)), d.h.: $\Delta \subseteq \Sigma_m$, für dieses maximale m. Also ist: $\Sigma_m \vdash A$. – Die andere Richtung ist trivial.

(B1): folgt unmittelbar aus (B0) und Bem. (h).

(B2): Da $A \in Wff$ ist $A = A_i$, für ein $i \in \mathbb{N}$. Wäre $\Sigma^* \vdash A$, aber $A \notin \Sigma^*$, dann wäre $A \notin \Sigma_i$, d.h.: (!) $\Sigma_{i-1} \cup \{A\} \vdash \bot$, nach der Definition von Σ_i. Mit dem Deduktionstheorem hätten wir dann aber: $\Sigma_{i-1} \vdash A \to \bot$, und so: $\Sigma^* \vdash A \to \bot$ (denn $\Sigma_{i-1} \subseteq \Sigma^*$). Aber dann hätten wir (weil $\Sigma^* \vdash A$): $\Sigma^* \vdash \bot$, d.h. Σ^* wäre widersprüchlich, was (B1) widerspricht.

(B3): Wenn $A\ (= A_i) \notin \Sigma^*$, ist wieder: $\Sigma_i \cup \{A\} \vdash \bot$, was nach dem Deduktionstheorem wiederum bedeutet, daß $\Sigma_i \vdash \neg A_i$. Dann ist aber auch $\Sigma^* \vdash \neg A_i$, d.h. $\neg A_i \in \Sigma^*$, wg. (B2).

Aus (B1) - (B3) wird nun induktiv (*) bewiesen; d.h. wir zeigen per Induktion über den Formelaufbau, daß für jedes $A \in Wff$ gilt:

(+) $\quad A \in \Sigma^*$ gdw. $[\![A]\!]^{g^*} = 1$.

Induktionsanfang, d.h.: (*i*) $A = \bot$ oder (*ii*) $A = p_i \in P$.
Ad (*i*): Per Definition ist $[\![A]\!]^{g^*} = 0 \neq 1$; damit bleibt zu zeigen: $A \notin \Sigma^*$, was aber wegen (B1) gilt.
Ad (*ii*): (+) nach Definition von g* ist: $[\![p_i]\!]^{g^*} = 1$ gdw. $g^*(p_i) = 1$ gdw. $p_i \in \Sigma^*$.

Induktionsschritt, d.h.: $A = (B \to C)$, und nach *Induktionsvoraussetzung* (I.V.) gilt (+) für B und C.
Wir unterscheiden 3 Fälle:
<u>1. Fall</u>: $[\![C]\!]^{g^*} = 1$.
Dann ist auch $[\![A]\!]^{g^*} = [\![(B \to C)]\!]^{g^*} = 1$, und es bleibt zu zeigen: $A \in \Sigma^*$. Wegen der I.V. ist aber $C \in \Sigma^*$, und somit auch: $\Sigma^* \vdash (B \to C)$, mit (A1) und MP. Also ist $A \in \Sigma^*$, wegen (B2).
<u>2. Fall:</u> $[\![B]\!]^{g^*} = [\![C]\!]^{g^*} = 0$,
Wieder ist $[\![A]\!]^{g^*} = [\![(B \to C)]\!]^{g^*} = 1$, und es bleibt zu zeigen: $A \in \Sigma^*$. Nach I.V. ist $B \notin \Sigma^*$, d.h.: $\neg B \in \Sigma^*$, wg. (B3). Hier hilft ein Axiom weiter:

- $\neg B \to (B \to C)$ (A4)

<u>3. Fall:</u> $[\![B]\!]^{g^*} = 1$, aber $[\![C]\!]^{g^*} = 0$.
Diesmal ist $[\![A]\!]^{g^*} = [\![(B \to C)]\!]^{g^*} = 0$, und es bleibt zu zeigen: $A \notin \Sigma^*$. Wäre aber $A \in \Sigma^*$, hätten wir wegen der I.V.: $B \in \Sigma^*$, und somit auch (per Modus Ponens): $C \in \Sigma^*$, was wiederum der I.V. für C widerspricht.

Die drei Fälle decken offenbar alle Möglichkeiten ab, womit das Modellexistenzlemma bewiesen ist: nach Bem. (g) ist ja $\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma^*$, und g* ist ein Modell von Σ^*, also auch von Σ.

Zwei der oben benutzten Axiome, (A0) und (A4), waren überflüssig; wir hätten sie auch mit Modus Ponens aus den anderen ableiten können:

<u>(A0)</u> kriegt man folgendermaßen (aus der leeren Menge):

1.	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	(A2)
2.	$(A \to ((A \to A) \to A))$	(A1)
3.	$((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	(MP: 1,2)
4.	$(A \to (A \to A))$	(A1)
5.	$(A \to A)$	(MP: 3,4)

Für <u>(A4)</u> können wir das Deduktionstheorem (DT) heranziehen, das ja ohne Zuhilfenahme dieses Axioms bewiesen wurde: mit dem DT genügt es nämlich zu zeigen, daß $\{\neg B, B\} \vdash C$. Das geht einfach. Zunächst gilt (mit Modus Ponens): $\{\neg B, B\} \vdash \bot$; wegen (A1) ist außerdem: $\{\neg B, B\} \vdash (\bot \to (\neg C \to \bot))$. Also haben wir auch (wieder mit MP): $\{\neg B, B\} \vdash (\neg C \to \bot)$, d.h: $\{\neg B, B\} \vdash \neg\neg C$. Mit Hilfe von (A3) (und MP) folgt dann: $\{\neg B, B\} \vdash C$, was zu zeigen war.

Für die vollständige Axiomatisierung der Aussagenlogik genügen demnach die Axiome (A1) - (A3) und die Regel Modus Ponens.

Man beachte, daß es sich bei (A1) - (A3) um *Schemata* handelt, für jeweils beliebige A, B, C $\in$ Wff; wir haben es also strenggenommen mit unendlich vielen Axiomen zu tun.

Damit der Vollständigkeitssatz überhaupt Biß hat, müssen wir noch die *Korrektheit* der Axiomatisierung nachweisen, d.h. daß Ableitbarkeit nur im Falle von (semantisch gerechtfertigter) Folgerung vorliegt; denn auch die triviale Beziehung $\wp(\mathrm{Wff}) \times \mathrm{Wff}$ ist in dem Sinne vollständig, als sie jede Folgerung abdeckt. Aber sie erfüllt natürlich nicht den:

<u>*Korrektheitssatz*</u>

Wenn $\Sigma \vdash A$, dann $\Sigma \models A$ (für beliebige $\Sigma \subseteq \mathrm{Wff}$ und $A \in \mathrm{Wff}$).

Der *Beweis* erfolgt induktiv über die Länge n der Beweise aus Σ.
<u>Induktionsanfang: *n*</u>=1.

<u>1. Fall</u>: $A \in \Sigma$. Dann ist sowieso jedes Σ-Modell ein Modell von A, d.h.: $\Sigma \models A$.
<u>2. Fall (‘Korrektheit der Axiome’): A i</u>st Axiom, d.h. von der Form (A1), (A2) oder (A3). Der Test per Wahrheitstafel zeigt dann, daß *jedes* Modell ein Modell von A ist, also auch jedes Σ-Modell, und wir haben wieder: $\Sigma \models A$.
<u>Induktionsschritt: *n*</u>>1.
Die ersten beiden Fälle ($A \in \Sigma$ bzw. Axiom) laufen wie im I.A. Bleibt der:
<u>3. Fall (‘Korrektheit des Modus Ponens’): Es g</u>ibt Formeln B und $(B \to A)$, die sich in weniger als n Schritten aus Σ herleiten lassen. Die I.V. sagt dann, daß $\Sigma \models B$ und $\Sigma \models (B \to A)$, d.h. in jedem Σ-Modell g ist $[\![B]\!]^g = [\![(B \to A)]\!]^g = 1$. Ein Blick auf die Wahrheitstafel zeigt, daß in diesen Modellen g auch $[\![A]\!]^g = 1$, d.h.: $\Sigma \models A$. QED.

Die Vollständigkeit der Aussagenlogik ist damit bewiesen. Zwei unmittelbare Folgerungen sind aber noch der Erwähnung wert:

Korollare aus dem Vollständigkeitssatz

1. *Axiomatisierbarkeit des Tautologiebegriffs*

$\models A$ gdw. $\vdash A$.

2. *Kompaktheit der Aussagenlogik*

Wenn $\Sigma \models A$, dann gibt es ein endliches $\Delta \subseteq \Sigma$ mit: $\Delta \models A$.

Als ***Nachtrag*** noch eine Bemerkung zur Kardinalität von Wff. Außer mit grundsätzlichen mengentheoretischen Erwägungen kann man sich die Abzählbarkeit der Aussagenlogik auch anhand der (aus unabhängigen Gründen interessanten) *Gödelisierung*, also einer konkreten injektiven Funktion von (einer Teilmenge von) $\mathbb{N}$ in Wff klarmachen. Das Verfahren sei hier kurz skizziert.

Zunächst überlegt man sich, daß jede Formel $A \in$ Wff eindeutig einer endlichen Reihe von Grund- und Hilfssymbolen (also Elementen aus:

G = {'(', ')', '$\perp$','$\rightarrow$'} $\cup$ P

entspricht, so daß es genügt, jeder endlichen Folgen $(g_1,\ldots,g_n)$ von Grundsymbolen – also jeder Funktion von $\{1,\ldots,n\}$ nach G – eindeutig eine natürliche Zahl zuzuweisen. Weiterhin kann man natürlich die Elemente von G auch wieder mit Zahlen identifizieren, also etwa:

'(' $\mapsto$ 1; ')' $\mapsto$ 2

'$\perp$' $\mapsto$ 3; '$\rightarrow$' $\mapsto$ 4;

'p_i' $\mapsto i+5$.

Damit bleibt nur noch das Problem, endliche Folgen von positiven ganzen Zahlen eindeutig durch Zahlen zu repräsentieren. Das geht so:

der Folge

$(k_1,\ldots,k_n)$

wird das Produkt

$2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \ldots \cdot q_{n-1}{}^{k_{n-1}} \cdot q_n{}^{k_n}$

zugewiesen. Dabei ist q_i die i-te Primzahl. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorierung läßt sich aus diesem Produkt die ursprüngliche Folge eindeutig 'ablesen'.

Prädikatenlogik ohne Identität

Eine (identitätsfreie prädikatenlogische) *Sprache* L ist ein Paar (Rel_L,Con_L), so daß gilt:

(1) Rel_L ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, deren Werte abzählbare (möglicherweise z.T. leere) Mengen von Symbolen sind. [Wir schreiben 'Rel^n_L' für '$\mathrm{Rel}_L(n)$ und bezeichnen die Elemente als *n-stellige Prädikate von* L.]

(2) Con_L ist eine abzählbare Menge von Symbolen.

(3) Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist jeweils: $\mathrm{Rel}^n_L \cap \mathrm{Rel}^m_L = \varnothing$; $\mathrm{Rel}^n_L \cap \mathrm{Con}_L = \varnothing$; $\mathrm{Rel}^n_L \cap$ {'$\bot$', '$\to$','$\exists$', '(', ')'} = $\varnothing$; $\mathrm{Con}_L \cap$ {'$\bot$', '$\to$','$\exists$', '(', ')'} = $\varnothing$; $\mathrm{Rel}^n_L \cap \mathrm{Var} = \varnothing$; $\mathrm{Con}_L \cap \mathrm{Var} = \varnothing$. [Diese *Disjunktheitsbedingungen* verhindern unerwünschte Mehrdeutigkeiten; Var ist die abzählbar unendliche Menge $\{x_1, x_2,\ldots\}$ der *(Individuen-)Variablen*.]

(4) für mindestens ein $n\in\mathbb{N}$ ist $\mathrm{Pred}^n_L \neq \varnothing$ [damit es überhaupt Formeln gibt!].

Terme einer Sprache L: $\mathrm{Tm}_L = \mathrm{Var} \cup \mathrm{Con}_L$.

Primformeln von L: Zeichenreihen der Gestalt: $R(t_1,\ldots,t_n)$, wobei $t_1,\ldots,t_n\in \mathrm{Tm}_L$ und $R\in \mathrm{Rel}^n_L$.

Formeln von L, Fml_L: '$\bot$', Primformeln sowie '$(\varphi\to\psi)$' und '$((\exists x)\ \varphi)$', wenn $\varphi\in \mathrm{Fml}_L$, $\psi\in \mathrm{Fml}_L$ und $x\in \mathrm{Var}$.

Freie Variablen: $\mathrm{Fr}(\bot) = \varnothing$; $\mathrm{Fr}(R(t_1,\ldots,t_n)) = \{t_1,\ldots,t_n\} \cap \mathrm{Var}$; $\mathrm{Fr}(\varphi\to\psi) = \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$; $\mathrm{Fr}((\exists x)\ \varphi) = \mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{x\}$. $\varphi\in \mathrm{Fml}_L$ ist *geschlossen*, falls $\mathrm{Fr}(\varphi) = \varnothing$, *offen* sonst.

Es sei U eine nicht-leere (!) Menge. Eine L-*Interpretation* F (*zu* U) ist eine Funktion, die jedem Grundsymbol von L eine entsprechende *Extension* zuweist, d.h.: $F(R) \subseteq U^n$, falls $R\in \mathrm{Rel}^n_L$, und $F(c)\in U$, falls $c\in \mathrm{Con}_L$. Eine (Variablen-) *Belegung* g (*zu* U) ist eine Funktion, die jeder Variablen ein Individuum zuweist, d.h.: $g: \mathrm{Var} \to U$.

Ein L-*Modell (auf* U*)* ist ein Tripel der Gestalt (U, F, g), wobei U eine nicht-leere Menge, F eine L-Interpretation zu U und g eine Belegung zu U ist. Wenn M = (U, F, g) ein L-Modell ist und $t\in \mathrm{Tm}_L$, wird die *Extension* von t (*in* M) fallweise definiert:

$$[\![t]\!]^{U,F,g} = \begin{cases} F(t), \text{ falls } t\in \mathrm{Con}_L. \\ g(t), \text{ falls } t\in \mathrm{Var}. \end{cases}$$

Analog ist $[\![R]\!]^{U,F,g} = F(R)$, wenn R ein Prädikat ist. (Man beachte, daß die Nennung des Universums bei Term- und Prädikatsextensionen eigentlich überflüssig ist.) Der *Wahrheitswert* $[\![\varphi]\!]^{U,F,g}$ einer Formel $\varphi\in \mathrm{Fml}_L$ *in* dem Modell M = (U,F,g) bestimmt sich induktiv über φ's Aufbau:

$$[\![\bot]\!]^{U,\mathrm{F,g}} = 0\ ;$$

$$[\![\mathrm{R}(\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_n)]\!]^{U,\mathrm{F,g}} = \begin{cases} 1, \text{ falls } \left([\![\mathrm{t}_1]\!]^{U,\mathrm{F,g}},\ldots,[\![\mathrm{t}_n]\!]^{U,\mathrm{F,g}}\right) \in \mathrm{F(R)}; \\ 0, \text{ falls } \left([\![\mathrm{t}_1]\!]^{U,\mathrm{F,g}},\ldots,[\![\mathrm{t}_n]\!]^{U,\mathrm{F,g}}\right) \notin \mathrm{F(R)}; \end{cases}$$

$$[\![(\varphi\to\psi)]\!]^{U,\mathrm{F,g}} = \begin{cases} 0, \text{ falls } [\![\varphi]\!]^{U,\mathrm{F,g}} = 1, \text{ aber } [\![\psi]\!]^{U,\mathrm{F,g}} = 0; \\ 1 \text{ sonst}; \end{cases}$$

$$[\![((\exists \mathrm{x})\ \varphi)]\!]^{U,\mathrm{F,g}} = \begin{cases} 1, \text{ falls } \{\mathrm{u} \in U \mid [\![\varphi]\!]^{U,\mathrm{F,g}[^{\mathrm{x}}\!/_{\mathrm{u}}]} = 1\} \neq \varnothing. \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

(Dabei ist jeweils $\mathrm{g}[^{\mathrm{x}}\!/_{\mathrm{u}}]$ die *an der Stelle* x *durch* u *modifizierte Belegung*, d.h. $(\mathrm{g}\setminus\{(\mathrm{x},\mathrm{g}(\mathrm{x}))\}) \cup \{(\mathrm{x},\mathrm{u})\}$. Insbesondere ist also stets: $\mathrm{g}[^{\mathrm{x}}\!/_{\mathrm{u}}][^{\mathrm{x}}\!/_{\mathrm{v}}] = \mathrm{g}[^{\mathrm{x}}\!/_{\mathrm{v}}]$, sowie: $\mathrm{g}[^{\mathrm{x}}\!/_{\mathrm{u}}][^{\mathrm{y}}\!/_{\mathrm{v}}] = \mathrm{g}[^{\mathrm{y}}\!/_{\mathrm{v}}][^{\mathrm{x}}\!/_{\mathrm{u}}]$, sobald $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$.)

Weitere Junktoren werden wieder als *Abkürzungen* definiert. Außerdem steht "$(\forall \mathrm{x})\ \varphi$" für "$\neg\ (\exists \mathrm{x})\ \neg\ \varphi$ " (Allquantor). Diese Festlegung ist in dem Sinne korrekt, als $[\![(\forall \mathrm{x})\ \varphi]\!]^{U,\mathrm{F,g}} = 1$ gdw. $\{\mathrm{u} \in U \mid [\![\varphi]\!]^{U,\mathrm{F,g}[^{\mathrm{x}}\!/_{\mathrm{u}}]} = 1\} = U$, d.h. gdw. *für alle* $\mathrm{u}\in U$ gilt: $[\![\varphi]\!]^{U,\mathrm{F,g}[^{\mathrm{x}}\!/_{\mathrm{u}}]} = 1$.

Die *Parameter* einer Formel sind die in ihr vorkommenden Prädikate, Konstanten und *freien* Variablen: $\mathrm{Par}(\bot) = \varnothing$; $\mathrm{Par}(\mathrm{R}(\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_n)) = \{\mathrm{R},\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_n\}$; $\mathrm{Par}(\varphi\to\psi) = \mathrm{Par}(\varphi) \cup \mathrm{Par}(\psi)$; $\mathrm{Par}((\exists \mathrm{x})\ \varphi) = \mathrm{Par}(\varphi) \setminus \{\mathrm{x}\}$.

<u>Bemerkung:</u> $\mathrm{Fr}(\varphi) = \mathrm{Par}(\varphi) \cap \mathrm{Var}$.

<u>Koinzidenzlemma</u>

Es sei L eine prädikatenlogische Sprache, U eine nicht-leere Menge, $\varphi\in \mathrm{Fml}_{\mathrm{L}}$, und $M_1 = (U,\mathrm{F}_1,\mathrm{g}_1)$ und $M_2 = (U,\mathrm{F}_2,\mathrm{g}_2)$ seien L-Modelle zu (demselben!) U. Dann gilt:

Wenn M_1 und M_2 auf allen Parametern von φ übereinstimmen – d.h.: $[\![\pi]\!]^{M_1} = [\![\pi]\!]^{M_2}$ für alle $\pi\in \mathrm{Par}(\varphi)$ – dann stimmen sie auch im Wahrheitswert von φ überein:

$$[\![\varphi]\!]^{(U,\mathrm{F}_1,\mathrm{g}_1)} = [\![\varphi]\!]^{(U,\mathrm{F}_2,\mathrm{g}_2)}.$$

Beweis per Induktion über φs Aufbau:

<u>I.A.</u>: Für $\varphi = \bot$ ist die Behauptung trivial; wenn $\varphi = \mathrm{R}(\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_n)$, ist n.V. $[\![\mathrm{t}_i]\!]^{(U,\mathrm{F}_1,\mathrm{g}_1)} = [\![\mathrm{t}_i]\!]^{(U,\mathrm{F}_2,\mathrm{g}_2)}$ (für $1\leq i\leq n$) und $\mathrm{F}_1(\mathrm{R}) = \mathrm{F}_2(\mathrm{R})$ und damit auch $[\![\mathrm{R}(\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_n)]\!]^{U,\mathrm{F}_1,\mathrm{g}_1} = [\![\mathrm{R}(\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_n)]\!]^{U,\mathrm{F}_2,\mathrm{g}_2}$.

<u>I.S.</u>: *1. Fall*: $\varphi = (\psi\to\chi)$, und (I.V.) das Lemma ist für ψ und χ bewiesen. Es seien

also M_1 und M_2 wie angegeben; insbesondere stimmen dann M_1 und M_2 auf allen Parametern von ψ und χ überein. Mit der I.V. ist dann $[\![\psi]\!]^{(U,F_1,g_1)} = [\![\psi]\!]^{(U,F_2,g_2)}$, und $[\![\chi]\!]^{(U,F_1,g_1)} = [\![\chi]\!]^{(U,F_2,g_2)}$, also auch: $[\![\varphi]\!]^{(U,F_1,g_1)} = [\![\varphi]\!]^{(U,F_2,g_2)}$.

2. Fall: $\varphi = ((\exists x)\ \psi)$, und (I.V.) das Lemma ist für ψ bewiesen. Angenommen also, M_1 und M_2 stimmen auf allen Parametern von φ überein, d.h. nach der Definition von Par$((\exists x)\ \psi)$: $[\![\pi]\!]^{(U,F_1,g_1)} = [\![\pi]\!]^{(U,F_2,g_2)}$, für alle $\pi \in$ Par(ψ) mit $\pi \neq x$. Aber dann ist auch für *alle* $\pi \in$ Par(ψ) und $u \in U$: $[\![\pi]\!]^{(U,F_1,g_1[x/u])} = [\![\pi]\!]^{(U,F_2,g_2[x/u])}$, denn im Falle $x = \pi$ haben wir ja $[\![\pi]\!]^{(U,F_1,g_1[x/u])} = g_1[x/u]\ (x) = u = g_2[x/u]\ (x) = [\![\pi]\!]^{(U,F_2,g_2[x/u])}$ (und sonst ist sowieso $[\![\pi]\!]^{(U,F_1,g_1[x/u])} = [\![\pi]\!]^{(U,F_1,g_1)} = [\![\pi]\!]^{(U,F_2,g_2)} = [\![\pi]\!]^{(U,F_2,g_2[x/u])}$). Nach der I.V. ist dann stets: $[\![\psi]\!]^{U,F_1,g_1[x/u]} = [\![\psi]\!]^{U,F_2,g_2[x/u]}$, also auch: $\{u \in U \mid [\![\psi]\!]^{U,F_1,g_1[x/u]} = 1\} = \{u \in U \mid [\![\psi]\!]^{U,F_2,g_2[x/u]} = 1\}$ und so: $[\![(\exists x)\ \psi]\!]^{U,F_1,g_1} = [\![(\exists x)\ \psi]\!]^{U,F_2,g_2}$. QED.

Neben dem Koinzidenzlemma gibt es ein weiteres grundlegendes semantisches Prinzip, das *Substitutionslemma,* für das wir noch zwei Definitionen benötigen:

Es seien $t, t' \in Tm_L$ und $\varphi \in Fml_L$. Das Ergebnis der *Substitution von* (freiem) t *in* φ *durch* t' wird dann notiert als '$\varphi\ [t/t']$' und wie folgt induktiv definiert:

$\bot\ [t/t'] = \bot$;

$R(t_1,\ldots,t_n)\ [t/t'] = R(t_1{}^*,\ldots,t_n{}^*)$, wobei gilt: $t_i{}^* = t'$, sobald $t_i = t$ (der zu Ersetzende) und $t_i{}^* = t_i$ sonst;

$(\varphi \rightarrow \psi)\ [t/t'] = (\varphi\ [t/t'] \rightarrow \psi\ [t/t'])$;

$((\exists x)\ \varphi)\ [t/t'] = ((\exists x)\ \varphi\ [t/t'])$, wenn $t \neq x$;

$((\exists x)\ \varphi)\ [t/t'] = ((\exists x)\ \varphi)$.

Bemerkung: Wenn $t \notin$ Par(φ), dann ist: $\varphi\ [t/t'] = \varphi$.

Wenn $t' \notin$ Par(φ) und t frei ist für t', dann ist: $\varphi\ [t/t']\ [t'/t] = \varphi$.

Beispiele:

1. $(R(x,y) \rightarrow (\exists z)\ R(y,z))\ [x/y] = (R(y,y) \rightarrow (\exists z)\ R(y,z))$

2. $(R(x,y) \rightarrow (\exists z)\ R(y,z))\ [y/\ ] = (R(x,z) \rightarrow (\exists z)\ R(z,z))$

Beispiel 2. zeigt, daß sich der Wahrheitswert einer Formel durch Substitution ändern kann, selbst wenn die beteiligten Terme extensionsgleich sind: wenn etwa $M = (\mathbb{N},F,g)$, $F(R) = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n<m\}$, $g(x) = 0$ und $g(y) = g(z) = 1$, dann ist $(R(x,z) \rightarrow (\exists z)\ R(z,z))$ falsch in M, aber $(R(x,y) \rightarrow (\exists z)\ R(y,z))$ ist in jedem Modell wahr. Der Grund für diesen Bedeutungsunterschied trotz extensionsgleicher Terme ist natürlich, daß bei der Einsetzung die Variable z plötzlich gebunden wird und somit ihre Extension (nach dem Koinzidenzlemma) gar nicht mehr von der Belegung abhängt. Um diese Art von Substitution auszuschließen, definiert man induktiv den Begriff der *(Substitutions-)Freiheit*:

Sei $x\in Var$ und $t\in Tm_L$ (für irgendeine Sprache L). Dann gilt:

x ist *frei für* (Einsetzungen von) t *in* $\bot$ und allen Primformeln $R(t_1,\ldots,t_n)$;

x ist *frei für* t *in* $(\varphi\to\psi)$ gdw. x frei ist für t in φ und x frei ist für t in ψ;

x ist *frei für* t *in* $((\exists y)\ \varphi)$ gdw. (a) x frei ist für t in φ und $t\neq y$, oder (b) $x\notin Fr((\exists y)\ \varphi)$.

Klausel (b) garantiert z.B., daß die Variable x in $(P(x) \to (\exists x)\ \underline{(\exists y)\ R(x,y)})$ frei für y ist, obwohl dies nicht für die unterstichene Teilformel gilt.

Ein Term $t\in Tm_L$ heißt *neu für* eine Formel $\varphi\in Fml_L$, wenn t in φ <u>nirgends</u> vorkommt: t ist immer neu für $\bot$; t ist neu für $R(t_1,\ldots,t_n)$ gdw. $t\notin\{t_1,\ldots,t_n\}$; t ist neu für $(\varphi\to\psi)$ gdw. t neu ist für φ und t neu ist für ψ; t ist neu in $(\exists x)\ \psi$ gdw. t neu ist für ψ und $t\neq x$.

<u>Bemerkungen</u>

Die Menge der für eine Formel neuen Variablen ist stets unendlich (– weil ihr Komplement endlich ist).

$c\in Con_L$ ist neu für $\varphi\in Fml_L$ gdw. $c\notin Par(\varphi)$.

In jeder Formel $\varphi\in Fml_L$ ist jedes $y\in Var$ frei für jedes x, das neu ist für φ.

Wenn t neu ist für φ, ist $\varphi\left[{}^{x}\!/_{t}\right]\left[{}^{t}\!/_{t'}\right] = \varphi\left[{}^{x}\!/_{t'}\right]$, und $\varphi\left[{}^{x}\!/_{t}\right]\left[{}^{t}\!/_{x}\right] = \varphi\left[{}^{x}\!/_{x}\right] = \varphi$.

Wenn y neu ist für $\varphi\left[{}^{x}\!/_{t}\right]$, dann ist x frei für y in $\varphi\left[{}^{x}\!/_{y}\right]$.

Wenn $t'\neq y\neq t$, dann ist $\varphi\left[{}^{x}\!/_{t}\right]\left[{}^{y}\!/_{t'}\right] = \varphi\left[{}^{y}\!/_{t'}\right]\left[{}^{x}\!/_{t}\right]$.

<u>Substitutionslemma</u>

Es sei L eine prädikatenlogische Sprache, $x\in Var$, $t\in Tm_L$, $\varphi\in Fml_L$ und x frei für t in φ. Dann gilt für jedes L-Modell (U,F,g):

$$\left[\!\left[\varphi\left[{}^{x}\!/_{t}\right]\right]\!\right]^{U,F,g} = [\![\varphi]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right]}.$$

<u>Beweis</u> (induktiv über φs Aufbau):

<u>I.A.</u>: Für $\varphi = \bot$ ist die Behauptung trivial. Sei nun $\varphi = R(t_1,\ldots,t_n)$. Dann gilt:

$$\left[\!\left[R(t_1,\ldots,t_n)\left[{}^{x}\!/_{t}\right]\right]\!\right]^{U,F,g} = 1$$

gdw. $[\![R(t_1^*,\ldots,t_n^*)]\!]^{U,F,g} = 1$ (t_i^* wie in der Def. von $\left[{}^{x}\!/_{t}\right]$)

gdw. $([\![t_1^*]\!]^{U,F,g},\ldots,[\![t_n^*]\!]^{U,F,g}) \in F(R)$.

Aber für $t_i = x$, gilt: $[\![t_i^*]\!]^{U,F,g} = [\![t]\!]^{U,F,g} = g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right](x) = [\![x]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right]} = [\![t_i]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right]}$; und wenn $t_i\neq x$, ist sowieso $[\![t_i^*]\!]^{U,F,g} = [\![t_i^*]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right]} = [\![t_i]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right]}$. Also ist:

$$([\![t_1^*]\!]^{U,F,g},\ldots,[\![t_n^*]\!]^{U,F,g}) = ([\![t_1]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right]},\ldots,[\![t_n]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right]}).$$

Aber $([\![t_1]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right]},\ldots,[\![t_n]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right]}) \in F(R)$ gdw. $[\![R(t_1,\ldots,t_n)]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}\right]} = 1$.

I.S.: Wir setzen das Substitutionslemma für Formeln ψ und χ voraus und zeigen es für $\varphi = (\psi\rightarrow\chi)$ und $\varphi = (\exists y)\,\psi$.

$\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$: Wenn x frei ist für t in $(\varphi\rightarrow\psi)$, dann auch in φ und in ψ. Also kann man die I.V. anwenden, und wir haben:

$$[\![\psi[{}^{x}\!/_{t}]]\!]^{U,F,g} = [\![\psi]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}]} \quad \text{, und:} \quad [\![\chi[{}^{x}\!/_{t}]]\!]^{U,F,g} = [\![\chi]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}]} \quad .$$

Aber dann ist auch:

$$[\![(\psi\rightarrow\chi)[{}^{x}\!/_{t}]]\!]^{U,F,g} = [\![(\psi[{}^{x}\!/_{t}] \rightarrow \chi[{}^{x}\!/_{t}])]\!]^{U,F,g} = 1 - [\![\psi[{}^{x}\!/_{t}]]\!]^{U,F,g} + [\![\psi[{}^{x}\!/_{t}]]\!]^{U,F,g}\,[\![\chi[{}^{x}\!/_{t}]]\!]^{U,F,g} =$$

$$1 - [\![\psi]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}]} + [\![\psi]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}]}\,[\![\chi]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}]} = [\![(\psi \rightarrow \chi)]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}]} \quad .$$

$\varphi = ((\exists y)\,\psi)$: Da x frei ist für t in $((\exists y)\,\psi)$, ist entweder (a) x frei für t in ψ und $t\neq y$, oder (b) $x\notin \mathrm{Fr}(\varphi)$. Im Fall (b) ist nach dem Koinzidenzlemma: $[\![\varphi]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}]} = [\![\varphi]\!]^{U,F,g}$; aber $[\![\varphi]\!]^{U,F,g} = [\![\varphi[{}^{x}\!/_{t}]]\!]^{U,F,g}$, denn $\varphi[{}^{x}\!/_{t}] = \varphi$. Wenn aber (a) vorliegt und $x\in \mathrm{Fr}((\exists y)\,\psi)$, ist insbesondere $x\neq y$ und somit $((\exists y)\,\psi)[{}^{x}\!/_{t}] = ((\exists y)\,\psi[{}^{x}\!/_{t}])$. Da x frei ist für t in ψ findet die I.V. wieder Anwendung, d.h. für alle Belegungen h gilt: (#) $[\![\psi[{}^{x}\!/_{t}]]\!]^{U,F,h} = [\![\psi]\!]^{U,F,h[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,h}}]}$. Aber dann ist auch:

$$[\![((\exists y)\,\psi[{}^{x}\!/_{t}])]\!]^{U,F,g} = 1 \text{ gdw.}$$

$$\{u \in U \mid [\![\psi[{}^{x}\!/_{t}]]\!]^{U,F,g[{}^{y}\!/_{u}]} = 1\} \neq \varnothing \text{ gdw.}$$

$$\{u \in U \mid [\![\psi]\!]^{U,F,g[{}^{y}\!/_{u}][{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g[{}^{y}\!/_{u}]}}]} = 1\} \neq \varnothing \text{ gdw.} \qquad \text{(wg. (\#))}$$

$$\{u \in U \mid [\![\psi]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g[{}^{y}\!/_{u}]}}][{}^{y}\!/_{u}]} = 1\} \neq \varnothing \text{ gdw.} \qquad \text{(weil } x \neq y)$$

$$\{u \in U \mid [\![\psi]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}][{}^{y}\!/_{u}]} = 1\} \neq \varnothing,$$

denn wg. (a) ist $y\neq t$ und damit (für beliebige $u\in U$) $[\![t]\!]^{U,F,g[{}^{y}\!/_{u}]} = [\![t]\!]^{U,F,g}$. Also ist $[\![((\exists y)\,\psi[{}^{x}\!/_{t}])]\!]^{U,F,g} = [\![((\exists y)\,\psi)]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![t]\!]^{U,F,g}}]}$. QED.

Prinzip der gebundenen Umbenennung

Wenn x frei ist für y in $\varphi\in \mathrm{Fml}_L$ und $y\notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, dann gilt für alle L-Modelle M:

$$[\![(\exists x)\,\varphi]\!]^{M} = [\![((\exists y)\,\varphi\,[{}^{x}\!/_{y}])]\!]^{M} \quad .$$

Beweis: Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $x \neq y$; sonst ist die Aussage trivial. Es gilt dann:

$$[\![(\exists x)\,\varphi]\!]^{U,F,g} = 1 \text{ gdw.}$$

$$\{u \in U \mid [\![\varphi]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{u}]} = 1\} \neq \varnothing \text{ gdw.}$$

$$\{u \in U \mid [\![\varphi]\!]^{U,F,g[{}^{x}\!/_{[\![y]\!]^{U,F,g[{}^{y}\!/_{u}]}}]} = 1\} \neq \varnothing \text{ gdw.} \qquad ([\![y]\!]^{U,F,g[{}^{y}\!/_{u}]} = g[{}^{x}\!/_{u}](y) = u)$$

$\{u \in U \mid [\![\varphi]\!]^{U,F,g\left[{}^{x}/_{[\![y]\!]^{U,F,g[y/u]}}\right][y/u]} = 1\} \neq \emptyset$ gdw. (Koinzidenzlemma: $y \notin Fr(\varphi)$)

$\{u \in U \mid [\![\varphi]\!]^{U,F,g[y/u]\left[{}^{x}/_{[\![y]\!]^{U,F,g[y/u]}}\right]} = 1\} \neq \emptyset$ gdw. ($x \neq y$)

$\{u \in U \mid [\![\varphi[x/y]]\!]^{U,F,g[y/u]} = 1\} \neq \emptyset$ gdw. (Substitutionslemma: x ist frei für y in φ)

$[\![((\exists y)\, \varphi[x/y])]\!]^{U,F,g} = 1$.

Die allgemeinen semantischen Begriffe werden wie in der Aussagenlogik definiert: Eine geschlossene Formel $\varphi \in Fml_L$ einer prädikatenlogischen Sprache L *folgt aus* einer Menge $\Sigma \subseteq Fml_L$ von geschlossenen L-Formeln (Notation: "$\Sigma \models \varphi$"), wenn für alle L-Modelle M gilt: $[\![\varphi]\!]^M = 1$, falls $[\![\psi]\!]^M = 1$ für alle $\psi \in \Sigma$; φ heißt *gültig* (Notation: "$\models \varphi$"), wenn gilt: $\emptyset \models \varphi$, wenn also für alle L-Modelle M gilt: $[\![\varphi]\!]^M = 1$. Die (nicht notwendigerweise geschlossenen) Formeln φ und ψ sind logisch äquivalent (Notation: '$\varphi \equiv_L \psi$') gdw. für alle L-Modelle M gilt: $[\![\varphi]\!]^M = [\![\psi]\!]^M$.

Bemerkung: $\equiv_L$ ist eine Äquivalenzrelation auf Fml_L; $\varphi \equiv_L \psi$ gdw. $[\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!]^M = 1$, für alle L-Modelle M.

Bei Ersetzung einer Formel durch eine logisch äquivalente entsteht wieder eine logisch äquivalente Formel; der Ersetzungsbegriff läßt sich dabei sehr weit fassen:

Definition des Begriffs 'ψ geht aus φ durch Ersetzung von χ durch χ' hervor' (Notation: '$\varphi \xrightarrow[\chi']{\chi} \psi$') durch Induktion über φs Aufbau:

wenn $\varphi = \bot$ oder $\varphi = R(t_1,\ldots,t_n)$, dann gilt $\varphi \xrightarrow[\chi']{\chi} \psi$, falls entweder: $\varphi = \psi$ oder $\varphi = \chi$ und $\psi = \chi'$;

wenn $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, dann gilt $\varphi \xrightarrow[\chi']{\chi} \psi$, falls entweder: $\varphi_1 \xrightarrow[\chi']{\chi} \psi_1$, $\varphi_2 \xrightarrow[\chi']{\chi} \psi_2$ und $\psi = (\psi_1 \to \psi_2)$, oder: $\varphi = \chi$ und $\psi = \chi'$;

wenn $\varphi = ((\exists x)\, \varphi_1)$, dann gilt $\varphi \xrightarrow[\chi']{\chi} \psi$, falls entweder: $\varphi_1 \xrightarrow[\chi']{\chi} \psi_1$ und $\psi = ((\exists x)\, \psi_1)$, oder: $\varphi = \chi$ und $\psi = \chi'$.

Bemerkung: wenn $\chi \equiv_L \chi'$ und $\varphi \xrightarrow[\chi']{\chi} \psi$, dann gilt: $\varphi \equiv_L \psi$.

Hier sind ein paar interessante logische Äquivalenzen:

(a) $(\exists x)\,(\exists y)\,\varphi \equiv_L (\exists y)\,(\exists x)\,\varphi$

(a') $(\forall x)\,(\forall y)\,\varphi \equiv_L (\forall y)\,(\forall x)\,\varphi$

(b) $(\exists x)\,(\varphi\ \&\ \psi) \equiv_L (\varphi\ \&\ (\exists x)\,\psi)$, falls $x \notin Fr(\varphi)$

(b') $(\forall x)\,(\varphi \to \psi) \equiv_L (\varphi \to (\forall x)\,\psi)$, falls $x \notin Fr(\varphi)$

(c) $(\exists x)\,(\varphi\ \&\ (\exists y)\,(\psi\ \&\ \chi)) \equiv_L (\exists y)\,(\psi\ \&\ (\exists x)\,(\varphi\ \&\ \chi))$, falls $x \notin Fr(\psi)$ und $y \notin Fr(\varphi)$

(c') $(\forall x)\,(\varphi \to (\forall y)\,(\psi \to \chi)) \equiv_L (\forall y)\,(\psi \to (\forall x)\,(\varphi \to \chi))$, falls $x \notin Fr(\psi)$ und $y \notin Fr(\varphi)$.

<u>Vollständigkeitssatz für die identitätsfreie Prädikatenlogik</u>

Es sei L eine prädikatenlogische Sprache, $\varphi \in Fml_L$, $\Sigma \subseteq Fml_L$, wobei $Fr(\psi) = \emptyset$ für alle $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$. Dann gilt:

$$\Sigma \models \varphi \text{ gdw. } \Sigma \vdash \varphi.$$

Beim Beweis werden wir uns möglichst eng an die Aussagenlogik anlehnen. Aber eine direkte Adaption der obigen Vorgehensweise ist nicht so einfach.
Zunächst einmal ist nicht klar, wie man das *Modellexistenzlemma* für die (identitätsfreie) Prädikatenlogik beweisen soll; denn ein Maximalisierungsprozeß an sich liefert noch kein prädikatenlogisches Modell: selbst wenn wir wissen, welche der (geschlossenen) prädikatenlogischen Primformeln wahr sein sollen und welche nicht, haben wir damit noch keine Interpretation der sie ausmachenden Prädikate und Konstanten. Doch hier hilft ein einfacher Trick weiter: wir können nämlich als Universum unseres Modells die Menge aller in der Maximalisierung Σ^* vorkommenden Konstanten nehmen und dann die Prädikate R durch die Menge der n-Tupel $(c_1,\ldots,c_n)$ von Konstanten deuten, für die gilt: '$R(c_1,\ldots,c_n)$' $\in \Sigma^*$. In diesem *Termmodell* sind geschlossene Primformeln offensichtlich genau dann wahr, wenn sie in Σ^* auftauchen. Wegen der Widerspruchsfreiheit von Σ^* gilt für das Falsum '$\perp$' dassselbe; und per Induktion können wir das dann auch – genau wie in der Aussagenlogik – für Formeln der Gestalt $(\varphi \rightarrow \psi)$ zeigen. Aber bei quantifizierten Formeln '$(\exists x)\ \varphi$' kommen wir in Schwierigkeiten. Wenn nämlich eine solche Existenzformel in Σ^* steckt, gibt es zunächst keine Garantie, daß sie im Termmodell wahr ist. Das macht man sich an einem einfachen Beispiel klar. Sei etwa $\Sigma = \{\neg P(c) \in Fml_L \mid c \in Con_L\} \cup \{(\exists x)\ P(x)\}$. Σ besitzt offensichtlich ein Modell (egal wie Con_L aussieht), und in einem korrekten Kalkül darf damit aus Σ kein Widerspruch ableitbar sein. (Sonst hätten wir ja: $\Sigma \vdash \perp$, obwohl $\Sigma \not\models \perp$.) Aber im Termmodell wäre Σ nicht wahr; denn die Extension von P wäre leer (weil ja *jeder* Gegenstand des Universums Con_L *nicht* in ihr liegt), womit $(\exists x)\ P(x)$ falsch würde. Das Problem liegt offenbar darin, daß einerseits alle Konstanten nicht ausreichen dürfen, um eine Existenzbehauptung zum Widerspruch zu führen, daß andererseits im Termmodell per definitionem die Wahrheit von Existenzsätzen mit der Erfüllbarkeit durch eine entsprechende Konstante zusammenfällt. Es wird gelöst, indem man zur Konstruktion des Termmodells mehr Konstanten benutzt, als die Sprache L ursprünglich bereitstellt: im vorliegenden Fall muß also die Konstruktion garantieren, daß für mindestens eine Konstante $d \notin Con_L$ die Formel '$P(d)$' in Σ^* auftaucht. Der Schritt von Σ nach Σ^* muß damit mehr leisten als nur die aus der Aussagenlogik bekannte Maximalisierung. Die entsprechenden Details kommen später.

Nicht nur das Modellexistenzlemma läßt sich nicht so direkt von der Aussagen- auf die Prädikatenlogik übertragen, auch das *Deduktionstheorem* macht Ärger. Der Grund liegt darin, daß wir im prädikatenlogischen Kalkül universell quantifizierte Aussagen exemplarisch beweisen werden – so wie wir es auch in gewöhnlichen Beweisen (außerhalb des Hilbertkalküls) tun. Betrachten wir dazu ein Beispiel, das bereits Aufschluß über die genauere Gestalt des Kalküls geben wird. Angenommen wir wollen die (gültige) prädikatenlogische Formel

(?) $\qquad (\forall x)\ (\ P(x) \rightarrow \neg\ (\forall y) \neg\ P(y)\ )$

herleiten. Wenn etwa 'P' für *Person* steht, besagt (?) so viel wie:

(!) $\qquad$ Für jede Person gilt: (') es ist nicht der Fall, daß jedes Individuum keine Person ist.

Die (etwas seltsame, aber zutreffende) Aussage (!) bzw. (?) kann man informell (d.h. außerhalb eines Kalküls) so beweisen: Sei x ein beliebiges P. Angenommen, (') wäre falsch. Dann wäre jedes Individuum kein P. Also wäre insbesondere x kein P. Aber x war ein

(beliebig gewähltes) P. Damit haben wir einen Widerspruch.
Prädikatenlogisch gesprochen haben wir in diesem informellen Beweis von P(x) und der Annahme $\neg\neg(\forall y)\neg P(y)$ über $(\forall y)\neg P(y)$ auf $\neg P(x)$ geschlossen. Im Kalkül läßt sich dieser schlichte Gedankengang so nachvollziehen:

1. $(\neg\neg((\forall y)\neg(Py)) \to ((\forall y)\neg P(y)))$
2. $(((\forall y)\neg P(y)) \to \neg Px))$
3. $(\neg\neg((\forall y)\neg(Py)) \to \neg P(x))$
4. $(P(x) \to \neg((\forall y)\neg(Py)))$

Die erste Zeile dieses Beweises (besser: der Beweisskizze) ist von der Form $(\neg\neg\varphi \to \varphi)$ und damit eine prädikatenlogische *Instanz* des aussagenlogischen Axioms (A3). Der prädikatenlogische Kalkül wird alle prädikatenlogischen Instanzen aussagenlogischer Tautologien enthalten sowie die Regel Modus Ponens, so daß sich jedes aussagenlogische Argument nachvollziehen läßt. – Die zweite Zeile des Beweises ist eine prädikatenlogisch gültige Formel und insofern ein guter Kandidat für ein Axiom. Um die dritte Zeile zu rechtfertigen, genügt ein aussagenlogisches Argument – über das tautologische Schema $((\varphi\to\psi) \to ((\psi \to\chi)\to(\varphi\to\chi)))$ – das sich, wie gesagt, im prädikatenlogischen Kalkül nachvollziehen läßt. Die vierte Zeile enthält man auf ähnliche Weise (per Kontraposition) aus der vorhergehenden. Doch damit ist der Beweis offenbar noch nicht abgeschlossen. Denn wir wollten ja auf die universell quantifizierte Formel '$(\forall x)(P(x) \to \neg((\forall y)\neg(Py)))$' kommen. Wie aber könnnen wir diese Einführung des Allquantors rechtfertigen? Ein Blick auf den informellen Beweis beantwortet diese Frage. Die Herleitung von Zeile 4. geschah *exemplarisch*, für *beliebige* x, und begründet insofern die entsprechende All-Aussage. Der obige Beweis kann also abgschlossen werden durch die Zeile:

5. $(\forall x)(P(x) \to \neg((\forall y)\neg(Py)))$,

deren Rechtfertigung sich aus einer allgemeinen Regel der *Universellen Generalisierung (UG)* ergibt: wenn φ schon beweisen ist, kann man auch $(\forall x)\varphi$ beweisen. Man beachte, daß es sich bei UG (wie bei MP) um eine *Regel* handelt; das entsprechende *Axiom* $(\varphi\to((\forall x)\varphi))$ würde den Korrektheitstest gar nicht bestehen!
So praktisch UG auch ist, so scheint sie doch mit dem lebenswichtigen Deduktionstheorem unvereinbar zu sein. Denn könnte man allgemein von $\Sigma\cup\{\varphi\} \vdash \psi$ auf $\Sigma \vdash (\varphi\to\psi)$ schließen, wäre der Kalkül nicht korrekt, wie das folgende Beispiel zeigt: Es sei $\Sigma = \{P(x)\}$. Dann gilt: $\Sigma \vdash P(x)$ und wegen UG auch: $\Sigma \vdash (\forall x) P(x)$. Mit dem Deduktionstheorem hätten wir dann: $\emptyset \vdash (P(x) \to (\forall x) P(x))$ und somit: $\vdash (\forall x)(P(x) \to (\forall x) P(x))$. Aber diese Formel ist nicht gültig, wie beinahe jedes Modell bestätigt: sie wird falsch, sobald die Extension von P nicht trivial ist, d.h. weder leer noch allumfassend. Der nächstliegende Ausweg aus diesem Konflikt zwischen UG und DT scheint die Aufgabe von UG zu sein, weil ja das Deduktionstheorem lebenswichtig für den Gesamtbeweis (und auch sonst ganz nützlich) ist. Es gibt aber noch eine andere Möglichkeit, der wir hier nachgehen. Das Beispiel lebt nämlich davon, daß die per DT verschobene Formel φ (= P(x)) offen ist, wie wir noch sehen werden. Da wir aber das DT im Gesamtbeweis nur auf geschlossene Formeln anwenden – die widerspruchsfreie Ausgangsmenge Σ enthält ja keine offenen Formeln – genügt uns die auf geschlossene φ eingeschränkte, mit UG verträgliche Version des Deduktionstheorems.
Bevor wir uns nun Deduktionstheorem und Modellexistenzlemma zuwenden, müssen wir noch den oben angesprochenen Begriff der prädikatenlogischen Instanz einer aussagenlogischen Formel genau definieren. Dafür benötigen wir noch einen Ersetzungsbegriff: eine prädikatenlogische Instanz einer aussagenlogischen Formel A ist das Resultat der Ersetzung aller Primformeln in A durch prädikatenlogische Formeln:

Definition: Es sei h: $P \to Fml_L$ eine Funktion. Dann läßt sich h folgendermaßen induktiv auf jedes $A\in Wff$ verallgemeinern:
$\bot^h = \bot$; $p_i^h = h(p_i)$, für Primformeln p_i; $(A \to B)^h = (A^h \to B^h)$.
Eine prädikatenlogische Formel $\varphi\in Fml_L$ ist eine *Instanz* einer aussagenlogischen Formel $A\in Wff$, wenn es ein h: $P\to Fml_L$ gibt mit: $\varphi = A^h$.

Bemerkungen:
- Wenn $A \in Wff$, h: $P \rightarrow Fml_L$, $x \in Var$ und $t \in Tm_L$, dann ist: $A^{h[x/t]} = A^{h'}$, wobei gilt: h' ist die Funktion von P nach Fml_L, so daß $h'(p_i) = h(p_i)[x/t]$.
- Sei $\varphi \in Fml_L$, $x \in Var$ und $t \in Tm_L$. Dann gilt: wenn φ eine Instanz von $A \in Wff$ ist, dann ist auch $\varphi[x/t]$ eine Instanz von A.
- Jede Instanz einer Tautologie ist in allen Modellen wahr.

Sei L eine identitätsfreie prädikatenlogische Sprache und $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fml_L$. Ein *Beweis* (*der Länge* $n \in \mathbb{N}$) *von* φ *aus* Σ ist eine n-stellige Folge von Tripeln $<(1, \varphi_1, b_1), \ldots, (n, \varphi_n, b_n)>$, so daß für alle i zwischen 0 und $n+1$ gilt:
(1) $\varphi_i \in Fml_L$;
(2) b_i ist eine *Begründung*, und zwar entweder (i) 'Axiom', wobei dann $\varphi_i \in Ax_L$, oder (ii) 'n.V.', wobei $\varphi_i \in \Sigma$, oder (iii) 'MP: j, k', wobei $j, k < i$ und $\varphi_j = (\varphi_k \rightarrow \varphi_i)$, oder: (iv) 'UG: j', wobei $j < i$ und $\varphi_i = (\forall x)\, \varphi_j$.
(3) $\varphi_n = \varphi$.
'$\Sigma \mid\!- \varphi$' heißt wieder: es gibt einen Beweis von φ aus Σ.

Deduktionstheorem

Sei L eine Sprache, $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Fml_L$ und φ geschlossen. Dann gilt:
wenn $\Sigma \cup \{\varphi\} \mid\!- \psi$, dann $\Sigma \mid\!- (\varphi \rightarrow \psi)$.

Beweis

Wir nehmen zunächst an, daß wir die gesamte Aussagenlogik zu unserer Verfügung haben:

- φ, wenn $\varphi \in Fml_L$ eine Instanz einer Tautologie ist (AL)

(Wir hätten auch bloß die Instanzen von (A1) - (A3) als Axiome nehmen können; der Rest geht mit MP, wegen der Vollständigkeit des aussgenlogischen Kalküls!) Der Beweis läuft jetzt wie in der Aussagenlogik (per Induktion über die Beweislänge n), allerdings mit einem vierten Fall im *Induktionsschritt*, der Begründung 'UG: i', wobei $i<n$ und nach I.V. das DT für kürzere Beweise bereits nachgewiesen ist. Wegen der Begründung hat φ die Form $(\forall x)\, \chi$, wobei χ in i Schritten aus $\Sigma \cup \{\varphi\}$ bewiesen werden kann. Insbesondere folgt also mit I.V.: $\Sigma \mid\!- (\varphi \rightarrow \chi)$. Mit UG läßt sich der entsprechende Beweis verlängern, d.h.: $\Sigma \mid\!- (\forall x)\, (\varphi \rightarrow \chi)$. Um nun per MP auf $\Sigma \mid\!- (\varphi \rightarrow (\forall x)\, \chi)$ schließen zu können, bedarf es noch eines Axioms:

- $(\forall x)\, (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\, \chi))$, falls $x \notin Fr(\varphi)$. (P1)

(P1) ist natürlich semantisch korrekt, d.h. in jedem Modell wahr: wenn $x \notin Fr(\varphi)$, ist nach Äquivalenz (b'): $(\forall x)\, (\varphi \rightarrow \chi) \equiv_L (\varphi \rightarrow (\forall x)\, \chi))$, d.h.: $((\forall x)\, (\varphi \rightarrow \chi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\, \chi)))$ ist in jedem L-Modell wahr, also auch (P1). QED.

Wir bewegen uns jetzt in Richtung Modellexistenzlemma. Dabei gilt es zunächst sicherzustellen, daß wir vor der Maximalisierung der Menge Σ (aus dem Vollständigkeitssatz) alle

Existenzaussagen (= geschlossene Formeln der Gestalt (∃x) φ) mit entsprechenden *Beispielen* belegen können. Zu diesem Zwecke werden wir die ursprüngliche Sprache L um eine Unmenge von Konstanten (sog. *Zeugen*) erweitern, und zwar eine Konstante c_φ für jede Existenzaussage (∃x) φ; denn selbst wenn Σ nichts über solche Existenzaussagen aussagt, könnte die in den Vorüberlegungen betrachtete Situation (Existenzaussage + alle negierten Bespiele in Σ) im Laufe der Maximalisierung entstehen, so daß eine genügend große Anzahl von Zeugen nichts schaden kann.
Durch die Hinzunahme von Beispielen für die Existenzaussagen darf natürlich die ursprüngliche Widerspruchsfreiheit von Σ nicht zerstört werden; sonst wäre ja der Maximalisierungsprozeß witzlos. Insbesondere dürfen wir also nicht einfach für *alle* Existenzaussagen Beispiele verlangen: manche dieser Aussagen sind ja widersprüchlich (z.B. (∃x) (P(x) & ¬P(x))), manche widersprechen vielleicht Aussagen in Σ (z.B. wenn Σ = {¬(∃x) P(x)}). Es gibt mehrere Methoden, dies zu erreichen. Eine besteht in der Hinzunahme von *potentiellen Beispielen*, d.h. Formeln der Gestalt:

(B) $\quad (((\exists x)\varphi) \rightarrow \varphi[{}^{x}\!/\!_{c_\varphi}])$

(für alle Existenzaussagen (∃x)φ). Diese potentiellen Beispiele werden *nacheinander* dem ursprünglichen Σ hinzugefügt: Σ, $\Sigma \cup \{\zeta_1\}$, $\Sigma \cup \{\zeta_1,\zeta_2\}$,… wobei die ζ_i die Formeln der Gestalt (B) sind. Zunächst werden wir zeigen, daß diese sukzessive Hinzufügung potentieller Beispiele die Widerspruchsfreiheit nicht zerstören kann, solange über entsprechenden (potentiellen) Zeugen nichts bekannt ist, solange sie also in keiner Formel der Vorgängermenge auftauchen. Daraus wird sich dann die Widerspruchsfreiheit der gesamten Konstruktion ergeben.

Lemma

Es sei $\Sigma \subseteq Fml_L$ eine widerspruchsfreie Menge von geschlossenen Formeln einer prädikatenlogischen Sprache L, $c \in Con_L$ und $\varphi \in Fml_L$, so daß gilt: $c \notin Par(\psi)$, für alle $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$. Dann gilt: $\Sigma \cup \{ ((\exists x)\,\varphi) \rightarrow \varphi[{}^{x}\!/\!_{c}] \}$ ist widerspruchsfrei.

Beweis: Wir argumentieren indirekt und zeigen, daß sich aus der Widersprüchlichkeit von $\Sigma \cup \{ (\exists x)\,\varphi \rightarrow \varphi[{}^{x}\!/\!_{c}] \}$ auf die Widersprüchlichkeit von Σ schließen läßt. Sei also: $\Sigma \cup \{ (\exists x)\,\varphi \rightarrow \varphi[{}^{x}\!/\!_{c}] \} \vdash \bot$. Nach dem Deduktionstheorem gilt dann auch: $\Sigma \vdash ((\exists x)\,\varphi \rightarrow \varphi[{}^{x}\!/\!_{c}]) \rightarrow \bot$, d.h.:

(a) $\Sigma \vdash (\exists x)\,\varphi$, aber (b) $\Sigma \vdash \neg\, \varphi[{}^{x}\!/\!_{c}]$,

denn mit (AL) ist: $\vdash (((\exists x)\,\varphi \rightarrow \varphi[{}^{x}\!/\!_{c}]) \rightarrow \bot) \rightarrow (\exists x)\,\varphi$, sowie: $\vdash (((\exists x)\,\varphi \rightarrow \varphi[{}^{x}\!/\!_{c}]) \rightarrow \bot) \rightarrow \neg\,\varphi[{}^{x}\!/\!_{c}]$. Wir wissen, daß c nirgends in Σ vorkommt, so daß der Beweis von $\neg\,\varphi[{}^{x}\!/\!_{c}]$ aus Σ keine speziellen Annahmen über c benutzen kann. M.a.W.: derselbe Beweis müßte eigentlich auch für jeden anderen Term durchgehen. Aus (b) sollte also folgen:
(?) $\Sigma \vdash \neg\varphi$.
(Hier bleibt also noch was zu zeigen; wir kommen gleich darauf zurück!) Mit (?) wissen wir auch (wg. UG): (!) $\Sigma \vdash (\forall x)\,\neg\varphi$. Aber jetzt geraten wir in Konflikt mit (a), zumindest wenn wir das folgende (korrekte) Axiom annehmen:

- $((\forall x)\,\neg\varphi)) \rightarrow \neg\,((\exists x)\,\varphi))$ (P2)

Mit zweifacher Anwendung von MP folgt ja aus (!), (a) und P2: $\Sigma \vdash \bot$, was zu zeigen war.

NB: Die Bedingung, daß c nicht in φ vorkommt, schließt Fälle wie $\varphi = R(c,x)$ aus: $(\exists x)\,\varphi$ $[= (\exists x)\, R(c,x)]$ und $\neg\ \varphi[^x/_c]$ $[\neg\, R(c,c)]$ folgen z.B. aus der ‘c-freien’ Menge $\Sigma =$ $\{(\forall y)\,(\exists x)\, R(y,x), (\forall y) \neg\, R(y,y)\}$, aber die offene Formel $\neg\varphi$ $[= \neg R(c,x)]$ darf nicht aus Σ herleitbar sein, weil die Generalisierung $(\forall x) \neg\, R(c,x)$ nicht aus Σ folgt.

Bleibt noch die Rechtfertigung von (?):

<u>Hilfshilfssatz:</u> Es sei $\Sigma\cup\{\varphi\}\subseteq Fml_L$ eine widerspruchsfreie Menge von Formeln einer prädikatenlogischen Sprache L und $t\in Tm_L$, so daß für kein $\psi\in\Sigma\cup\{\varphi\}$ gilt: $t\in Par(\psi)$. Dann gilt: wenn $\Sigma \vdash \varphi[^x/_t]$, dann auch $\Sigma \vdash \varphi$.

<u>Beweis:</u> Induktiv über die Beweislänge: Bei Einzeilern kommen nur zwei Möglichkeiten in Frage: <u>(i)</u> $\varphi[^x/_t]$ ist ein Axiom, d.h. (AL), (P1), (P2) oder ein noch einzuführendes. Bei (AL) ist der Fall klar: wenn $\varphi[^x/_t]$ eine Instanz einer aussagenlogischen Tautologie ist, dann auch $\varphi[^x/_t][^t/_x] = \varphi$ (weil $t\notin Par(\varphi)$). (P1) und (P2) sind ebenfalls klar: in beiden Fällen fällt $\varphi[^x/_t]$ nur dann unter das entsprechende Schema, wenn auch φ darunterfällt. Was die noch einzuführenden Axiome angeht, so werden wir uns zu gegebener Zeit davon überzeugen, daß sie keine Probleme machen. <u>(ii)</u> $\varphi[^x/_t] \in\Sigma$. Aber da $t\notin Par(\varphi)$, muß dann $\varphi[^x/_t] = \varphi$ sein.
Im *Induktionsschritt* gehen die Fälle (i) und (ii) wie gehabt. Im Fall <u>(iii)</u> haben wir $\varphi[^x/_t]$ per Modus Ponens mit Hilfe von vorher bewiesenen Formeln ψ und $(\psi \to \varphi[^x/_t])$ hergeleitet. Um die I.V. zum Einsatz zu bringen, beobachten wir zunächst, daß $(\psi \to \varphi[^x/_t]) = (\psi \to \varphi[^x/_t])[^t/_y][^y/_t]$, für beliebige y, die neu sind für $(\psi \to \varphi[^x/_t])$ und alle Formeln von Σ. (Sollte Σ alle $x\in Var$ enthalten, kann man sich auf die Formeln in Σ beschränken, die zur Herleitung von $\varphi[^x/_t]$ benötigt wurden.) Die I.V. besagt dann, daß auch $(\psi \to \varphi[^x/_t])[^t/_y] =$ $(\psi[^t/_y] \to \varphi[^x/_t][^t/_y])$ aus Σ herleitbar ist. Also ist auch: (a) $\Sigma \vdash (\forall y)\ (\psi[^t/_y] \to \varphi[^x/_t][^t/_y])$. Ebenso wissen wir, daß $\psi = \psi[^t/_y][^y/_t]$ (für dasselbe y), d.h.: $\Sigma \vdash \psi[^t/_y]$ (mit I.V.) und daher: (b) $\Sigma \vdash (\forall y)\ \psi[^t/_y]$ (mit UG). Aus (a) und (b) können wir nun auf $\Sigma \vdash (\forall y)\ \varphi[^x/_t][^t/_y]$ schließen, wenn wir das folgende (schematische) Axiom annehmen:

- $(\forall x)\,(\varphi \to \psi) \to ((\forall x)\,\varphi \to (\forall x)\,\psi)$ (P3)

Nun muß noch ein weiteres Axiom garantieren, daß wir von $(\forall y)\ \varphi[^x/_t][^t/_y]$ nach φ selbst kommen. Dazu überlegt man sich zunächst, daß (unter den gegebenen Umständen) $\varphi[^x/_t][^t/_y] = \varphi[^x/_y]$, weil n.V. $c\notin Par(\varphi)$. Außerdem muß x frei sein für y in $\varphi[^x/_y]$, denn y ist neu für $(\psi \to \varphi[^x/_t])$ und damit auch für $\varphi[^x/_t]$. Das benötigte Axiomenschema lautet dann:

- $((\forall x)\,\varphi \to \varphi[^x/_t])$, falls x frei ist für t in φ (P5)

Im uns interessierenden Fall haben wir also: $((\forall y)\ \varphi[{}^x/_y] \rightarrow \varphi[{}^x/_y][{}^y/_x])$, d.h.: $(\forall y)\ \varphi[{}^x/_y] \rightarrow \varphi)$.
Bleibt noch Fall <u>(iv):</u> $\varphi[{}^x/_t] = (\forall y)\ \psi'$, wobei ψ' in weniger Schritten hergeleitet wurde. Nach der Definition der Termsubstitution muß φ selbst die Gestalt $(\forall y)\ \psi$ haben, wobei entweder: $x = y$, und $\psi = \psi'$ und somit $\varphi[{}^x/_t] = \varphi$. Oder: $x \neq y$, und $\psi' = \psi\ \varphi[{}^x/_t]$. Aber dann ist nach I.V.: $\Sigma \vdash \psi$, und somit auch: $\Sigma \vdash (\forall y)\ \psi$ $(= \varphi)$, mit UG. QED.

Die Randbedingung in P4 (Substitutionsfreiheit von t) benötigt man natürlich für die Korrektheit; wir kommen darauf zurück. – Statt P4 hätte man auch das einfachere '$(\forall x)\ \varphi \rightarrow \varphi$' zusammen mit dem Gesetz der gebundenen Umbenennung nehmen können; aber das allgemeinere P4 können wir später noch einmal gebrauchen.

Wir kommen jetzt zur entscheidenden Konstruktion:
Sei L eine beliebige identitätsfreie prädikatenlogische Sprache. Die Menge Con_L^+ der L-*Zeugen* ist die Menge aller Konstanten der Form 'c_φ', wobei $\varphi \in Fml_L$ höchstens eine freie Variable enthält. (Dabei nehmen wir an, daß für verschiedene φ auch die c_φ verschieden sind, daß die L-Zeugen c_φ nicht schon in L vorkommen etc.) Die *Zeugensprache* L^+ *zu* L ist dann die Sprache (Rel_L, Con_L^+). Ein L-*Beispiel* ist eine geschlossene L^+-Formel der Form $((\exists x)\ \varphi \rightarrow \varphi[{}^x/_{c_\varphi}]) \in Fml_{L^+}$, wobei $\varphi \in Fml_L$ $(\subseteq Fml_{L^+})$ und $Fr(\varphi) \subseteq \{x\}$. Die Menge der L-Beispiele bezeichnen wir als $B(L)$ $(\subseteq Fml_{L^+})$.

Zweck der Konstruktion ist es, eine vorgegebene, widerspruchsfreie Menge Σ von geschlossenen Formeln einer Sprache L vor der Maximalisierung um genügend potentielle Beispiele zu erweitern. Doch selbst die Hinzunahme *aller* L-Beispiele reicht nicht aus, um zu garantieren, daß für jede Existenzformel *der so erweiterten Formelmenge* ein potentielles Beispiel zur Verfügung steht: mit dem Übergang von L zu L^+ haben wir ja wieder neue Existenzformeln eingeführt, die auch belegt sein wollen! Um das zu erreichen, müssen wir von L^+ zu L^{++} übergehen, alle L^+-Beispiele hinzunehmen, dann (weil wir wieder vor demselben Problem stehen) von L^{++} zu L^{+++} übergehen, alle L^{++}-Beispiele hinzunehmen, usw. ad infinitum:

Zu einer gegebenen Sprache L definieren wir zunächst induktiv die Familie $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Sprachen L_i: $L_0 = L$; $L_{n+1} = L_n{}^+$. Die 'Limes-Sprache' ist $L^* = (Rel_L, \bigcup_{i \in N} Con_{L_i})$ $[= (Rel_L, \bigcup_{i \in N} Con_{L_i}^+)$!].

<u>Bemerkung:</u> $Fml_{L_i} \subseteq Fml_{L_j}$, wenn $i \leq j$; $Fml_{L_i} \subseteq Fml_{L^*}$, für alle i. Con_{L^*} ist abzählbar unendlich.

Die potentiellen Beispiele nehmen wir nun schrittweise, per Induktion, hinzu: $\Sigma_0 = \Sigma$; $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup B(L_n)$. Der *Zeugenabschluß von* $\Sigma \subseteq Fml_L$ ist dann die Menge: $\Sigma^+ = \bigcup_{i \in N} \Sigma_i$.

Bemerkung: $\Sigma_i \subseteq \Sigma_j$, wenn $i \leq j$.
Wenn Σ eine Menge von geschlossenen L-Formeln ist, dann ist Σ^+ eine Menge von geschlossenen L*-Formeln.

Beobachtung: a) Jedes Σ_i ist widerspruchsfrei, wenn Σ widerspruchsfrei ist.
b) Σ^+ ist widerspruchsfrei, wenn Σ widerspruchsfrei ist.
Beweis: atens) Induktiv über i: der Fall $i = 0$ ist trivial. Sei also die Behauptung für Σ_i bewiesen: wir weisen sie für Σ_{i+1} nach: jeder Beweis von $\perp$ aus Σ_{i+1} ist ein Beweis aus einer *endlichen* Teilmenge $\Delta \subseteq \Sigma_{i+1} = \Sigma_i \cup B(L_i)$, d.h.: wäre Σ_i widersprüchlich, dann auch $\Sigma_i \cup \{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$, für irgendwelche $\psi_1,\ldots,\psi_n$ aus $B(L_i)$. Jedes der ψ_j ist ein L_i-Beispiel, also eine geschlossene L_{i+1}-Formel der Gestalt $((\exists x)\, \varphi_j \rightarrow \varphi[{}^{x}\!/c_{\varphi_j}]))$, wobei φ_j eine L_i-Formel ist. Insbesondere kommt also c_{φ_j} weder in φ_j noch im nach I.V. widerspruchsfreien Σ_i vor. Vom letzten Lemma wissen wir aber noch, daß $\Sigma_i \cup \{\psi_1\}$ widerspruchsfrei ist, und damit auch $\Sigma_i \cup \{\psi_1, \psi_2\}$ (nach demselben Lemma), etc. bis $\Sigma_i \cup \{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$, was zu zeigen war.
btens) Wäre Σ^+ widersprüchlich, dann auch eine endliche Teilmenge, die wiederum Teilmenge eines der Σ_i sein muß, die aber alle lt. a) widerspruchsfrei sind.

Jetzt können wir endlich maximalisieren, d.h. wir setzen, für eine beliebige widerspruchsfreie Menge $\Sigma \subseteq Fml_L$ geschlossener Formeln einer identitätsfreien Sprache L:

$$\Sigma_0^+ = \Sigma^+$$

$$\Sigma_{n+1}^+ = \begin{cases} \Sigma_n^+, \text{ falls } \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} \;|\!-\perp \\ \Sigma_n^+ \cup \{\varphi_n\} \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in N} \Sigma_n \quad (= \{\varphi \in Fml_L \mid \text{es gibt } n \in N \text{ mit: } \varphi \in \Sigma_n^+\})$$

Dabei ist $\{\varphi_1, \varphi_2,\ldots\}$ die (abzählbare) Menge der geschlossenen L-Formeln.

Bemerkung: $\Sigma_i^+ \subseteq \Sigma^*$, für alle $i \in N$; $\Sigma_i \;|\!\not-\perp$, für alle $i \in N$; $\Sigma_i \subseteq \Sigma_j$, wenn $i \leq j$.
Σ^* ist eine widerspruchsfreie, maximale, deduktiv abgeschlossene Menge geschlossener Formeln.

Modellexistenzlemma für die Prädikatenlogik ohne Identität
Wenn $\Sigma \subseteq Fml_L$ eine widerspruchsfreie Menge geschlossener Formeln ist, dann gibt es ein L-Modell, in dem alle $\varphi \in \Sigma$ wahr sind.

Beweis:
Wir werden zunächst induktiv zeigen, daß das aus Σ konstruierte Σ^* gerade die Theorie eines L*-Modells $\mathcal{M}^*$ ist. Nach den Vorüberlegungen ist die Konstruktion des Termmodells klar: $\mathcal{M}^* = (\mathcal{U}^*, F^*, g^*)$, wobei gilt: $\mathcal{U}^* = Con_{L^*}$; $F^*(c) = c$, für alle $c \in Con_{L^*}$; $F^*(R) = \{(c_1,\ldots,c_n) \in Con_{L^*} \mid R(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma^*\}$; g^* ist irgendeine Belegung zu $\mathcal{U}^*$, weil wir es nur mit geschlossenen Formeln zu tun haben, deren Wahrheitswert ja nicht von der Belegung abhängen kann (lt. Koinzidenzlemma). Zu zeigen ist jetzt:

$$(*)\ \Sigma^* = \{\varphi \in Fml_{L^*} \mid Fr(\varphi) = \emptyset, \text{ und } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}^*} = 1\},$$

(*) wird induktiv über die Komplexität der Formeln nachgewiesen:

I.A.: Der Fall $\varphi = \bot$ ist wegen der Widerspruchsfreiheit von Σ^* trivial. Bei geschlossenen Primformeln $\varphi = R(t_1,\ldots,t_n)$ müssen alle $t_i \in Con_{L^*}$ sein, und wir haben:

$$\begin{array}{lll} & [\![R(t_1,\ldots,t_n)]\!]^{\mathcal{M}^*} = 1 & \\ \text{gdw.} & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{M}^*},\ldots,[\![t_n]\!]^{\mathcal{M}^*}) \in F^*(R) & \text{nach der Def. von } [\![R(t_1,\ldots,t_n)]\!]^{\mathcal{M}^*} \\ \text{gdw.} & (F^*(t_1),\ldots,F^*(t_n)) \in F^*(R) & \text{weil } t_i \in Con_{L^*} \\ \text{gdw.} & (t_1,\ldots,t_n) \in F^*(R) & \text{nach der Def. von } F^*(t_i) \\ \text{gdw.} & R(t_1,\ldots,t_n) \in \Sigma^* & \text{nach der Def. von } F^*(R) \end{array}$$

I.S.: Im Falle $\varphi = (\psi \to \chi)$ argumentiert man wie in der Aussagenlogik. Bleibt noch der Fall $\varphi = ((\exists x)\ \psi)$. Wir trennen die Richtungen von (*):
"$\Rightarrow$", d.h.: $\varphi \in \Sigma^*$, und zu zeigen ist: $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}^*} = 1$. Da φ geschlossen ist, ist $Fr(\psi) \subseteq \{x\}$. Da $\psi \in Fml_{L^*}$ eine L_i-Formel ist (für ein $i \in \mathbb{N}$), ist nun das entsprechende potentielle Beispiel $((\exists x)\ \psi \to \psi[^x/c_\psi])$ in $B(L_i) \subseteq \Sigma^*$. Wegen MP und der deduktiven Abgeschlossenheit von Σ^* ist dann auch $\psi[^x/c_\psi] \in \Sigma^*$. Aber $\psi[^x/c_\psi]$ ist weniger komplex als φ und erfüllt die I.V., d.h.: $[\![\psi[^x/c_\psi]]\!]^{\mathcal{M}^*} = 1$. Aber x ist frei für c_ψ in $\psi[^x/c_\psi]$, und wir können das Substitutionslemma anwenden: $[\![\psi[^x/c_\psi]]\!]^{\mathcal{M}^*}$ $= [\![\psi]\!]^{\mathcal{U}^*,F^*,g^*[^x/[\![c_\psi]\!]^{\mathcal{U}^*,F^*,g^*}]} = 1$. Insbesondere ist also die ‘Erfüllungsmenge’ $\{u \in \mathcal{U}^* \mid [\![\psi]\!]^{\mathcal{U}^*,F^*,g^*[^x/u]} = 1\} \neq \emptyset$, d.h.: $[\![(\exists x)\ \psi]\!]^{\mathcal{U}^*,F^*,g^*} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}^*} = 1$.

"$\Leftarrow$": Wenn $[\![\varphi]\!]^{M^*} = [\![(\exists x)\,\psi]\!]^{U^*,F^*,g^*} = 1$, gibt es ein $c \in U^* = Con_{L^*}$, so daß $[\![\psi]\!]^{U^*,F^*,g^*[x/c]} = 1$. Nach dem Substitutionslemma ist dann $[\![\psi[x/c]]\!]^{U^*,F^*,g^*} = 1$, denn $c = F^*(c) = [\![c]\!]^{U^*,F^*,g^*}$. Auf das weniger komplexe $\psi[x/c]$ läßt sich wieder die I.V. anwenden, und wir haben: $\psi[x/c] \in \Sigma^*$. Aber x ist frei für c in ψ, denn $c \in Con_{L^*}$, so daß wir mit einem weiteren Axiom (und MP) auf: $(\exists x)\,\psi = \varphi \in \Sigma^*$ schließen können:

- $(\varphi[x/t] \rightarrow (\exists x)\,\varphi)$, falls x frei ist für t in φ (P4)

Die damit bewiesene Behauptung (*) garantiert, daß das aus widerspruchsfreiem $\Sigma \subseteq Fml_L$ konstruierte Modell M^* ein L*-Modell von $\Sigma^* \subseteq Fml_{L^*}$ ist. Um ein L-Modell M_Σ für Σ selbst zu gewinnen, setzen wir: $M_\Sigma = (U^*, F_\Sigma, g^*)$, wobei F_Σ das auf Con_L beschränkte F* ist, d.h.:

$$F_\Sigma = F^* \setminus \{(c,c) \in U^{*2} \mid c \in Con_{L^*} \setminus Con_L\}.$$

Offenbar ist dann für beliebige $\varphi \in \Sigma$: $[\![\pi]\!]^{U^*,F_\Sigma,g^*} = [\![\pi]\!]^{U^*,F^*,g^*}$, sobald $\pi \in Par(\varphi)$. Nach dem Koinzidenlemma ist dann aber auch $[\![\varphi]\!]^{U^*,F_\Sigma,g^*} = [\![\varphi]\!]^{U^*,F^*,g^*} = 1$ (weil $\varphi \in \Sigma \subseteq \Sigma^*$), für alle $\varphi \in \Sigma$, d.h. M_Σ ist ein Σ-Modell. QED

Um den Beweis des Hilfshilfssatzes zu vervollständigen, müssen wir die inzwischen eingeführten Axiome (P3) - (P5) noch unter die Lupe nehmen und zeigen: wenn $\varphi[x/t]$ unter eines dieser Schemata fällt, dann auch φ. (P3) bereitet keine Probleme: entweder die zu ersetzende Variable ist die im Schema erwähnte und $\varphi[x/t] = \varphi$; oder sie sind verschieden, und $\varphi[x/t]$ hat die Gestalt $(\forall x)\,(\psi[x/t] \rightarrow \chi[x/t]) \rightarrow ((\forall x)\,\varphi[x/t] \rightarrow (\forall x)\,\psi[x/t])$, fällt also auch unter (P3). – (P4) ist komplizierter: Wenn $\varphi[x/t] = (\psi[y/t'] \rightarrow (\exists y)\,\psi)$, dann ist φ selbst von der Gestalt $(\psi' \rightarrow (\exists y)\,\psi'')$, wobei gilt: $\psi'[x/t] = \psi[y/t']$, und $\psi''[x/t] = \psi$, d.h.: $\varphi[x/t] = (\psi''[x/t][y/t'] \rightarrow (\exists y)\,\psi''[x/t])$. Aber $\psi''[x/t][y/t'] = \psi''[y/t'][x/t]$, weil o.B.d.A. $t' \neq x \neq y \neq t$. Also ist $\varphi = (\psi''[y/t'] \rightarrow (\exists y)\,\psi'')$, d.h. ein Fall von (P4). – (P5) geht ganz analog.

Wir müssen jetzt noch die Korrektheit des Kalküls nachweisen. Aus den Vorüberlegungen zum Deduktionstheorem kann man ersehen, daß wir hier nicht so direkt wie in der Aussagenlogik argumentieren können: in der Prädikatenlogik impliziert $\Sigma \vdash \varphi$ nicht immer, daß φ in jedem Σ-Modell wahr ist: wir haben ja z.B. $\{P(x)\} \vdash (\forall x)\,P(x)$, aber $g(x) \in F(P)$ impliziert natürlich noch nicht, daß F(P) das Universum U ist. Glücklicherweise betrifft diese scheinbare Inkorrektheit des Kalküls nur offene Formeln. Um sie zu umgehen, werden wir deshalb offene Formeln leicht uminterpretieren: als Σ-Modelle werden wir einfach nur solche M zulassen, in denen die freien Variablen als universell quantifiziert verstanden werden dürfen. Im Sinne dieses Wahrheitsbegriffs, der für geschlossene Formeln auf Wahrheit im üblichen Sinne hinausläuft, erweist sich der Kalkül als korrekt.

Eine Formel $\varphi \in Fml_L$ ist *besonders wahr in* einem Modell $M = (U,F,g)$, falls für alle Belegungen h zu U gilt: $[\![\varphi]\!]^{U,F,h} = 1$. $\Sigma \subseteq Fml_L$ ist *besonders wahr in* M, wenn alle $\psi \in \Sigma$ besonders wahr sind in M.

Bemerkung: Wenn $\in Fml_L$ in allenL- Modellen wahr ist, dann ist φ in allen L-Modellen besonders wahr.
Wenn $Fr(\varphi) = \{x_1,\ldots,x_n\}$, dann ist φ besonders wahr in M gdw. $(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\ \varphi$ besonders wahr ist in M; insbesondere sind geschlossene Formeln wahr gdw. sie besonders wahr sind.

Korrektheitssatz für die Prädikatenlogik ohne Identität

Wenn $\Sigma \vdash \varphi$, dann gilt für jedes Modell M, in dem Σ besonders wahr ist: φ ist besonders wahr in M.

Beweis: Wie in der Aussagenlogik, induktiv über die Beweislänge: Für die Begründung 'n.V.' ist die Behauptung trivial. Und die Axiome sind in allen Modellen wahr, also auch besonders wahr. Der Induktionsanfang ist damit klar. Im Induktionsschritt kommen zwei Fälle hinzu. Wenn φ per Modus Ponens aus ψ und $(\psi \to \varphi)$ bewiesen wurde, sind mit I.V. ψ und $(\psi \to \varphi)$ besonders wahr in $M = (U,F,g)$. Sei also h eine Belegung zu U. Dann ist $[\![\psi]\!]^{U,F,h} = [\![(\psi \to \varphi)]\!]^{U,F,h} = 1$, also auch: $[\![\varphi]\!]^{U,F,h} = 1$. – Wenn $\varphi = (\forall x)\ \psi$ mit UG aus ψ gewonnen wurde, dann ist ψ nach I.V. besonders wahr in $M = (U,F,g)$, also auch in allen Modellen der Form $M' = (U,F,\ h[x/u])$, wo h beliebig ist, d.h. $(\forall x)\ \psi$ ist in allen Modellen (U,F,h) wahr, also besonders wahr in M.

Der Beweis des Vollständigkeitssatzes ist damit abgeschlossen. Wir ziehen noch schnell zwei Korollare:

Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik ohne Identität

Wenn $\Sigma \models \varphi$, dann gibt es ein endliches $\Delta \subseteq \Sigma$, so daß $\Delta \models \varphi$.

Beweis: s. Aussagenlogik

Löwenheim-Skolem-Satz für die Prädiktenlogik ohne Identität

Wenn Σ ein Modell besitzt, dann beitzt, Σ ein abzählbar unendliches Modell, dh. heißt ein Σ-Modell $M = (U,F,g)$, mit einem abzählbar unendlichen Universum U.

Beweis: Wenn Σ ein Modell besitzt, gilt: $\Sigma \not\models \bot$, also auch: $\Sigma \nvdash \bot$, wegen der Korrektheit. Nach dem Modellexistenzlemma können wir dann Σ^* konstruieren und daraus das Σ-Modell (U^*,F_Σ,g^*). Aber U^* ist die abzählbar unendliche Menge Con_{L^*} von Konstanten.

Prädikatenlogik mit Identität

Eine *Sprache* der Prädikatenlogik mit Identität ist ein Paar L = (Rel_L,Con_L), so daß gilt: L ist eine identitätsfreie Sprache, oder $Rel_L^n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die *Terme* einer Sprache L sind wieder: $Tm_L = Var \cup Con_L$.

Primformeln von L: Zeichenreihen der Gestalt: $R(t_1,\ldots,t_n)$, oder $(t_1 = t_n)$ wobei $t_1,\ldots,t_n \in Tm_L$ und $R \in Rel_L^n$.

Formeln von L, Fml_L: '$\perp$', Primformeln sowie '$(\varphi \rightarrow \psi)$' und '$((\exists x)\ \varphi)$', wenn $\varphi \in Fml_L$, $\psi \in Fml_L$ und $x \in Var$.

freie Variablen: $Fr((t_1 = t_n)) = Var \cap \{t_1,t_n\}$, sonst wie gehabt; ebenso *geschlossene* vs. *offene* Formeln.

Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^M$ von $\varphi \in Fml_L$ *in* dem Modell *M*:

$$[\![(t_1 = t_n)]\!]^M = \begin{cases} 1, \text{ falls } [\![t_1]\!]^M = [\![t_n]\!]^M; \\ 0, \text{ falls } [\![t_1]\!]^M \neq [\![t_n]\!]^M; \end{cases}$$

sonst wie gehabt.

$Par((t_1 = t_n)) = \{t_1,t_n\}$, sonst wie gehabt; es gilt wieder das Koinzidenzlemma (Beweis wie gehabt).

Substitution:

$(t_1 = t_n)\ [^{t'}\!/_{t}] = (t_1{}^* = t_n{}^*)$, wobei gilt: $t_i{}^* = t'$, sobald $t_i = t$ (der zu Ersetzende) und $t_i{}^* = t_i$ sonst; Rest wie gehabt.

Substitutionsfreiheit: wie gehabt; Neuheit: t ist neu für $(t_1 = t_n)$ gdw. $t \notin \{t_1,t_n\}$; sonst wie gehabt.

Substitutionslemma und Prinzip der gebundenen Umbenennung gelten nach wie vor, mit denselben Beweisen. Wir beweisen jetzt den:

Vollständigkeitssatz für die Prädikatenlogik mit Identität

Es sei L eine Sprache der Prädikatenlogik mit Identität, $\varphi \in Fml_L$, $\Sigma \subseteq Fml_L$, wobei $Fr(\psi) = \emptyset$ für alle $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$. Dann gilt:

$$\Sigma \models \varphi \text{ gdw. } \Sigma \vdash \varphi.$$

Natürlich können wir nicht denselben Kalkül nehmen und etwa *Gleichungen* der Gestalt (t = t') wie andere Primformeln behandeln: nach dem Löwenheim-Skolem-Satz würden wir dann ja für alle erfüllbaren Mengen unendliche Modelle kriegen, was aber schon für den Fall $\Sigma = \{(\exists x)\ (\forall y)\ (x = y)\}$ unerwünscht ist: Σ besitzt nur Modelle mit genau 1 Element! Wir müssen also beim Modell-Existenzlemma aufpassen, daß das zu konstruierende Modell nicht zu groß wird. Insbesondere dürfen wir bei geschlossenen Gleichungen $(c = d) \in \Sigma$ offensichtlich nicht mehr c und d auf sich selbst referieren lassen (wenn es sich um *verschiedene* Konstanten handelt): im Modell müssen ja c und d *denselben* Referenten *r* haben. Um dieses *r* wieder aus den Konstanten selbst zu konstruieren, können wir versuchsweise $r = \{c,d\}$ setzen. Im allgemeinen hätten wir dann:

$$F^*(c) = \{c' \in Con_{L^*} \mid (c = c') \in \Sigma\}.$$

Dabei müssen wir offenbar die Symmetrie der Σ^*–Identität voraussetzen, d.h. der Relation $\{(c,d) \in Con_{L^*} \mid (c = d) \in \Sigma^*\}$; denn sonst bekämen wir nicht $F^*(c) = F^*(d)$. Außerdem wollen wir: $F^*(c) = F^*(e)$, wenn auch noch $(d = e) \in \Sigma$, d.h. wir benötigen die Transitivität der Σ^*–Identität. Ihre Reflexivität versteht sich von selbst: c muß offenbar in $F^*(c)$ auftauchen, weil sonst $\neg(c=c) \in \Sigma$ wäre (wg. der Maximalität), was in keinem Modell wahr ist. Insgesamt muß also sichergestellt werden, daß die Σ^*–Identität eine *Äquivalenzrelation* ist, deren Äquivalenzklassen (= die Teile der dazugehörigen Partition der Konstanten) dann als Referenten der Konstanten dienen. Die Eigenschaften der Σ^*–Identität sichern die folgenden Axiome:

- $(\forall x)\ (x = x))$ (I1)
- $(\forall x)\ (\forall y)\ ((x = y) \rightarrow (y = x))$ (I2)
- $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((x = y) \rightarrow ((y = z) \rightarrow (x = z)))$ (I3)

Bemerkung: Wenn das Axiomensystem um (mindestens) (I1) - (I3) erweitert wird, und $\Sigma^* Fml_{L^*}$ das Ergebnis der Maximalisierung des Zeugenabschlusses einer (im Rahmen des so erweiterten Systems) widerspruchsfreien Menge $\Sigma \subseteq Fml_L$ ist, dann ist die Σ^*-Identität (also die Menge: $\{(c,d) \in Con_{L^*} \mid (c = d) \in \Sigma^*\}$) eine Äquivalenzrelation über Con_{L^*}.

Statt '$(c=d) \in \Sigma^*$' schreiben wir auch: $c \sim_{\Sigma^*} d$.

Wie sollen die Prädikate interpretiert werden? In der identitätsfreien Logik war einfach: $F^*(R) = \{(c_1,\ldots,c_n) \in Con_{L^*} \mid R(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma^*\}$, was automatisch sicherstellte, daß geschlossene Primformeln im Termmodell genau dann wahr wurden, wenn sie in Σ^* auftauchten. Um denselben Effekt zu erzielen, müssen wir jetzt sichern, daß für (geschlossene) Primformeln $R(c_1,\ldots,c_n)$ in Σ^* die entsprechenden Äquivalenzklassen $(|c_1|,\ldots,|c_n|)$ in Rs Extension liegen: dann ist klar, daß die Primformeln in Σ^* im Modell wahr werden.

Modellexistenzlemma für die Prädikatenlogik mit Identität

Wenn $\Sigma \subseteq Fml_L$ eine widerspruchsfreie Menge geschlossener Formeln ist, dann gibt es ein L-Modell, in dem alle $\varphi \in \Sigma$ wahr sind.

Beweis:

Wir setzen wieder die Konstruktion von Σ^* aus Σ voraus und zeigen, daß Σ^* gerade die Theorie eines L*-Modells $\mathcal{M}^*$ ist. Die Konstruktion des Modells $\mathcal{M}^*$ = $(\mathcal{U}^*,F^*,g^*)$ sieht diesmal so aus:

$\mathcal{U}^* = \{C \subseteq Con_{L^*} \mid C = |c|_{\sim_{\Sigma^*}}\}$ (= die von der Σ^*-Identität $\sim_{\Sigma^*}$ induzierte Partition);

$F^*(c) = |c|_{\sim_{\Sigma^*}}$ für alle $c \in Con_{L^*}$;

$F^*(R) = \{(X_1,\ldots,X_n) \subseteq Con_{L^*}{}^n \mid$ es gibt $c_1,\ldots,c_n \in Con_{L^*}$, so daß gilt:
$X_1 = |c_1|_{\sim_{\Sigma^*}},\ldots,X_n = |c_n|_{\sim_{\Sigma^*}}$, und $R(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma^*\}$;

g^* ist irgendeine Belegung zu $\mathcal{U}^*$.

Zu zeigen ist jetzt wieder induktiv über die Komplexität der Formeln:

(*) $\Sigma^* = \{\varphi \in Fml_{L^*} \mid Fr(\varphi) = \varnothing$, und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}^*} = 1$.

I.A.: Der Fall $\varphi = \perp$ ist wieder trivial. Bei geschlossenen Primformeln $\varphi = R(t_1,\ldots,t_n)$ empfiehlt es sich diesmal die Richtungen zu trennen:

"$\Rightarrow$": Wenn $R(t_1,\ldots,t_n) \in \Sigma^*$, ist zu zeigen, daß ($[\![t_1]\!]^{M^*}, \ldots, [\![t_n]\!]^{M^*}$) $\in F^*(R)$, d.h. wir brauchen irgendwelche L*-Konstanten $c_1,\ldots,c_n$ gibt, so daß gilt:

$$(!)\ [\![t_1]\!]^{M^*} = |c_1|_{\sim_{\Sigma^*}}, \ldots, [\![t_n]\!]^{M^*} = |c_n|_{\sim_{\Sigma^*}}, \text{ und } R(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma^*.$$

Aber jedes t_i ist eine L*-Konstante, denn Σ^* enthält nur geschlossene Formeln; also ist jeweils $[\![t_i]\!]^{M^*} = F^*(t_i) = |t_i|_{\sim_{\Sigma^*}}$. Außerdem gilt n.V.: $R(t_1,\ldots,t_n) \in \Sigma^*$. Die für (!) gesuchten $c_1,\ldots,c_n$ sind also $t_1,\ldots,t_n$ selbst.

"$\Leftarrow$": Angenommen, $[\![R(t_1,\ldots,t_n)]\!]^{M^*} = 1$, d.h.: $[\![t_1]\!]^{M^*} = |c_1|_{\sim_{\Sigma^*}}, \ldots, [\![t_n]\!]^{M^*} = |c_n|_{\sim_{\Sigma^*}}$, und $R(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma^*$, für irgendwelche $c_1,\ldots,c_n \in Con_{L^*}$. Die t_i sind Konstanten, womit gilt: $[\![t_i]\!]^{M^*} = F(t_i) = |t_i|_{\sim_{\Sigma^*}} = |c_i|_{\sim_{\Sigma^*}}$, d.h.: $t_i \sim_{\Sigma^*} c_i$, denn eine Äquivalenzrelation besteht genau dann, wenn die Äquivalenzklassen gleich sind. Wir haben also:

(!!) $\{(t_1 = c_1),\ldots, (t_n = c_n), R(c_1,\ldots,c_n)\} \subseteq \Sigma^*$,

und wollen schließen auf: $R(t_1,\ldots,t_n) \in \Sigma^*$. Dazu benötigen wir noch ein letztes Axiom:

- $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\,(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)$
  $((x_1 = y_1) \rightarrow (\ldots(x_n = y_n) \rightarrow (R(y_1,\ldots,y_n) \rightarrow R(x_1,\ldots,x_n)\ldots)$ $(I4_R)$

(Der Index 'R' deutet an, daß wir dieses Axiom für jedes Prädikat R der Sprache L benötigen; die Variablen sind natürlich alle voneinenader verschieden.) Durch sukzessive Einsetzung der einschlägigen Instanzen von (P5) und anschließende Anwendung von MP haben wir dann:

$\Sigma^* \vdash (\forall x_2)\ldots(\forall x_n)\,(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)$
$((t_1 = y_1) \rightarrow (\ldots(x_n = y_n) \rightarrow (R(y_1,\ldots,y_n) \rightarrow R(t_1,x_2,\ldots,x_n)\ldots)$

…

$\Sigma^* \vdash (\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\,((t_1 = y_1) \rightarrow (\ldots(t_n = y_n) \rightarrow (R(y_1,\ldots,y_n) \rightarrow R(t_1,\ldots,t_n)\ldots)$

$\Sigma^* \vdash (\forall y_2)\ldots(\forall y_n)\,((t_1 = c_1) \rightarrow (\ldots(t_n = y_n) \rightarrow (R(c_1,y_2,\ldots,y_n) \rightarrow R(t_1,\ldots,t_n)\ldots)$

…

$\Sigma^* \vdash ((t_1 = c_1) \rightarrow (\ldots(t_n = c_n) \rightarrow (R(c_1,\ldots,c_n) \rightarrow R(t_1,\ldots,t_n)\ldots)$

Wegen (!!) kommen wir dann mit n+1 Anwendungen von MP auf:
$\Sigma^* \vdash R(t_1,\ldots,t_n)$, d.h.: $R(t_1,\ldots,t_n) \in \Sigma^*$, denn Σ^* ist deduktiv abgeschlossen.

Bevor wir den Induktionsschritt wagen, müssen wir noch die zweite Art von Primformeln abchecken, also die (geschlossenen) Gleichungen. Hier gilt aber:

$$[\![(t_1 = t_n)]\!]^{M^*} = 1$$

gdw. $[\![t_1]\!]^{M^*} = [\![t_n]\!]^{M^*}$ nach der Def. von $[\![(t_1 = t_n)]\!]^{M^*}$

gdw. $F^*(t_1) = F^*(t_n)$ weil $t_1, t_n \in Con_{L^*}$

gdw. $|t_1|_{\sim_{\Sigma^*}} = |t_n|_{\sim_{\Sigma^*}}$ nach der Def. von $F^*(t_i)$

gdw. $t_1 \sim_{\Sigma^*} t_n$ wie gehabt

gdw. $(t_1 = t_n) \in \Sigma^*$ nach der Def. von $\sim_{\Sigma^*}$

I.S.: $\varphi = (\psi \to \chi)$ bereitet natürlich kein Problem. Und auch der Fall $\varphi = ((\exists x)\ \psi)$ geht erstaunlich glatt durch: Bei der Richtung "$\Rightarrow$" argumentiert man genau wie in der identitätsfreien Logik. Bleibt noch "$\Leftarrow$": Wenn $[\![\varphi]\!]^{M^*} = [\![(\exists x)\ \psi]\!]^{U^*,F^*,g^*} = 1$, gibt es ein $C \in U^*$, so daß $[\![\psi]\!]^{U^*,F^*,g^*[x/C]} = 1$. Da $C \in U^*$, hat es die Gestalt $|c|_{\sim_{\Sigma^*}} = F^*(c) = [\![c]\!]^{U^*,F^*,g^*}$, für irgendein $c \in Con_{L^*}$. Nach dem Substitutionslemma ist dann $[\![\psi]\!]^{U^*,F^*,g^*[x/C]} = [\![\psi[x/c]]\!]^{U^*,F^*,g^*} = 1$. Mit der I.V. haben wir dann: $\psi[x/c] \in \Sigma^*$, woraus wir mit (P4) wieder auf $((\exists x)\ \psi = \varphi) \in \Sigma^*$ schließen.

Der Beweis von (*) ist damit abgeschlossen. Wie in der identitätsfreien Logik läßt sich nun aus dem L*-Modell M^* von Σ^* ein L-Modell für Σ gewinnen, womit das Modellexistenzlemma und damit auch der Vollständigkeitssatz bewiesen sind. Wieder bekommen wir zwei unmittelbare Korollare:

Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik mit Identität

Wenn $\Sigma \models \varphi$, dann gibt es ein endliches $\Delta \subseteq \Sigma$, so daß $\Delta \models \varphi$.

Beweis: s. Aussagenlogik

Löwenheim-Skolem-Satz

Wenn Σ ein Modell besitzt, dann beitzt Σ ein abzählbares Modell, d.h. ein Σ-Modell $M = (U,F,g)$ mit einem endlichen oder abzählbar unendlichen Universum U.

Beweis: Wie in der identitätsfreien Logik, außer daß das konstruierte Modell (U^*,F_Σ,g^*) diesmal aus paarweise disjunkten Teilmengen der abzählbar unendlichen Menge Con_{L^*} besteht. Es können nicht mehr als abzählbar viele sein, weil z.B. die Menge $\{(c, |c|_{\sim_{\Sigma^*}}) \in Con_{L^*} \times U^* \mid c \in Con_{L^*}\}$ eine surjektive Abbildung von Con_{L^*} nach U^* ist. (Anschaulich gesprochen: man kann eine Menge nicht in mehr Teile zerlegen, als sie Elemente enthält.)

In der Prädikatenlogik ergeben sich aus den beiden obigen Korollaren weitreichende Folgerungen. Wir illustrieren dies an jeweils einem Beispiel.

Zunächst eine interessante Konsequenz des Kompaktheitssatzes:

Unausdrückbarkeit der Unendlichkeit

Es gibt keine (geschlossene) prädikatenlogische Formel $\varphi \in Fml_L$ (egal welche Sprache L ist), so daß für alle L-Modelle $M = (U,F,g)$ gilt: $[\![\varphi]\!]^M = 1$ gdw. U unendlich ist.

Bevor wir das beweisen, beobachten wir zunächst, daß es (für jedes L) durchaus eine *Menge* $\Sigma_\infty \subseteq Fml_L$ von geschlossenen L-Formeln gibt, deren Modelle gerade die unendlichen Modelle sind. Dazu konstruieren wir für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Formel $\varphi_n \in Fml_L$, die besagt, daß es mindestens n Individuen gibt. Die Konstruktion ist hier nur angedeutet: jede Formel fängt mit n Existenzquantoren an, danach kommt eine Konjunktion, die alle Ungleichungen der Form $\neg (x_i = x_j)$ enthält, wobei x_i und x_j verschiedene Variablen sind, die am Anfang gebunden wurden:

$$\varphi_2 = (\exists x_1)\,(\exists x_2)\,\neg\,(x_1 = x_2)$$
$$\varphi_3 = (\exists x_1)\,(\exists x_2)\,(\exists x_3)\,(\neg\,(x_1 = x_2)\ \&\ \neg\,(x_1 = x_3)\ \&\ \neg\,(x_2 = x_3))$$
$$\ldots$$
$$\begin{aligned}\varphi_n = (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\,(\quad & \neg\,(x_1 = x_2)\ \&\ \ldots\ \&\ \neg\,(x_1 = x_n)\ \&\\ & \neg\,(x_2 = x_3)\ \&\ \ldots\ \&\ \neg\,(x_2 = xn_i)\ \&\\ & \ldots\ \&\\ & \neg\,(x_{n-1} = x_n) \ldots)\end{aligned}$$

Man weist nun leicht nach, daß $[\![\varphi_n]\!]^{U,F,g} = 1$ gdw. U mindestens n Elemente enthält: wenn es n oder mehr Individuen gibt, lassen sich die Variablen $x_1,\ldots,x_n$ so belegen, daß alle Ungleichungen in φ_n erfüllt sind; aber wenn es weniger als n Individuen gibt, muß man offenbar einige Variablen gleich belegen, so daß bei jeder Belegung einige Ungleichungen (und damit auch das gesamte φ_n) falsch würden. Wenn nun $\Sigma_\infty = \{\varphi_n \in Fml_L \mid n \in \mathbb{N}\}$, folgt sofort, daß $M = (U,F,g)$ ein Σ_∞-Modell ist gdw. U unendlich ist: in einem unendlichen U gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ mehr als n Individuen, also auch mindestens n; und in einem endlichen Modell gibt es genau m Individuen (für ein bestimmtes m), so daß φ_{m+1} falsch wird.

Zu zeigen ist also, daß es keine (geschlossene) Formel $\varphi \in Fml_L$ gibt, deren Modelle gerade die Σ_∞-Modelle sind. Wir argumentieren indirekt: angenommen, φ_∞ sei so eine Formel. Dann würde φ_∞ insbesondere aus Σ_∞ folgen und damit aus einer *endlichen* Teilmenge $\Delta \subseteq \Sigma_\infty$: $\Delta \models \varphi_\infty$.Wenn aber m die größte Zahl ist, für die $\varphi_m \in \Delta$, dann ist Δ offenbar in jedem Modell $M = (U,F,g)$ wahr, bei dem U (genau) m Elemente hat: φ_m ist in solchen M wahr, und die anderen $\varphi_i \in \Delta$ *folgen aus* φ_m. Da φ_∞ aus Δ folgt, müßte also auch φ_∞ in solchen M wahr sein, was der Annahme widerspricht, φ_∞ drücke Unendlichkeit aus. QED.

Skolem-Paradox

Die Axiomatik der Mengenlehre besitzt ein abzählbares Modell.

Beweis: Das ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Löwenheim-Skolem-Satz und der Tatsache, daß es sich bei der Megnenlehre um eine in der Prädikatenlogik formulierbare axiomatische Theorie handelt. QED.

Man spricht hier von einem *Paradox*, weil man (nach dem Satz von Cantor) einerseits aus den Axiomen der Mengenlehre folgern kann, daß etwa die Menge der natürlichen Zahlen überabzählbar viele Teilmengen besitzt, andererseits aber diese Teilmengen in einem Modell der Mengenlehre als Individuen auftauchen müßten, womit das Modell eigentlich überabzählbar sein müßte.
Es handelt sich bei dem Skolem-Paradox nicht um einen Widerspruch der (Meta-)Theorie – wie bei der Rusellschen Antinomie, mit der man die naive Mengenlehre zu Fall bringt. Strenggenommen ist das Skolem-Paradox nur ein überraschendes und lehrreiches Ergebnis. Machen wir uns das an seiner klassischen *Auflösung* klar!
Um zu sehen, daß hier kein echter Widerspruch vorliegt, muß man sich zunächst den im Satz von Cantor angesprochenen Begriff der *Überabzählbarkeit* in Erinnnerung rufen: eine Menge ist überabzählbar, *wenn es keine Abzählung dieser Menge gibt*, d.h. keine Funktion, die diese Menge injektiv auf die natürlichen Zahlen abbildet. Wichtig an dieser Definition ist in diesem Zusammenhang, daß auch Abzählungen Funktionen, *also Mengen*, sind. Der Satz von Cantor sagt nun, daß die natürlichen Zahlen überabzählbar viele Teilmengen besitzen, daß also ihre *Potenzmenge* überabzählbar ist. Der Beweis des Satzes läßt sich prädikatenlogisch aus den Axiomen herleiten (wie wir zumindest skizzenhaft im Mengenlehre-Teil gesehen haben). Natürlich läßt er sich auch in der prädikatenlogischen Formulierung der Mengenlehre durch eine Formel χ ausdrücken. χ muß also in jedem Modell der Mengenlehre gelten (sonst würde es nicht aus den Axiomen *folgen*), also auch in jedem Mengenlehre-Modell M mit abzählbaremUniversum U. Wie sieht χ aus? Da es besagt, daß es keine Abzählung aller Teilmengen von N gibt, hat es etwa die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{lll} \neg(\exists f) & [(\forall x)(\forall n)((x,n)\in f \rightarrow (x\subseteq \mathsf{N} \;\&\; n\in \mathsf{N}))] \;\& & \text{(A)} \\ & [(\forall x)((x\subseteq \mathsf{N} \rightarrow (\exists n)(x,n)\in f) \;\&\; (\forall m)((x,m)\in f \rightarrow n=m))] & \text{(B)} \\ & [(\forall x)(\forall y)(\forall n)((x,n)\in f \;\&\; (y,n)\in f) \rightarrow x=y)] & \text{(C)} \end{array}$$

(Das Konjunkt (A) besagt, daß $f \subseteq \wp(\mathsf{N}) \times \mathsf{N}$, das zweite, daß f eine Funktion ist, und (C) ist die Injektivitäts-Bedingung.) Daß χ wahr ist in M heißt nun (nach der Wahrheits-Definition der Prädikatenlogik), daß es kein $F\in U$ gibt, das alle drei Konjunkte erfüllt. Andererseits ist U ist abzählbar, und damit gibt es ein Funktion G: $\{X\in U \mid X\subseteq \mathsf{N}\} \xrightarrow{1-1} \mathsf{N}$. Man sieht leicht ein, daß so ein G auch (A) - (C) erfüllen muß: (A) G ist eine Teilmenge des Produktes $\wp(\mathsf{N}) \times \mathsf{N}$; (B) jedem $X\in U$ ordnet G eine Zahl zu; (C) G ist n.V. injektiv. Man beachte, daß Erfüllung des Konjunkts (B) keineswegs besagt, daß G *jeder* Teilmenge von N eine Zahl zuordnen muß: (B) wird ja im Modell M interpretiert, und dafür genügt es, den Elementen der Menge $\Pi = \{X\in U \mid X\subseteq \mathsf{N}\}$ Zahlen zuzuordnen. (Π ist natürlich eine *echte* Teilmenge von $\wp(\mathsf{N})$, weil $\Pi\subseteq U$ abzählbar ist.)
Das Paradox löst sich also folgendermaßen auf. Der Cantorsche Satz χ ist wahr im abzählbaren Modell, weil das Universum des Modells keine Abzählung der Menge Π aller N-Teilmengen des Modells enthält. Dennoch ist Π abzählbar, denn es gibt eine solche Abzählung, aber eben außerhalb des Modell-Universums.