Hierarchisch Lineare Modelle

Johannes Hartig & Myriam Bechtoldt

Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung
German Institute for International Educational Research
Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Universiteit van Amsterdam

Inhalt

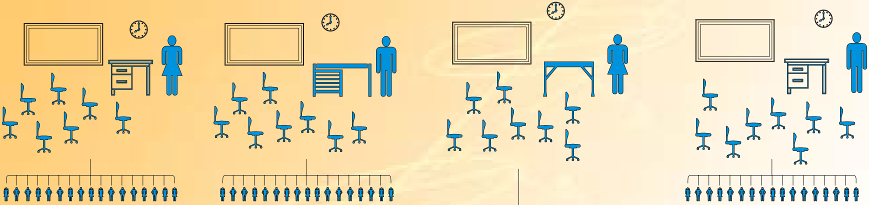
- Definition hierarchischer Datenstrukturen
- Grundlagen hierarchischer Regression, random und fixed effects
- Aufbau verschiedener hierarchischer Regressionsmodelle
- Zentrierung von Prädiktoren, Kompositionseffekte
- Beispielanalyse mit HLM
- Beispielanalyse mit MPlus

Definition: Hierarchische Datenstrukturen

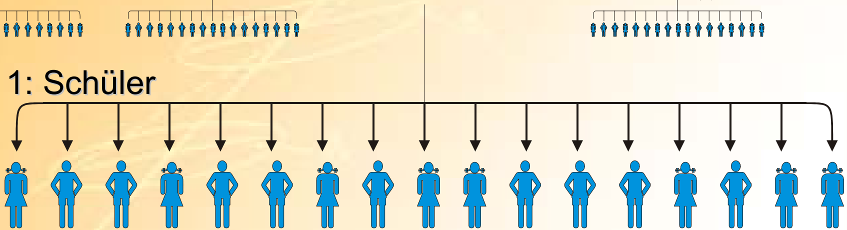
- Datenstrukturen mit mehreren hierarchisch geordneten Ebenen;
- innerhalb jeder Ebene existieren beobachtbare, klar definierte Einheiten;
- jede Einheit einer niedrigeren Ebene ist eindeutig einer Einheit auf der nächst höheren Ebene zugeordnet.

Mehrebenenstrukturen
Beispiel: Schüler in Klassen

Level 2: Schulklassen



Level 1: Schüler



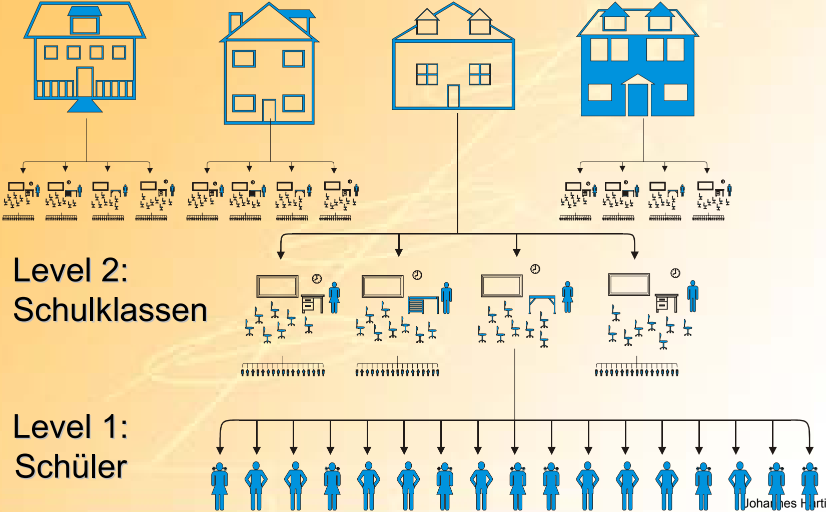
Johannes Hartig & Myriam Bechtoldt

Mehrebenenstrukturen
Beispiel: Schüler in Klassen in Schulen

Level 3: Schulen

Level 2: Schulklassen

Level 1: Schüler

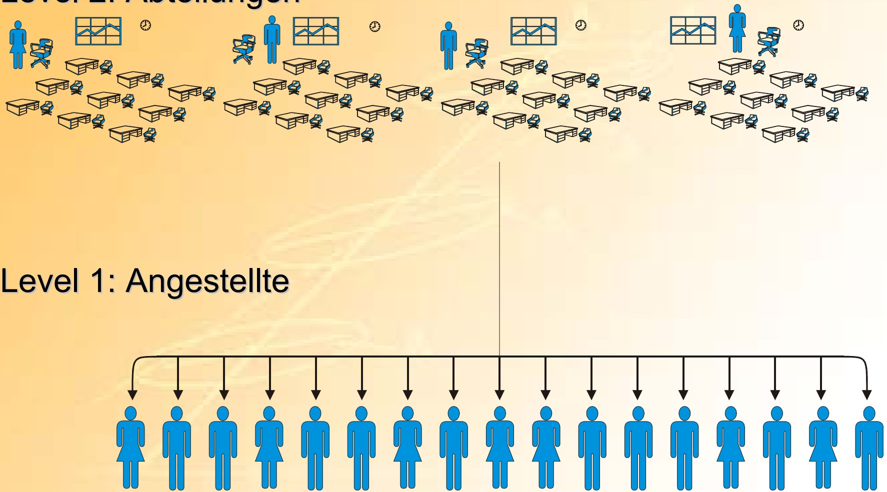


Johannes Hartig & Myriam Bechtoldt

Mehrebenenstrukturen
Beispiel: Angestellte in Abteilungen

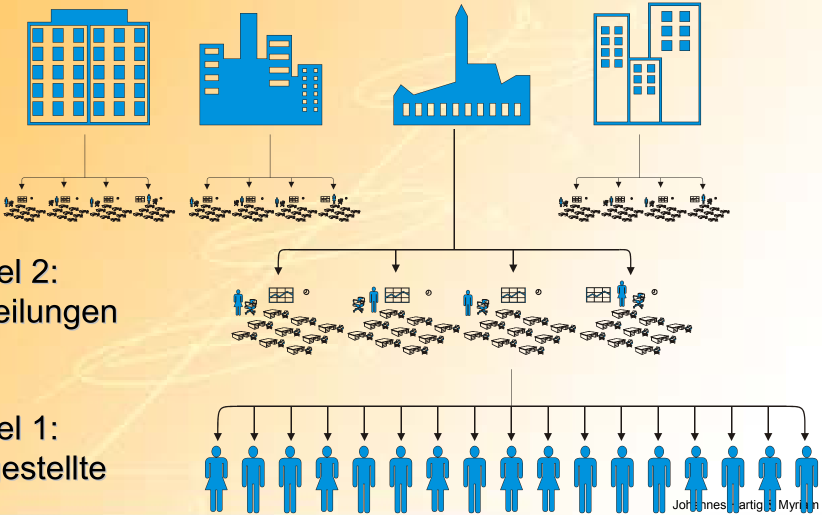
Level 2: Abteilungen

Level 1: Angestellte



Mehrebenenstrukturen Beispiel: Arbeiter in Abteilungen in Unternehmen

Level 3: Unternehmen

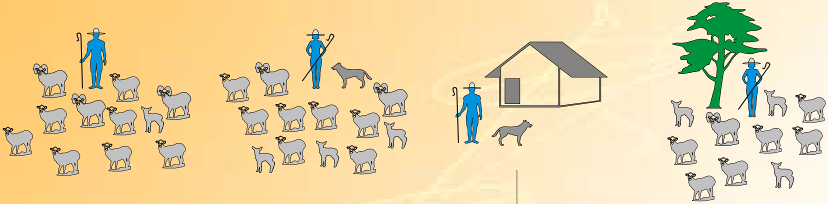


Level 2:
Abteilungen

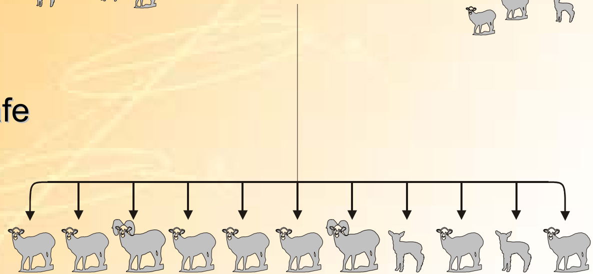
Level 1:
Angestellte

Mehrebenenstrukturen Beispiel: Schafe in Herden

Level 2: Herden

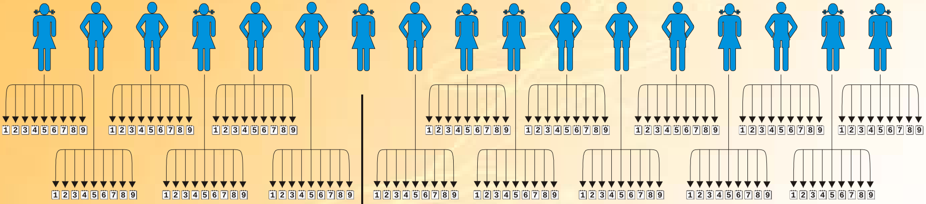


Level 1: Schafe

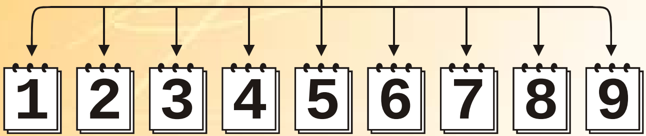


Mehrebenenstrukturen
Beispiel 5: Zeitpunkte in Personen

Level 2: Personen



Level 1: Zeitpunkte



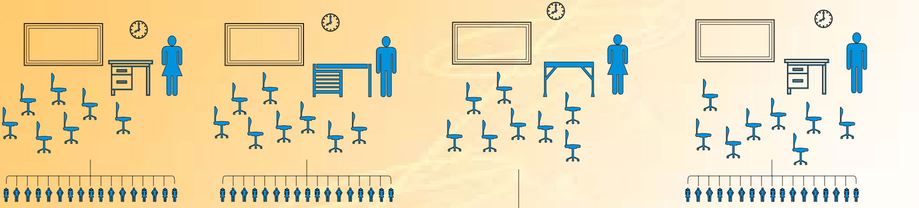
Datenlage bei Mehrebenenregressionsanalysen

- Die abhängige Variable (Y) wird auf der untersten Ebene gemessen (Level 1);
- unabhängige Variablen werden auf allen Ebenen erhoben;
- Gruppen auf den unterschiedlichen Ebenen können unterschiedlicher Größe sein;
- auf jeder Ebene werden spezifische Modellgleichungen erstellt.

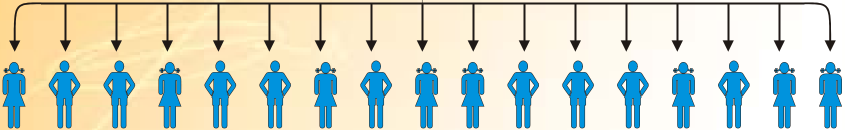
Inhaltliches Beispiel für Variablen auf zwei Ebenen

Level 2: Schulklassen

UV Level 2: Z = Klassengröße



Level 1: Schüler



AV: Y = Note in Mathematik

UV Level 1: X = sozioökonomischer Status

Probleme bei Nichtberücksichtigung der Mehrebenenstruktur

- Beobachtungen innerhalb einer Gruppe sind u. U. nicht unabhängig voneinander, d.h. sie können sich untereinander stärker ähneln als Beobachtungen aus anderen Gruppen;
- Gründe: Kontexteffekte, gemeinsame Sozialisation etc.;
- statistische Standardverfahren sind nicht robust gegenüber der Verletzung der Unabhängigkeitsannahme der Daten;
- → das Ausmaß der Ähnlichkeit innerhalb einer Gruppe wird durch die Intraclass-Korrelation beziffert: Anteil der Varianz zwischen Gruppen an der Gesamtvarianz

Alpha-Inflation durch Intraclass-Korrelation bei ANOVA

		INTRACLASS CORRELATION								
Anzahl Gruppen	Gruppen-größe	.00	.01	.10	.30	.50	.70	.90	.95	.99
2	3	.05	.05	.07	.14	.24	.38	.63	.73	.88
	10	.05	.06	.17	.37	.53	.68	.83	.88	.95
	30	.05	.08	.34	.59	.72	.81	.90	.93	.97
	100	.05	.17	.57	.77	.84	.90	.95	.96	.98
3	3	.05	.05	.08	.19	.34	.56	.84	.92	
	10	.05	.06	.22	.54	.74	.87	.96	.98	.98
	30	.05	.10	.49	.80	.90	.96	.99	.99	1.00
	100	.05	.22	.78	.93	.97	.99	1.00	1.00	1.00
5	3	.05	.05	.10	.27	.51	.78	.97	.99	1.00
	10	.05	.07	.32	.74	.92	.98	1.00	1.00	1.00
	30	.05	.12	.69	.95	.99	1.00	1.00	1.00	1.00
	100	.05	.31	.94	.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
10	3	.05	.06	.13	.44	.78	.97	1.00	1.00	1.00
	10	.05	.08	.49	.94	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	30	.05	.16	.91	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	100	.05	.49	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

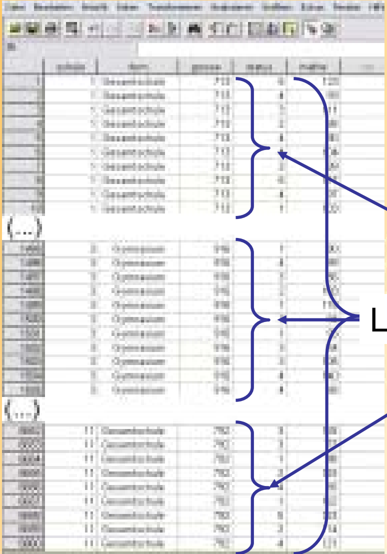
(Stevens, 1996, 240)

Möglicher Umgang mit hierarchischen Daten: Aggregieren und Disaggregieren

Disaggregation

- Level-2-Daten werden „vervielfacht“, indem jeder Level-1-Einheit der jeweilige Wert ihrer Level-2-Einheit zugewiesen wird, z.B.
- jedem einzelnen Schüler die Größe seiner Klasse,
- jedem einzelnen Angestellten das Budget seiner Abteilung,
- jedem einzelnen Messzeitpunkt der Extraversions-Wert der längsschnittlich untersuchten Person.

Disaggregation von Level-2-Daten auf Level 1



Werte der Level-2-Prädiktoren

Level-1-Prädiktor

der Level-2-

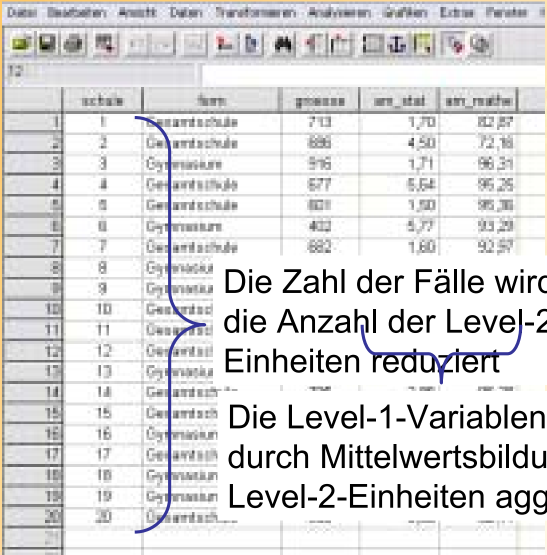
Einheit konstant

Möglicher Umgang mit hierarchischen Daten: Aggregieren und Disaggregieren

Aggregation

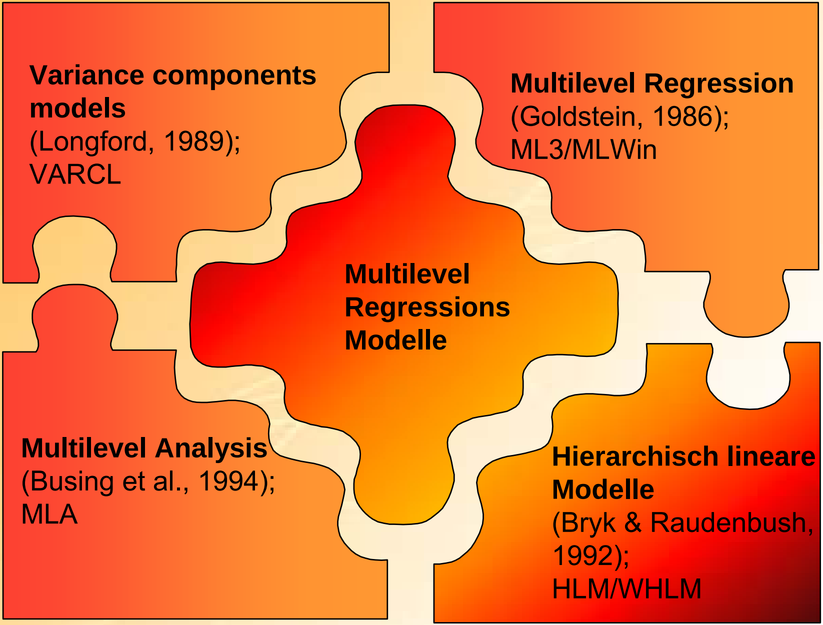
- Level-1-Daten können für die Level-2-Einheiten zusammengefasst werden, z.B.
- mittlere Matheleistung in einer Klasse,
- mittlere Fehlzeit in einer Abteilung,
- mittlere psychische Befindlichkeit über einen Monat.
- → Die für Analysen verfügbare Stichprobengröße wird auf die Anzahl der Level-2-Einheiten reduziert.

Aggregation von Level-2-Daten auf Level 1



Die Zahl der Fälle wird auf die Anzahl der Level-2-Einheiten reduziert

Die Level-1-Variablen werden z.B. durch Mittelwertsbildung innerhalb der Level-2-Einheiten aggregiert


Variance components models
(Longford, 1989);
VARCL
Multilevel Regression
(Goldstein, 1986);
ML3/MLWin
Multilevel Regressions Modelle
Multilevel Analysis
(Busing et al., 1994);
MLA
Hierarchisch lineare Modelle
(Bryk & Raudenbush, 1992);
HLM/WHLM

Weitere Bezeichnungen

- Mixed models
- contextual analysis
- **random coefficients models**

Software

Programm		Preis
HLM	Raudenbush, Bryk & Congdon (2004)	395 € (Science Plus) 470 $ (ssicentral.com)
MLA	Busing, Van der Leeden & Meijer, E. (1995)	freeware
MlwiN	Rasbash, Browne, Goldstein, Yang et al. (2000)	880 €
mixor / mixreg / mixno / mixpreg	Hedeker & Gibbons (1996a,b)	freeware
VARCL	Longford (1990)	250$
MPLUS	Muthen & Muthen (2004)	745$

Beispiel einer hierarchischen Datenstruktur mit einem Prädiktor je Ebene

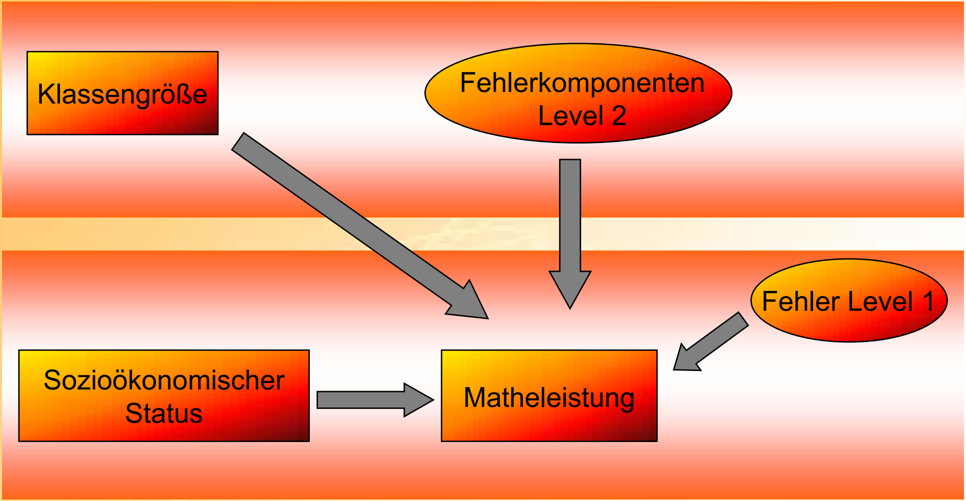
Level 1: Schüler

AV: Y = Mathematikleistung
UV Level 1: X = sozioökonomischer Status

Level 2: Klassen

UV Level 2: Z = Klassengröße

Effekte auf zwei Ebenen



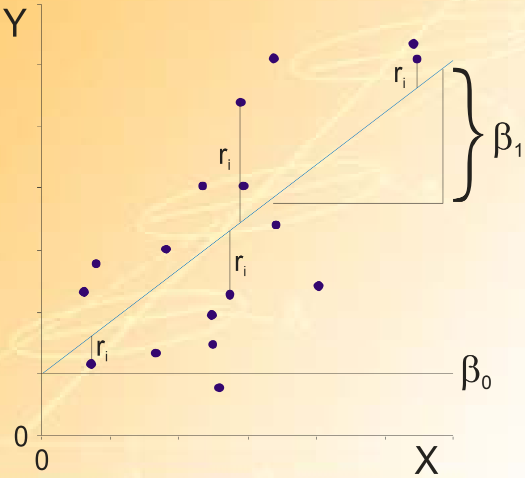
Zusammensetzung der Regressionsgleichung auf Level 1

- Standard-Regressionsgleichung:

  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + r_i$

Standard-Regressionsgleichung

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + r_i$



Zusammensetzung der Regressionsgleichung auf Level 1

- Standard-Regressionsgleichung:

  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + r_i$
- Multilevel-Regressionsgleichung auf Level 1:

  $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} X_{ij} + r_{ij}$
  - β_{0j} = Regressionskonstante (intercept),
  - β_{1j} = Steigungsparameter (slope),
  - r_i = Fehlerterm (residual error),
  - i = Index für Individuum,
  - j = Index für Level-2-Einheit.

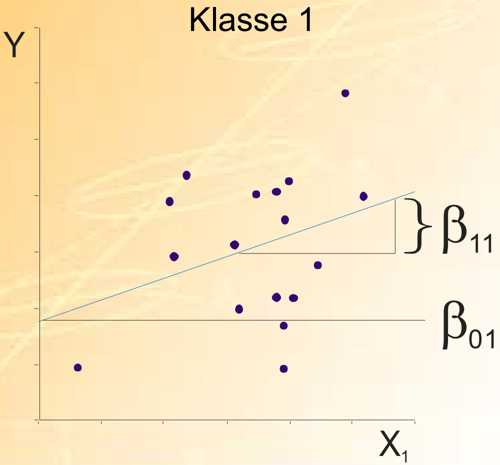
Zusammensetzung der Regressionsgleichung auf Level 1

- Jede Klasse j (Level-2-Einheit) hat eine eigene Regressionskonstante β_{0j};
- Jede Klasse j hat einen eigenen Steigungsparameter β_{1j};

→ β_{0j} und β_{1j} variieren über die Level-2-Einheiten hinweg.

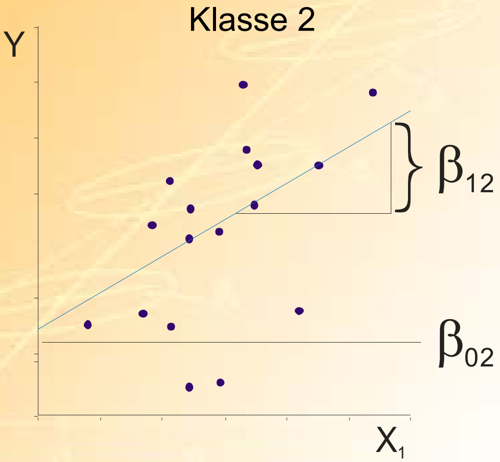
Spezifische Regressionsgleichungen innerhalb jeder Level-2-Einheit

→ β_{0j} und β_{1j} variieren über die Level-2-Einheiten hinweg.



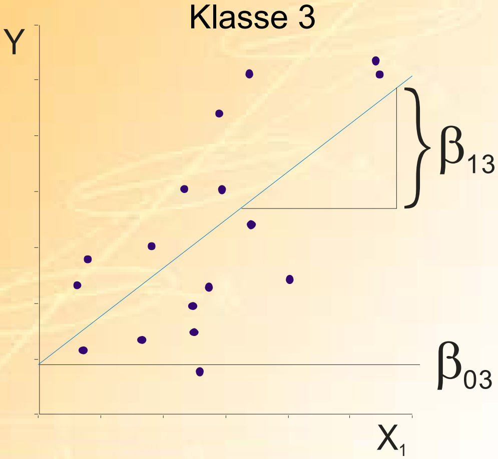
Spezifische Regressionsgleichungen innerhalb jeder Level-2-Einheit

→ β_{0j} und β_{1j} variieren über die Level-2-Einheiten hinweg.



Spezifische Regressionsgleichungen innerhalb jeder Level-2-Einheit

→ β_{0j} und β_{1j} variieren über die Level-2-Einheiten hinweg.



Regressionsgleichungen auf Level 2

Die Varianz der Regressionsparameter β_{0j} und β_{1j} wird als Funktion von Level-2-Parametern modelliert:

Level-1-Gleichung: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij}$

Level-2-Gleichungen:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}Z_j + u_{1j}$$

Die Level-2-Regressionskoeffizienten γ variieren *nicht* über die Gruppen hinweg (daher kein j-Index).

Regressionsgleichung auf Level 2: Level-2-Zufallskomponenten u_{kj}

Level-1-Gleichung: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + r_{ij}$

Level-2-Gleichungen: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z_{1j} + \mathbf{u_{0j}}$

$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}Z_{1j} + \mathbf{u_{1j}}$

- Unsystematische Variation von β_{0j} und β_{1j} wird auf Level 2 durch gruppenspezifische Zufallskomponenten mit dem Erwartungswert null modelliert:
  - u_{0j} = gruppenspezifische Zufallskomponente der Regressionskonstanten β_{0j}
  - u_{1j} = gruppenspezifische Zufallskomponente der Regressionsgeradensteigung β_{1j};

→ daher auch die Bezeichnung „random coefficients model".

Regressionsgleichung auf Level 2: Level-2-Regressionskonstanten γ_{k0}

Level-1-Gleichung: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + r_{ij}$

Level-2-Gleichungen: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z_{1j} + u_{0j}$

$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}Z_{1j} + u_{1j}$

γ_{00} = Erwartungswert von β_{0j}, wenn Z_j gleich null ist;

γ_{10} = Erwartungswert der Steigung β_{1j},
wenn Z_j gleich null ist.

Regressionsgleichung auf Level 2: Level-2-Regressionskonstanten γ_{k0}

Level-1-Gleichung: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + r_{ij}$

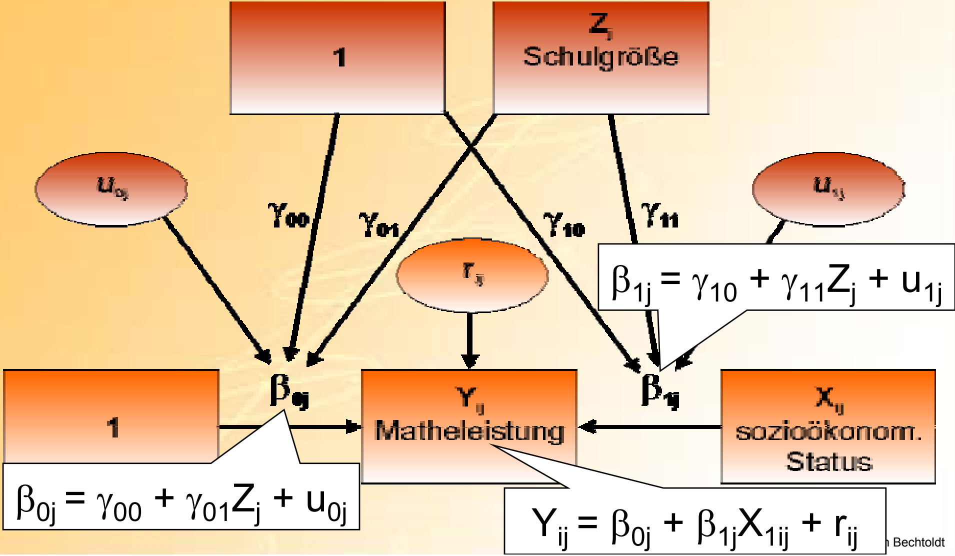
Level-2-Gleichungen: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z_{1j} + u_{0j}$

$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}Z_{1j} + u_{1j}$

Zusätzlich zur zufälligen Variation der β-Koeffizienten zwischen den Gruppen kann ein Teil der Varianz von β_{0j} und β_{1j} durch Level-2-Prädiktoren Z vorhergesagt werden:

- γ_{01} = Einfluss von Z auf β_{0j}
- γ_{11} = Einfluss von Z auf β_{1j}

Modell einer hierarchischen Regression mit zwei Ebenen



Zusammensetzung der Gleichungen auf Level 1 und Level 2

Level 1 (Individualebene):

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij}$$

Level 2 (Gruppenebene):

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}Z_j + u_{1j}$$

Einsetzen von Level 2 in Level 1:

$$Y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + u_{0i}) + (\gamma_{10}X_{1j} + \gamma_{11}Z_jX_{1j} + u_{1j}\, X_{1j}) + r_{ij}$$

Zusammensetzung der Gleichungen auf Level 1 und Level 2

$$Y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + u_{0i}) + (\gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{11}Z_jX_{ij} + u_{1j}X_{ij}) + r_{ij}$$

Umformen:

$$Y_{ij} = \underbrace{(\gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + \gamma_{10}X_j + \gamma_{11}Z_jX_{ij})}_{\text{fixed part}} + \underbrace{(u_{1j}\,X_{ij} + u_{0j} + r_{ij})}_{\text{random (error) part}}$$

Zusammensetzung der Gleichungen auf Level 1 und Level 2

$$Y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + \gamma_{10}X_j + \gamma_{11}Z_jX_{ij}) + (u_{1j}\,X_{ij} + u_{0j} + r_{ij})$$

Element	**Beschreibung**
γ_{00}	Regressionskonstante
$\gamma_{01}Z_j$	Effekt des Level-2-Prädiktors Z_j
$\gamma_{10}X_j$	Effekt des Level-1-Prädiktors X_{ij}
$\gamma_{11}Z_jX_{ij}$	**Cross-level-Interaktion** Z_jX_{ij}; resultiert daraus, dass Level-1-Regressionssteigung β_{1j} durch die Level-2-Variable Z_j beeinflusst wird.
$u_{1j}\,X_{ij}$	**Heteroskedastizität**: Fehlerterm u_{1j} ist multiplikativ verbunden mit X_{1j}; je größer X_{1j}, um so größer die Varianzen der Residuen
u_{0j}	Level-2-Zufallskomponente der Regressionskonstanten β_{0j}
r_{ij}	Individuen-spezifisches Residuum der Kriteriumsvariablen

Varianzen im Mehrebenenmodell

$$\mathrm{Var}\ (r_{ij}) = \sigma^2;\ E(r_{ij}) = 0$$

$$\mathrm{Var}\ (u_0) = \tau_{00};\ E(u_{0j}) = 0$$

$$\mathrm{Var}\ (u_1) = \tau_{11};\ E(u_{1j}) = 0$$

$$\mathrm{Var}\begin{pmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{pmatrix} = \mathrm{T} = \begin{pmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} \\ \tau_{10} & \tau_{11} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Cov}\ (r_{ij}, u_j) = 0$$

Modellvarianten

- Die Varianz in der abhängigen Variable Y_{ij} kann im Modell auf folgende Quellen zurückgeführt werden:
  - Level-1-Zufallseinflüsse r_{ij} (immer im Modell);
  - Level-2-spezifische Zufallseffekte u_k (i.d.R. im Modell);
  - systematische Effekte von Level-1-Prädiktoren;
  - systematische Gruppeneffekte von Level-2-Prädiktoren;
  - Interaktionen zwischen Level-1- und Level-2-Prädiktoren.

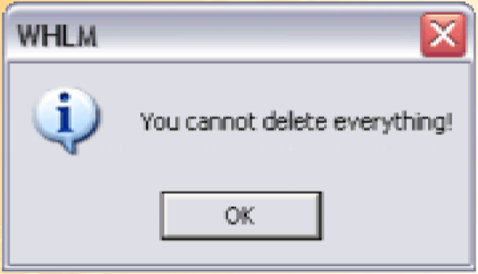
Modellvarianten

Jeder Level-1-Koeffizient β_{qj} kann auf Level 2 auf eine der drei folgenden Weisen modelliert werden:

1. als fixer Level-1-Koeffizient, z.B.: $\beta_{0j} = \gamma_{00}$;
2. als nicht zufällig variierender Level-1-Koeffizient, z.B.: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \Sigma\gamma_{0q}Z_{qj}$;
3. als zufällig variierender Level-1-Koeffizient, z.B.: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \Sigma\gamma_{0q}Z_{qj} + u_{0j}$.

Modellvarianten

- Außer dem Level-1-Residuum muss wenigstens eine Konstante ($\beta_{0j} = \gamma_{00}$) im Modell enthalten sein.



Modellvarianten:
1. Intercept-only-model

- auch: null-model, baseline-model;
- enthält nur Regressionskonstante γ_{00} und korrespondierende Residuen von Level 1 und 2;
- Level 1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij}$
- Level 2: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$

$$\rightarrow Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + r_{ij}$$

- Dient zur Berechnung der Intraclass-Korrelation ρ:

$$\rho = (\text{Zwischen-Gruppen-Varianz/Gesamtvarianz})$$

$$\rho = \tau_{00}/(\sigma^2 + \tau_{00})$$

- Ein hohes ρ zeigt an, dass eine Mehrebenenanalyse (1) indiziert und (2) lohnend ist.

Modellvarianten:
2. Means-as-outcomes Regression

- Vorhersage eines Gruppenmittelwerts durch Gruppenmerkmal (Level-2-Prädiktor)
- Level 1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij}$
- Level 2: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} Z_j + u_{0j}$

$$\rightarrow Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01} Z_j + u_{0j} + r_i$$

Modellvarianten: 3. Einfaktorielle ANCOVA mit Zufallseffekten

- Level 1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - X_{..}) + r_{ij}$
- Level 2: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$

  $\beta_{1j} = \gamma_{10}$

→ $Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{ij} - X_{..}) + u_{0j} + r_{ij}$

γ_{10} = Regressionskoeffizient von Y_{ij} auf X_{ij} (wie in normaler ANCOVA);

β_{0j} = Durchschnittsergebnis für jede Level-2-Einheit nach Kontrolle von Unterschieden in der Kovariaten X_{ij}.

Modellvarianten: 4. Random-coefficients regression Model

- Annahme: Sowohl β_{0j} als auch β_{1j} variieren zufällig über die Gruppen hinweg;
- einfachstes Modell: ohne Level-2-Prädiktoren; es wird kein Versuch unternommen, die Zufallseffekte zu erklären:
- Level 1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij}$
- Level 2: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$

  $\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$

$\rightarrow Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}X_{ij} + u_{1j}X_{ij} + u_{0j} + r_{ij}$

Modellvarianten: 5. Intercepts- and slopes-as-outcomes

- entspricht vollständigem Modell mit Level-1- und Level-2-Prädiktor(en);
- sowohl β_{0j} als auch β_{1j} variieren zufällig über die Gruppen hinweg;
- Varianz wird u.a. durch Gruppenmerkmale auf Level 2 erklärt
- Level 1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij}$
- Level 2: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + u_{0j}$
  $\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}Z_j + u_{1j}$

→ $Y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + u_{0j}) + (\gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{11}Z_jX_{ij} + u_{1j}X_{ij}) + r_{ij}$

Parameterschätzung

- Standard-Regressionsverfahren mit Parameterschätzung nach Kleinst-Quadrate-Methode verlangen, dass die Fehler
  - unabhängig,
  - normalverteilt,
  - und von konstanter Varianz sind.
- Alle Voraussetzungen sind im Multilevel-Modell verletzt,
- daher Einsatz von Maximum-Likelihood-Schätz-verfahren.

Parameterschätzung

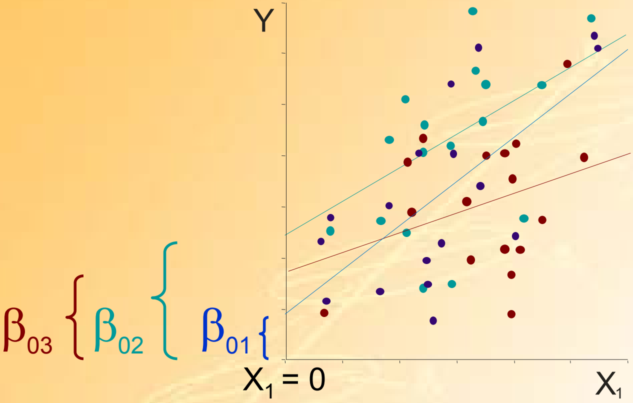
Zwei Varianten in HLM:

- *Full Maximum-Likelihood (FML)*
  - γ-Parameter werden während der Schätzung als feste Größen angenommen (Schätzung der Likelihood in Abhängigkeit von γ, σ^2 und T);
  - ermöglicht Modell-Gütevergleich genesteter Modelle über Differenzen (χ^2-Verteilung).
- *Restricted Maximum-Likelihood (RML)*
  - realitätsnäher als FML, berücksichtigt die Stichproben-abhängigkeit der γ-Parameter (Schätzung der Likelihood nur in Abhängigkeit von σ^2 und T);
  - in der Praxis sind Unterschiede der Level-1-Schätzungen gering;
  - auf Level 2 um so bedeutendere Unterschiede (höhere Werte für τ_{qq}), je geringer die Anzahl von Level-2-Einheiten.

Zentrierung von Prädiktoren

- Warum Zentrierung?
- Was passiert durch Zentrierung?
- Welche Möglichkeiten der Zentrierung gibt es?
- Welche Auswirkungen haben diese unterschiedlichen Möglichkeiten?

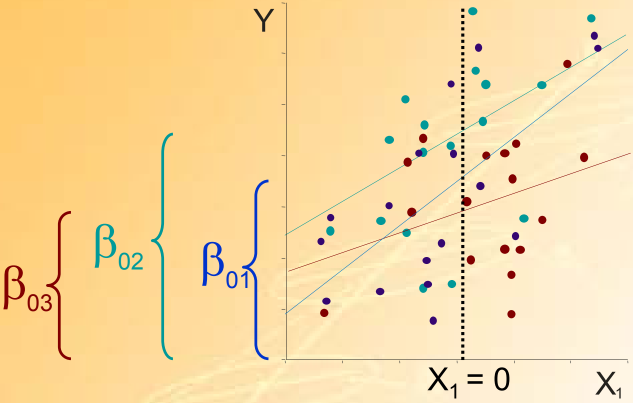
Zentrierung: Bedeutung des Intercepts



→ Level-1-Intercept wird als der Wert interpretiert, den die AV in der jeweiligen Level-2-Einheit annimmt, wenn alle Prädiktoren 0 sind.

→ Level-2-Intercept wird als der Wert interpretiert, den die AV in der Gesamtstichprobe annimmt, wenn alle Prädiktoren 0 sind.

Zentrierung:
Bedeutung des Intercepts



→ Level-1-Intercept wird als der Wert interpretiert, den die AV in der jeweiligen Level-2-Einheit annimmt, wenn alle Prädiktoren 0 sind.

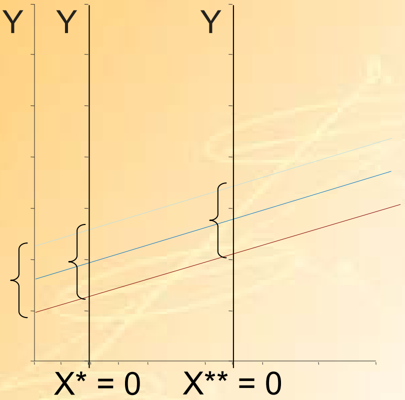
→ Level-2-Intercept wird als der Wert interpretiert, den die AV in der Gesamtstichprobe annimmt, wenn alle Prädiktoren 0 sind.

Gründe für die Zentrierung von Prädiktoren

- Viele Variablen haben keinen sinnvollen Nullpunkt (psychologische Variablen), oder es macht keinen Sinn, die AV am Nullpunkt des Prädiktors zu interpretieren (z.B. Alter von null Jahren)
- Durch Zentrierung kann dem Nullpunkt einer Skala ein sinnvoller Wert zugewiesen werden

→ Intercept und Varianz des Intercepts können inhaltlich sinnvoll interpretiert werden

Was passiert bei Zentrierung?

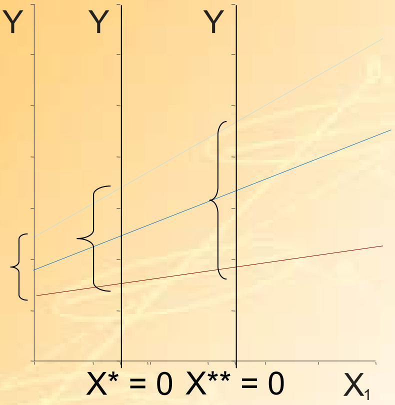


Zentrierung bedeutet, dass der Nullpunkt der Prädiktorvariablen X auf einen inhaltlich sinnvollen Wert festgelegt wird:

→ Intercept verändert seinen Wert

→ Varianz des Intercepts und des Slopes verändern sich nicht, wenn Slope nicht über die Level-2-Einheiten variiert

Was passiert bei Zentrierung?



Modelle mit random slopes:
Verschiebung der y-Achse führt nicht nur zu Veränderung des Intercepts, sondern auch zu Veränderung der Varianz des Intercepts.

Möglichkeiten der Zentrierung

- X_{ij} in natürlicher Metrik (keine Zentrierung)
- $(X_{ij} - \bar{X}_{..})$; „grand-mean-centering“
- $(X_{ij} - \bar{X}_{.j})$; „group-mean-centering“

Zentrierung am Gesamtmittelwert

- Was verändert sich technisch gesehen?
  - Intercept: absorbiert die Subtraktion des Gesamt-MW von den individuellen Werten.
  - Varianz des Intercepts und Regressionskoeffizient auf Level 2 (γ_{01}) können ihren Wert verändern, sind jedoch durch lineare Transformation leicht in ursprüngliche Koeffizienten überführbar.

Zentrierung am Gesamtmittelwert

- Was verändert sich in Bezug auf die Interpretation der Koeffizienten?
  - Intercept: es ist nun als der Wert zu interpretieren, den die AV für eine Person annimmt, deren Ausprägung des Prädiktors dem Gesamtmittelwert entspricht.
  - Varianz des Intercepts: Ausmaß, in dem die Erwartungswerte für auf die Gesamtstichprobe bezogen durchschnittliche Personen zwischen den Gruppen variieren.

Zentrierung am Gruppenmittelwert

- Bei Zentrierung am Gruppenmittelwert (group mean centering) wird der Abweichungswert jedes Individuums vom Mittelwert seiner Gruppe als Prädiktor auf Ebene 1 verwendet.

Zentrierung am Gruppenmittelwert

- Was verändert sich technisch gesehen?
- Es ändern sich ebenfalls Intercept, Varianz des Intercepts und Regressionskoeffizient auf level 2 (γ_{01}), doch in anderer Weise: es werden unterschiedliche Werte pro Level-2-Einheit abgezogen
- Dadurch ändert sich die Bedeutung des gesamten Modells.

→ Zentrierung am Gruppen-MW führt <u>NICHT zu äquivalenten Modellen</u>, d.h. die Parameter sind nicht in die ursprünglichen Koeffizienten transformierbar

Zentrierung am Gruppenmittelwert

- Was verändert sich in Bezug auf die Interpretation?
  - Intercept: Wert, den die AV für eine Person annimmt, die innerhalb ihrer Gruppe dem Durchschnitt entspricht.
  - Varianz des Intercepts: Ausmaß, in dem die Erwartungswerte für *in ihrer jeweiligen Gruppe* durchschnittliche Personen zwischen den Gruppen variieren.

Empfehlungen für die Zentrierung von Level-1-Prädiktoren

In Abhängigkeit vom Untersuchungsfokus:

- Feste Level-1-Koeffizienten
- Level-2-Koeffizienten unter Kontrolle von Level-1-Variablen
- Varianz von Level-1-Koeffizienten

Fokus auf feste Level-1-Koeffizienten

- Frage: Wie hoch ist der Zusammenhang zwischen sozialökonomischem Status eines Schülers (X) und der Mathematikleistung?
- gegeben: Stichprobe mit Schülern aus unterschiedlichen Schulen;
- gesucht: slope auf Schülerebene (Level 1), unabhängig von Schuleffekten (Level 2).

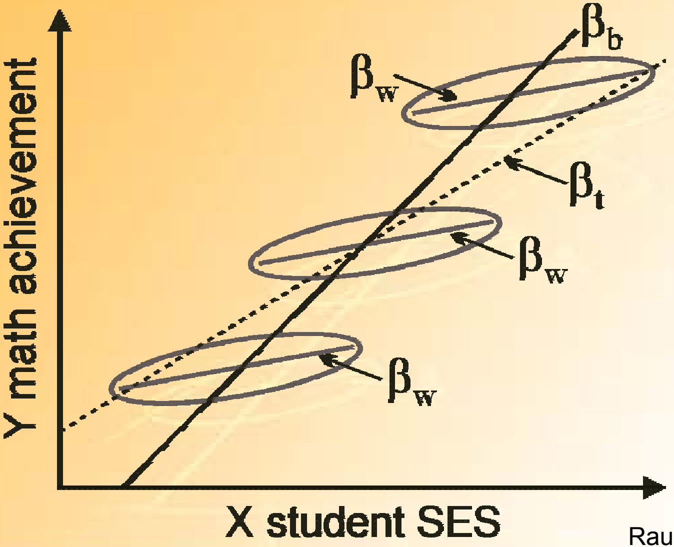
Fokus auf feste Level-1-Koeffizienten

- äquivalente Bezeichnung: pooled-within-group Regressionskoeffizient (β_w)

$$Y_{ij} - Y_{.j} = \beta_w \,(X_{ij} - X_{.j}\,) + r_{ij}$$

- group mean centering auf Level 1: ✓
- grand mean centering: ✖, denn Modell mit grand mean centering berechnet nicht β_w.

Effekte eines Level-1-Prädiktors innerhalb und zwischen Gruppen



Raudenbush & Bryk (2002)

Fokus auf feste Level-1-Koeffizienten

Hierarchisch Lineares Modell mit group mean centering auf Level 1:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - X_{.j}) + r_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

$$\rightarrow \gamma_{10} = \beta_{w}$$

Fokus auf feste Level-1-Koeffizienten

Hierarchich Lineares Modell mit grand mean centering auf Level 1:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - X_{..}) + r_{ij};$$

$$= \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - X_{.j}) + \beta_{1j}(X_{.j} - X_{..}) + r_{ij}$$

mit

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

$$\rightarrow \gamma_{10} = w_1\beta_w + w_2\beta_b / w_1 + w_2$$

Wenn $\beta_b \neq \beta_w$, sinkt durch grand mean centering die Güte der Schätzung von Regressionskoeffizienten auf Level 1.

Fokus auf Level-2-Koeffizienten unter Kontrolle von Level-1-Variablen

- Frage: Wie hoch ist der Zusammenhang zwischen Schulgröße (Z) und Mathematikleistung unter Kontrolle von sozialökonomischem Status (X) der Schüler?
- gesucht: slope auf Schulebene (Level 2), unabhängig von Schülervariablen (Level 1);
- grand mean centering auf Level 1: ✓
- group mean centering: ✖, denn group mean centering kontrolliert nicht den Einfluss von X (Level 1).

Fokus auf Level-2-Koeffizienten unter Kontrolle von Level-1-Variablen

Group mean centering kontrolliert nicht den Einfluss von X (Level 1) auf die AV:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - X_{.j}) + r_{ij}$$

$$\rightarrow Y_{.j} = \mu_j + r_{.j}$$

$$\rightarrow \mu_j = \beta_{0j}$$

Fokus auf Level-2-Koeffizienten unter Kontrolle von Level-1-Variablen

Hingegen bei grand mean centering:

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} &= \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - X_{..}) + r_{ij} \\
&= \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - X_{.j} + X_{.j} - X_{..}) + r_{ij} \\
&= \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - X_{.j}) + \beta_{1j}(X_{.j} - X_{..}) + r_{ij}
\end{aligned}
$$

Fokus auf Level-2-Koeffizienten unter Kontrolle von Level-1-Variablen

Unterschiedliche Bedeutung von β_{0j} bei group und grand mean centering:

- group mean centering

$$Y_{ij} = \mu_j + \beta_{1j}(X_{ij} - X_{.j}) + r_{ij}$$

$$\rightarrow \beta_{0j} = \mu_j = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z + u_{0j}$$

- grand mean centering

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{.j} - X_{..}) + \beta_{1j}(X_{ij} - X_{.j}) + r_{ij}$$

$$\rightarrow \beta_{0j} = \mu_j - \beta_{1j}(X_{.j} - X_{..}) = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z + u_{0j}$$

Fokus auf Level-2-Koeffizienten unter Kontrolle von Level-1-Variablen

→ Die Schätzung des Effekts von Z (Level 2) wird bei grand mean centering um den Effekt bereinigt, der auf Unterschiede in X (Level 1) zurückzuführen ist.

Schätzung der Varianz von Level-1-Koeffizienten

- Sozioökonomischer Status (X) hat einen positiven Einfluss auf die Mathematikleistung.
- Frage: Wie stark variiert dieser Einfluss zwischen Schulen (Level 2)?
- gesucht: Level-2-Varianz τ_{11};

$\rightarrow$ wenn der Gruppenmittelwert des Level-1-Prädiktors über die Gruppen hinweg variiert, wird group mean centering empfohlen.

Gesamt- vs. Gruppenzentrierung

- Ursprüngliche Metrik und Zentrierung am Gesamt-MW liefern äquivalente Modelle
- Zentrierung am Gruppen-MW ist komplexer; sie produziert nur dann äquivalente Modelle, wenn der Gruppenmittelwert der Level-1-Variable als Prädiktor auf Level 2 einbezogen wird und keine random slopes modelliert werden.

Gesamt- vs. Gruppenzentrierung

Modelle testen unterschiedliche Fragestellungen

	Gruppen-MW	Gesamt-MW
Varianz von β_{0j}	Zwischengruppen-varianz der AV	Um den Einfluss des Level-1-Prädiktors korrigierte Zwischengruppenvarianz der AV
γ_{01}	Zusammenhang zwischen Level-2-Prädiktor und AV auf Gruppenebene	Beziehung zwischen Level-2-Prädiktor und AV minus den Einfluss des Level-1-Prädiktors auf Gruppenebene

→ β_{0j}, das durch den Level-2-Effekt vorhergesagt wird, enthält je nach Zentrierung unterschiedliche Information.

Gesamt- vs. Gruppenzentrierung

- Die Entscheidung für eine Art von Zentrierung sollte v.a. unter inhaltlichen Gesichtspunkten getroffen werden.
- Die Abweichung des IQs eines Schülers vom Populationsmittelwert ist etwas substanziell anderes als die Abweichung vom Mittelwert seiner Schulklasse.

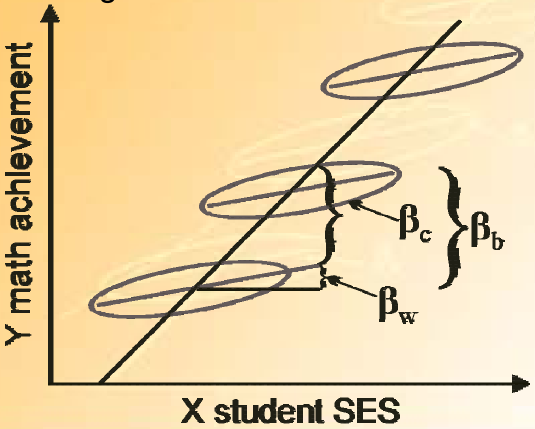
Kompositionseffekte

- „The statistical estimate of the additional effect obtained by the aggregated variable at the school level over-and-above the variable's effect at the individual level"

  (Harker & Tymms, in press)

Kompositionseffekte
Grafische Veranschaulichung

- Kompositionseffekte treten auf, wenn die Ebene-2-Einheiten sowohl hinsichtlich der UV als auch der AV heterogen sind.



Raudenbush & Bryk (2002)

Schätzung von Kompositionseffekten bei unterschiedlicher Zentrierung

Effekt	Gruppen-MW		Gesamt-MW	
total	γ_{01}	.349*	$\gamma_{01} + \gamma_{10}$	.349
level 1	γ_{10}	.188*	γ_{10}	.188*
level 2	$\gamma_{01} - \gamma_{10}$	.161	γ_{01}	.[illegible]1*

* direkt ermittelt

Level-2-Effekt im HLM-Output:
verschiedene Werte und Bedeutungen!

Level-1-Effekt im HLM-Output:
Wert und Bedeutung bleibt gleich

(Engel, 1998)

Schätzung von Kompositionseffekten bei unterschiedlicher Zentrierung

Effekt	Gruppen-MW		Gesamt-MW	
total	γ_{01}	.349*	$\gamma_{01} + \gamma_{10}$	.349
level 1	γ_{10}	.188*	γ_{10}	.188*
level 2	$\gamma_{01} - \gamma_{10}$	.161	γ_{01}	.161*

* direkt ermittelt

Der Effekt des Kontexts, der über die individuellen Zusammenhänge hinaus geht, wird bei Zentrierung am Gesamt-MW direkt ermittelt. Bei Zentrierung am Gruppen-MW kann er durch die Differenz der Koeffizienten auf beiden Ebenen berechnet werden.

Dateien in einer HLM2-Analyse

SPSS-Datendateien
getrennt für Level 1 und 2

***.mdmt-file**
(Antworten bei der Erstellung der SSM-Datei)

Erzeugen der MDM-Datei

hlm2mdm.sts
(Deskriptivstatistiken Level 1 und 2)

MDM-Datei
(„multivariate data matrix“)

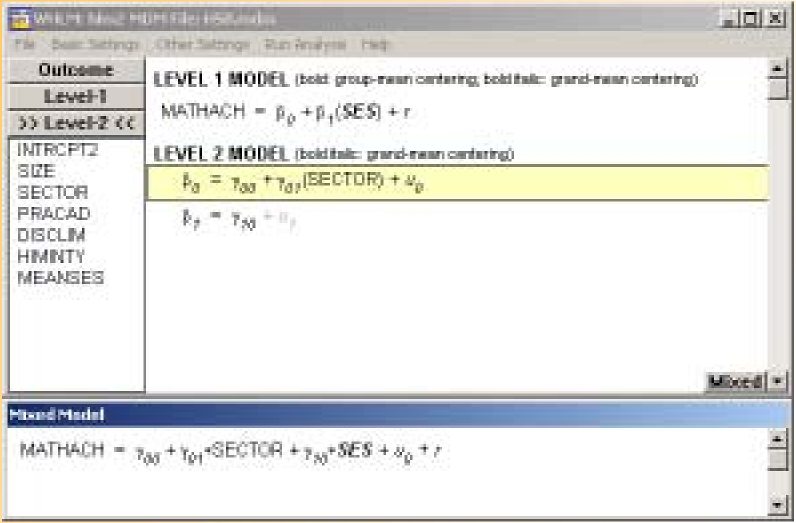
Optional
gamvc.dat, gamvcr.dat, tauvc.dat
(Div. Varianzen und Kovarianzen)

HLM-Berechnung des Modells

Optional
resfil.sps
(SPSS-Steuerdatei zur Erzeugung einer Datendatei mit Residuen)

***.txt**
HLM-Ausgabedatei

Demo der Programmoberfläche und Ausgabe: HSB-Datensatz



HLM-Ausgabe Nullmodell

```
Summary of the model specified (in equation format)
 ---------------------------------------------------

Level-1 Model

      Y = B0 + R

Level-2 Model
      B0 = G00 + U0
```

LEVEL 1 MODEL (bold: group-mean centering; bold italic: grand-mean centering)

$\text{PV1READ} = \beta_0 + r$

LEVEL 2 MODEL (bold italic: grand-mean centering)

☒ Error term for currently selected level-2 equation

☒ $\beta_0 = \gamma_{00} + u_0$

HLM-Ausgabe Nullmodell
Feste Effekte (γ-Koeffizienten)

```
The outcome variable is  MATHACH

Final estimation of fixed effects
(with robust standard errors)
----------------------------------------------------------------------------
                                        Standard             Approx.
   Fixed Effect          Coefficient    Error      T-ratio   d.f.     P-value
----------------------------------------------------------------------------
For       INTRCPT1, B0
   INTRCPT2, G00            12.636972   0.243628    51.870       159    0.000
----------------------------------------------------------------------------
```

Das Modell enthält als fixen Parameter nur den Gesamtintercept γ_{00}.

HLM-Ausgabe Nullmodell Varianzkomponenten

```
Final estimation of variance components:
--------------------------------------------------------------------------
Random Effect           Standard     Varianc
                        Deviation    Component
--------------------------------------------------------------------------
INTRCPT1,        U0       2.93501       8.61431  159   1660.23259     0.000
 level-1,        R        6.25686      39.14831
--------------------------------------------------------------------------
```

Fehlervarianz Ebene 2

Fehlervarianz Ebene 1

$$\mathrm{ICC} = \frac{\mathrm{Var}(u_0)}{\mathrm{Var}(u_0) + \mathrm{Var}(r)} = \frac{8.614}{8.614 + 39.148} = 0.18$$

HLM Beispielausgabe
Vollständiges Modell

Beispielmodell: HSB-Datensatz; Schüler in Schulen

- Y = Mathematikleistung
- Ebene-1-Prädiktor:
    - Sozioökonomischer Status (`ses`)
- Ebene-2-Prädiktor:
    - Schulträger (`sector` = katholisch vs. staatlich)
- Wechselwirkung:
    - Die Art des Schulträgers wirkt auf den SES-Effekt innerhalb der Schulen.

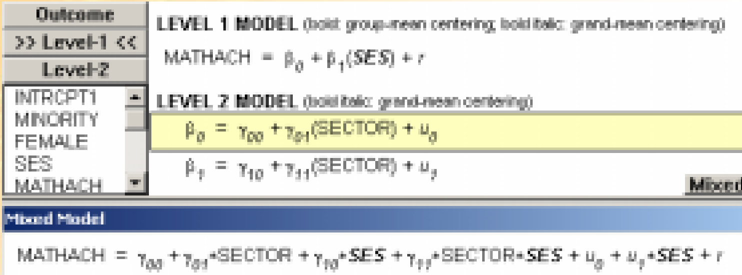
HLM Beispielausgabe Vollständiges Modell

```
The model specified for the fixed effects was:
----------------------------------------------------

  Level-1                   Level-2
  Coefficients              Predictors
----------------------   ---------------
      INTRCPT1, B0         INTRCPT2
                             SECTOR
%     SES slope, B1        INTRCPT2
                             SECTOR

'%' - This level-1 predictor has been centered around its
grand mean.
```

Tatsächlich geschätzt werden nur die festen Effekte (γ-Koeffizienten)

HLM Beispielausgabe Vollständiges Modell

```
Summary of the model specified (in equation format)
 ---------------------------------------------------
Level-1 Model
      Y = B0 + B1*(SES) + R

Level-2 Model
      B0 = G00 + G01*(SECTOR) + U0
      B1 = G10 + G11*(SECTOR) + U1
```



HLM Beispielausgabe
Feste Effekte (γ-Koeffizienten)

```
The outcome variable

Final estimation of fixed effects
                              errors)
----------------------------------------------------------------------------
                                          Standard              Approx.
                              Coefficient Error       T-ratio   d.f.       P-value
----------------------------------------------------------------------------
For        INTRCPT1, B0
   INTRCPT2, G00              11.750661   0.218684    53.733         158     0.000
     SECTOR, G01               2.128423   0.355700     5.984         158     0.000
For         SES slope, B1
   INTRCPT2, G10               2.958798   0.144                       58     0.000
     SECTOR, G11              -1.313096   0.214                       58     0.000
----------------------------------------------------------------------------
```

Standardfehler

Freiheitsgrade

T-Wert

Geschätzter Wert des Koeffizienten

„Signifikanz“ (H_0: $\gamma=0$)

HLM Beispielausgabe
Feste Effekte (γ-Koeffizienten)

```
The outcome variable is  MATHACH

Final estimation of fixed effects
(with robust standard errors)
----------------------------------------------------------------------------
                                        Standard             Approx.
   Fixed Effect           Coefficient   Error       T-ratio    d.f.     P-value
----------------------------------------------------------------------------
```

β_0

β_1

```
----------------------------------------------------------------------------
```

HLM Beispielausgabe
Feste Effekte (γ-Koeffizienten)

```
The outcome variable is  MATHACH

Final estimation of fixed effects
```

γ_{00} Wert in einer Schule wenn alle Prädiktoren = 0

γ_{01} Ebene-2-Haupteffekt Katholische Schule auf die AV auf Schulebene

β_0

```
For       SES slope, B1
   INTRCPT2, G10          2.958798   0.144092    20.534       158    0.000
     SECTOR, G11         -1.313096   0.214271    -6.128       158    0.000
-------------------------------------------------------------------------
```

HLM Beispielausgabe
Feste Effekte (γ-Koeffizienten)

```
The outcome variable is  MATHACH

Final estimation of fixed effects
(with robust standard errors)
----------------------------------------------------------------------------
                                      Standard             Approx.
   Fixed                                                   d.f.     P-value
----------------------------------------------------------------------------
For
   INTRCPT2, G0                                              158     0.000
     SECTOR, G01           2.128423   0.355700     5.984     158     0.000

----------------------------------------------------------------------------
```

γ_{10} Effekt des SES innerhalb einer Schule für `sector=0`

β_1

γ_{11} Änderung im SES-Effekt wenn `sector=1`

HLM Beispielausgabe Varianzkomponenten

Standardabweichungen der Fehlerterme

Varianzen der Fehlerterme

Freiheitsgrade

χ^2

```
Final estimation of variance components:
------------------------------------------------------------------
Random Effect           Standard    Variance    df   Chi-square P-value
                        Deviation   Component
------------------------------------------------------------------
INTRCPT1,       U0      1.95783     3.83311   158    756.04279    0 00
     SES slope, U1      0.36039     0.12988   158    178.09113    0 31
 level-1,       R       6.06326    36.76311
------------------------------------------------------------------
```

„Signifikanz“
(H_0: χ^2=df)

HLM Beispielausgabe Varianzkomponenten

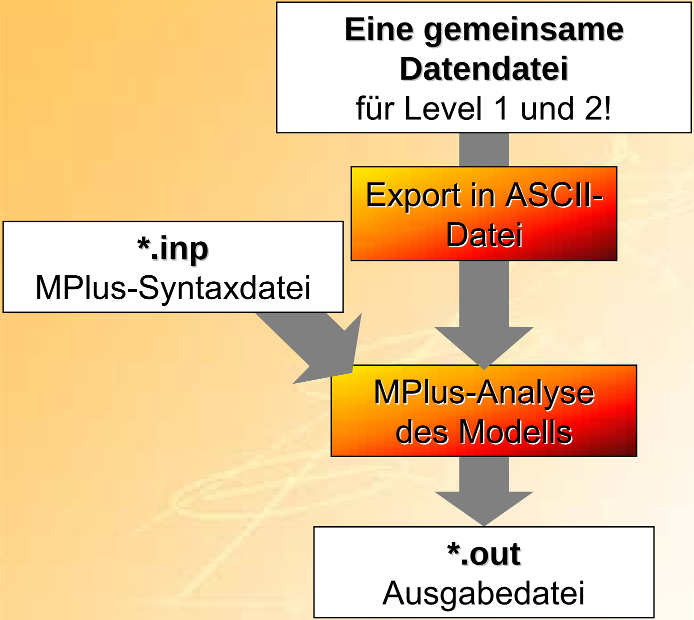
Nicht erklärte Varianz zwischen β_{0j} der Ebene-2-Einheiten (z.B. zw. Schulmittelwerten)

Nicht erklärte Varianz zwischen den schulspezifischen SES-Effekten β_{1j}

```
Final e          of variance components:
-------------------------------------------------------------------
Random Effe           Standard   Variance        Chi-square P-value
                      Deviation  Com     nt
-------------------------------------------------------------------
INTRCPT1,       U0      1.95783    3.83311  158   756.04279   0.000
     SES slope, U1      0.36039    0.12988  158   178.09113   0.131
 level-1,       R       6.06326   36.76311
-------------------------------------------------------------------
```

Nicht erklärte Varianz auf Ebene 1

Datenstruktur für MPlus



Beispiel MPlus-Syntax

```
TITLE:      HSB-Data
DATA:       FILE IS HSB.dat;
VARIABLE:   NAMES ARE id minority female ses mathach
            size sector pracad disclim himinty meanses;
            USEVAR = id ses mathach sector;
            WITHIN = ses;
            BETWEEN = sector;
            CLUSTER = id;
            CENTERING = GRANDMEAN (ses);
ANALYSIS:   TYPE = TWOLEVEL RANDOM;
MODEL:
            %WITHIN%
            ses_slope | mathach ON ses;

            %BETWEEN%
            mathach ses_slope ON sector;
```

Beispiel MPlus-Syntax

```
TITLE:      HSB-Data
DATA:       FILE IS HSB.dat;
VARIABLE:   (...)
ANALYSIS:   TYPE = TWOLEVEL RANDOM;
MODEL:
            %WITHIN%
            ses_slope | mathach ON ses;

            %BETWEEN%
            mathach ses_slope ON sector;
```

Random effect

$$MATHACH = \beta_0 + \beta_1(SES) + r$$

$$\beta_0 = \gamma_{00} + \gamma_{01}(SECTOR) + u_0$$

$$\beta_1 = \gamma_{10} + \gamma_{11}(SECTOR) + u_1$$

Beispiel MPlus-Ausgabe

```
MODEL RESULTS

                    Estimates     S.E.  Est./S.E.

Within Level
 Residual Variances
    MATHACH            36.791    0.722     50.970
```

Beispiel MPlus-Ausgabe

```
MODEL RESULTS

                     Estimates    S.E.  Est./S.E.

Between Level
 SES_SLOPE  ON
    SECTOR            -1.313     0.212     -6.191

 MATHACH    ON
    SECTOR             2.135     0.352      6.074

 Intercepts
    MATHACH           11.795     0.218     54.106
    SES_SLOPE          2.956     0.149     19.890
```

Beispiel MPlus-Ausgabe

```
MODEL RESULTS

                      Estimates     S.E.  Est./S.E.

 Residual Variances
    MATHACH               3.651    0.605      6.039
    SES_SLOPE             0.087    0.201      0.434
```

Stichprobengrößen und Robustheit der Parameter

- Empfehlungen zu Stichprobengrößen
- Ergebnisse einer Simulationsstudie

Stichprobengröße

- Kreft (1996): "30/30-Regel";
- für die Schätzung der <u>festen Effekte</u> und ihrer Standardfehler ist die Gruppenanzahl wichtiger als eine große Anzahl von Personen pro Gruppe (Van der Leeden & Busing, 1994; Mok,1995; Snijders & Bosker, 1994).
- <u>Zufallseffekte auf Level 2</u> werden bei geringer Gruppenanzahl unterschätzt; für akkurate Schätzungen sind mehr als 100 Gruppen notwendig (Van der Leeden & Busing, 1994);
- <u>Zufallseffekte auf Level 1</u> und ihre Standardfehler werden generell angemessen geschätzt.

Robustheit der Parameter: Simulationsstudie

- Welchen Einfluss haben Gruppengröße, Gruppenzahl und ICC auf die Schätzung der festen Effekte und Zufallsparameter?
- Beispiel: Simulationsstudie für Zwei-Ebenen-Modell mit jeweils einer normalverteilten UV auf Level 1 (X) und Level 2 (Z) (Hox & Maas, 2005):

$$Y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + u_{0i}) + (\gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{11}Z_jX_{ij} + u_{1j}X_{ij}) + r_{ij}$$

Robustheit der Parameter: Simulationsstudie

Bedingungen:

- Gruppengröße mit 5, 30 und 50 Einheiten
- Gruppenanzahl von 30, 50 und 100
- ICC von ρ = .10, ρ = .30 und ρ = .50

- Auswertungskriterien: relativer Bias, d.h. $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$, und 95%-Konfidenzintervall

Relativer Bias der festen Effekte

Number of Groups	Group Size	ICC low $\rho = .10$	ICC medium $\rho = .30$	ICC high $\rho = .50$
30	5	.998	1.007	.992
	30	1.001	1.002	1.003
	50	.998	1.000	1.003
50	5	1.003	1.000	1.000
	30	1.001	1.002	1.001
	50	1.000	1.002	.997
100	5	1.000	.999	.998
	30	1.001	1.000	1.001
	50	1.001	.999	1.000

Relativer Bias der Level-2-Zufallseffekte

Number of Groups	Group Size	ICC low $\rho = .10$	ICC medium $\rho = .30$	ICC high $\rho = .50$
30	5	1.037	1.009	.992
	30	1.010	1.004	.993
	50	1.004	1.005	.994
50	5	1.008	.997	.994
	30	.997	.991	1.011
	50	1.006	1.010	1.000
100	5	1.004	.998	1.006
	30	1.010	.997	1.003
	50	.997	1.000	1.001

Relativer Bias der Level-1-Zufallseffekte

Group Size	Bias
5	.997
30	1.000
50	1.000

Relativer Bias der Level-1-Zufallseffekte

Number of Groups	Group Size	ICC low $\rho = .10$	ICC medium $\rho = .30$	ICC high $\rho = .50$
30	5	.990	.998	.999
	30	.998	1.000	.999
	50	1.000	1.002	1.000
50	5	.998	1.005	.995
	30	1.001	1.001	1.001
	50	.999	1.000	.999
100	5	.997	.995	.998
	30	1.000	1.000	1.000
	50	1.001	1.001	1.001

Anteil Konfidenzintervalle, die den wahren Parameter nicht einschließen

	Number of Groups		
Parameter	30	50	100
u_0	.089	.074	.060
u_1	.088	.072	.057
r	.058	.056	.049
Intercept	.064	.057	.053

	Size of Groups		
Parameter	5	30	50
u_1	.074	.075	.074
r	.061	.051	.051

Fazit

- Die 30/30-Regel gilt nur für die Schätzung der festen Effekte und Zufallseffekte auf Level 1;
- Zufallseffekte auf Level 2 werden bei nur 30 Level-2-Einheiten unterschätzt;
- empfohlene Stichprobengröße bei besonderem Interesse an Cross-Level-Interaktionen: 50/20;
- ... bei besonderem Interesse an Zufallseffekten, deren (Ko-)Varianzen und Standardfehler: 100/10.