Goethe-Universität
Frankfurt am Main
Institut für Philosophie

Sommer 2019
7.10.2019

PHILOSOPHISCHE LOGIK
4: KONDITIONALE

ANDRÉ FUHRMANN

Notation

$P, Q, R, ... \in$ ATM; $A, B, C, ... \in$ FML; $X, Y, Z, ... \subseteq$ FML

$\models$	Wahrmacher, Gültigkeit, Folgerung
$\sqsupset$	would-counterf.
$>$	might-
$\multimap$	strict imp.
(W, R, I)	Modell
$a, b, c, ..., x, y, z$	$\in W$
X, Y, Z	$\subseteq W$
$\mathcal{M}$	Modell
$[\![A]\!]_I, [\![A]\!]$	Prop A
$R_{[\![A]\!]}, R_X$	Relation (für $\sqsupset$)
a^A	A-Entkonditionalisierung (kan. Modell)
$R_{[A]}$	im kanonischen Modell
$\mathfrak{S}$	Sphärenfunktion
$\mathfrak{S}_a$	Sphärenmenge zentriert auf a
S, S', S''	Sphären
$\min_a$	minimale Sphäre (in $\mathfrak{S}_a$)
μ_a	minimaler Schnitt (in $\mathfrak{S}_a$)
$\succ$	indikativisches Konditional
p	Wahrscheinlichkeit
p_B	bedingte Wahrscheinlichkeit
$\overline{\mathrm{p}}$	Unwahrscheinlichkeit (Ungewißheit)
$\overline{\mathrm{p}}_B$	bedingte Unwahrscheinlichkeit
$\models_{\mathrm{p}}$	Wahrscheinlichkeitsfolgerung
$\Vdash$	Ableitbarkeit in Adams' System
zz	zu zeigen

1. Verschiedene Arten von "Wenn ..., dann ..."

Konditionalsätze, kurz *Konditionale*, sind Sätze der Form

(1) Wenn A, dann B.

Den Wenn-Teil des Satzes nennen wir das *Antezedens*, den Dann-Teil das *Konsequens* des Konditionals. Konditionale können grammatisch in einem indikativischen ("realis") oder einem konjunktivische ("irrealis", engl. *subjunctive*) Modus stehen:

(Ind) *Realis*: Wenn A der Fall ist, dann ist B der Fall.
(Konj) *Irrealis*: Wenn A der Fall wäre, dann wäre B der Fall.

Daß der grammatische Unterschied zugleich einen semantischen markiert, sieht man sehr schnell an Paaren wie den folgenden:

(2) Wenn die Suppe versalzen ist, dann habe ich es nicht bemerkt.
(3) Wenn die Suppe versalzen wäre, dann würde ich es nicht bemerken.

(4) Wenn er ihr bescheid gesagt hat, dann hat sie es nicht gehört.
(5) Wenn er ihr bescheid gesagt hätte, dann würde sie es nicht gehört haben.

(6) Wenn Aigner nicht das Tor geschossen hat, dann war es Meier.
(7) Wenn Aigner nicht das Tor geschossen hätte, dann wäre es Meier gewesen.

Die beiden Sätze eines Paares unterscheiden sich nur im Modus. Zu jedem Paar läßt sich mühelos eine passende Geschichte – ein Kontext – denken, so daß der erste Satz wahr und der zweite Satz falsch ist. (Man stelle sich vor, die Suppe sei nicht versalzen, oder ich habe nichts bemerkt; oder er habe nicht Bescheid gegeben, oder sie habe nichts gehört; oder einer von beiden habe ein Tor geschossen.) Also haben Konditionale im Indikativ im allgemeinen andere Wahrheitsbedingungen als Konditionale im Konjunktiv.

Für die Wahrheitsbedingung eines indikativischen Konditionals (Ind) haben wir eine einfache Kandidatin: "Wenn A, dann B" ist genau dann wahr, wenn die materiale Implikation, $A \to B$ wahr ist, d.h. wenn A falsch oder B wahr ist. Diese Position ist nicht unmittelbar überzeugend. Ist zum Beispiel der Satz (6) schon allein deshalb wahr, weil Aigner ein Tor geschossen hat? Offensichtlich müssen wir mehr sagen, um die Identifizierung des materialen mit dem indikativischen Konditionals auch nur annähernd plausibel zu machen. So müsse wir insbesondere erklären, warum die sogenannten Paradoxien der materialen Implikation der Identifizierung nicht im Wege stehen – d.h. eine Theorie anbieten, die erklärt warum wir uns irren, wenn wir dies glauben, und möglichts auch, warum dieser Irrtum so naheliegend ist. Auf eine solche Irrtumstheorie werden wir zurückkommen.

Der Vorschlag, das konjunktivische mit dem materialen Konditional zu identifizieren, ist sicher aussichtslos. Das materiale Kondition wird nur unter einer Bedingung falsch: Wenn das Antezedens wahr und das Konsequens falsch ist. Betrachten wir jedoch die Sätze (3), (5) und (7) im Kontext der Geschichten, die wir uns soeben dazu gedacht haben, dann haben wir diese aus einem anderen Grunde für falsch befunden, als daß es sich tatsächlich so verhielte, daß das Antezedens wahr und das Konsequens falsch wäre. Ob (3) falsch ist, hängt nicht davon ab, ob die Suppe versalzen *ist*.

Es gibt einen weiteren Grund, warum Konditionale der Form (Konj) im allgemeinen keine materialen Implikationen sein können. Letzere sind schon dann wahr, wenn das Antezedens falsch ist. Konditionale im Irrealis werden aber typischerweise gerade dann gebraucht, wenn der Sprecher davon ausgeht, daß das Antezedens tatsächlich falsch ist. Wären diese Konditionale im materialen Sinne zu verstehen, dann wären sie unterschiedslos wahr. D.h. konjunktivische Konditionalen könnten im typischen Fall keine Informationen vermitteln. Wenn die Suppe nicht versalzen ist, dann wäre unter der Annahme, daß konjunktivische Konditionale materiale Implikationen wiedergeben,

(8) Wenn die Suppe versalzen wäre, dann würde ich es nicht bemerken

genauso wahr wie

(9) Wenn die Suppe versalzen wäre, dann würde ich es bemerken.

Aber im gedachten Kontext sehen wir die Sache sicher anders: (8) ist falsch und (9) ist wahr.

Jacksons Tatächlichkeitsargument. Wenn konjunktivische Konditionale keine materialen sind, was für Konditionale sind es dann? Betrachten wir das folgende Paar:

(10) Wenn Peter zwei Meter groß wäre, dann wäre er größer als er es tatsächlich ist.

(11) $^?$Wenn Peter zwei Meter groß ist, dann ist er größer als er es tatsächlich ist.

Im Gegensatz zum ersten, konjunktivischen Konditional, ist das zweite, im Indikativ irgendwie verunglückt. (Wir deuten das hier und im folgenden durch ein hochgestelltes Fragezeichen an.) Das Unglück ist kein grammatisches, denn (11) ist syntaktisch richtig gebildet. Der Satz (11) ist in einer Weise fehlerhaft, die jedem Sprecher gleich auffällt – auch wenn dieser nicht sogleich sagen kann, welche Regel hier verletzt ist.

Ganz allgemein ist es so, daß bei allen Paaren der Form

(12) Wenn ... der Fall wäre, dann wäre einiges anders als es (tatsächlich) ist.

(13) $^?$Wenn ... der Fall ist, dann ist einiges anders als es (tatsächlich) ist.

das erste, konjunktivische Konditional sinnvoll gebraucht werden kann, während man sich für das zweite, indikativische Konditional keinen sinnvollen Gebrauch vorstellen kann. Woran liegt das? Nehmen wir einmal an, Peter behauptet:

(14) Ich reiche nicht an die Lampe heran.

Wenn Peter jetzt weiter behauptet:

(15) Wenn ich größer als 2 Meter wäre, dann würde ich an die Lampe heranreichen,

dann behauptet er mit (15) auch:

(16) Wenn ich größer als 2 Meter wäre, dann wäre einiges anders als es (tatsächlich) ist.

Wenn Peter jedoch nach (14) behauptet:

(17) Wenn ich größer als 2 Meter bin, dann reiche ich an die Lampe heran,

dann will er damit sicher nicht auch sagen:

(18) $^?$Wenn ich größer als 2 Meter bin, dann ist einiges anders als es (tatsächlich) ist.

Der letzte Satz ist allenfalls eine merkwürdige Weise, die Falschheit des Antezedens auszudrücken. Das tut (im typischen Fall) auch (16) – aber eben auf eine Weise, die überhaupt nicht merkwürdig ist. Das Antezedens im Konjunktiv lädt zur Betrachtung möglicher Welten ein, in denen die Dinge anders sein können als sie es tatsächlich, d.h. in der aktualen Welt, sind. In einer solchen kontrafaktischen Welt ist es wahr, daß in ihr einiges anders ist als in der Welt, auf die das "tatsächlich" verweist. Würde das Antezedens im Indikativ ebenfalls zur Betrachtung möglicher Welten einladen, dann müßte es im Prinzip ebenfalls möglich sein, mit dem Konsequens etwas Wahres zu sagen, nämlich daß einiges anders ist als es ist. Aber das Konsequens von (18) kann nicht wahr sein: Nichts ist anders als es ist. Also lädt das Antezedens eines indikativischen Konditionals nicht zur Betrachtung bloß möglicher Welten ein.

In Sätzen nach dem Muster (12) verweist das "tatsächlich" im Konsequens zurück auf die aktuale Welt, nachdem durch das Antezedens mögliche Welten in den Focus geraten sind. Humberstone [27, pp. 930f.] weist darauf hin, daß das "tatsächlich" diese Rolle auch im Antezedens spielen kann.

(19) Wenn Peter größer wäre als er es (tatsächlich) ist, dann würde er an die Lampe heranreichen.
(20) $^?$Wenn Peter größer ist als er es (tatsächlich) ist, dann reicht er an die Lampe heran.

Wieder hat das Antezedens des indikativischen Gegenstücks (20) zu (19) keine Chance, wahr zu sein. Die naheliegende Erklärung ist: Dem konjunktivische Konditional (19) gelingt es im Antezedens alternative Möglichkeiten ins Auge zu fassen (die dann im Hinblick auf das Konsequens untersucht werden sollen). Dem Konditional (20) im Indikativ geling das nicht; hier wird die aktuale Welt gar nicht verlassen. Die indikativische Konstruktion ist nicht dazu geeignet, alternative Möglichkeiten ins Spiel zu bringen.

Jacksons [29, p. 129] faßt das so zusammen: Konjunktivische Konditionale sind mögliche Welten-Konditionale, indikativische sind es nicht. Der erste Teil dieser These findet bei Philosophen weitgehend Zustimmung. Der zweite Teil ist umstritten. Wir werden später (im Abschnitt über indikativische Konditionale) auf Jacksons Tatsächlichkeitsargument zurückkommen.

Konjunktiv und irrealis. Die Unterscheidung zwischen Konditionalen im Indikativ und solchen im Konjunktiv ist eine grammatische Unterscheidung, welche – so haben wir gesehen – einen wichtigen semantischen Unterschied markiert. Viele Autoren in der Tradition der Philosophischen Logik ziehen es vor, die indikativischen Konditionalsätze den *kontrafaktischen* gegenüberzustellen. Grob gesagt, sind die konjunktivischen Konditionalsätze diejenigen, in denen das Antezedens typischerweise kontrafaktisch ("irreal") zu verstehen ist. Auf den ersten Blick ist das eine merkwürdige Kontrastierung, denn "indikativisch" bezeichnet eine syntaktische Eigenschaft während "kontrafaktisch" eine semantische Eigenschaft bezeichnet. Es ist nun einserseits tatsächlich so, wie wir gerade gesehen haben, daß ein Sprecher einem Hörer ein kontrafaktisches Antezedens nur mit einem konjunktivischen, nicht mit einem indikativischen Konditional vor Augen stellen kann. Andererseits gilt aber nicht umgekehrt, daß jeder gute Gebrauch eines konjunktivischen Konditionale die Falschheit des Antezedenz unterstellt. Man betrachte:

(21) Wenn Peter die Pizza holen würde, dann hätte Ulla Zeit zum Baden.
(22) Wenn Peter sich entschuldigen würde, dann würde Ulla ihm sicher verzeihen.

Kein Sprecher muß diese Sätze zurückziehen, wenn Peter tatsächlich eine Pizza holt bzw. sich entschuldigt. Das Tempus scheint hier eine Rolle zu spielen, denn Äußerungen der in die Vergangenheit transponierten Sätze,

(23) Wenn Peter die Pizza geholt hätte, dann hätte Ulla Zeit zum Baden gehabt.
(24) Wenn Peter sich entschuldigen hätte, dann würde Ulla ihm sicher verziehen haben.

geben wohl typischerweise zu verstehen, daß Peter keine Pizza geholt bzw. sich nicht entschuldigt hat.

Die syntaktische Markierung semantischer Unterscheidungen ist offenbar auch im bereits eingeschränkten Bereich der konjunktivischen Konditionalsätze eine recht komplexe Angelegenheit. Wir werden hier keine befriedigende Klärung dieser Frage herbeiführen können. Wir werden einfach diejenigen konjunktivischen Konditionale, deren Antezedens in typischen Kontexten zur Betrachtung kontrafaktischer Möglichkeiten auffordert, "kontrafaktische Konditionale" nennen. Für diese Konditionale werden wir eine semantische Theorie angeben. Damit bleibt zwar strenggenommen offen, genau welche syntaktischen Formen in den Anwendungsbereich der Theorie fallen. Aber welche konjunktivischen Formen in typischen Kontexten paradigmatische Fälle kontrafaktischer Konditionale sind, dürfte hinreichend deutlich sein.[1]

[1] Das Reich der Konditionalsätze ist von schwer zu ordnender Vielfalt. Hier sind einige weitere Konditionale:

> Selbst wenn er es getan hätte, so könnte er nicht belangt werden.
> Selbst wenn er es getan hat, so kann er nicht belangt werden.
> Kekse sind auf dem Tisch, wenn Du welche möchtest.
> Wenn Peter Klassensprecher wird, dann wird Claudia Papst.

2. Strikte Konditionale

Ein Satz wie

(25) Wenn Peter eingeladen wäre, würde er jetzt hier sein

ist von der Form

Wenn A der Fall wäre, dann würde B der Fall sein.

Solche Sätze, d.h. kontrafaktische Konditionale, wollen wir kurz so notieren:[2]

$$A \sqsupset B.$$

Wir wissen, daß es für die Beurteilung von $A \sqsupset B$ nicht ausreicht, die Wahrheitswerte von A und B in der aktualen Welt zu betrachten. Andere mögliche Welten müssen ebenfalls in den Blick genommen werden. Angenommen (25) ist wahr. Dann ist es sicher nicht logisch zwingend, daß Peter in jeder Welt, in der er eingeladen ist, der Einladung auch folgt. Das Konditional (25) fordert nicht, daß es keine logische Möglichkeit gibt, in der A wahr und B falsch ist. Aber, so könnte man vorschlagen, das Konditional behauptet, daß es in einem eingeschränkteren Sinn von Möglichkeit, keine Möglichkeit gibt, daß A wahr und B falsch ist: In allen als naheliegend zu betrachtenden ("plausiblen") Möglichkeiten ist $A \wedge \neg B$ nicht der Fall. Wenn wir eine Relation R zwischen jeweils zwei Welten so interpretieren:

Rab gdw b, von a aus betrachtet, eine naheliegende Möglichkeit ist,

dann können wir die soeben vorgeschlagene schematische Wahrheitsbedingung für $A \sqsupset B$ so festhalten:

(26) $a \models A \sqsupset B$ gdw $\forall b$: wenn Rab und $b \models A$, dann $b \models B$.

(Hier deutet $\models$ die Wahrmacherrelation in Modellen an: Für $a \models A$ lies "A ist in der Welt a wahr.").

Nun ist die rechte Seite von (26) nichts anderes als die Wahrheitsbedingung für die materiale Implikationen im Skopus eines Notwendigkeitsoperators, welchen wir hier versuchsweise als Plausibilitätsoperaor interpretieren wollen:

$a \models \Box(A \to B)$ gdw $\forall b$: wenn Rab dann $b \models A \to B$.

Die materiale Implikation im Skopus eines solchen Operators nennt man auch *strikte Implikation* (nach C.I. Lewis). Diese können wir durch eine neue, definierte zweistellige Verknüpfung wiedergeben:

$$A \mathrel{-\!\!\!\ni} B := \Box(A \to B).$$

Der hier betrachtete Vorschlag lautet also: Das kontrafaktische Konditional $\sqsupset$ hat die Wahrheitsbedingung der strikten Implikation $\mathrel{-\!\!\!\ni}$, wobei wir die

Wir werden uns hier mit solchen Konditionalen nicht beschäftigen und verweisen auf die einschlägige Literatur, z.B. [6] und [27].

[2] Diese Notation geht auf Segerberg zurück. Andere Autoren benutzen das von Lewis [35] eingeführte Symbol $\Box\!\!\rightarrow$.

Zugangsrelation in der oben angedeuteten Weise interpretieren wollen. In der Frühzeit der Behandlung kontrafaktischer Konditionalsätze wurde dieser Vorschlag gelegentlich auf die eine oder andere Weise gemacht. Es läßt sich recht schnell zeigen, daß dies sicher ein falscher Weg ist. Wir nutzen die Gelegenheit, um ein wenig die logische Struktur strikter Implikationen zu erkunden. Schließlich handelt es sich bei strikten Implikation um eine wichtige Klasse von indikativischen Konditionalen, die wir bisher noch gar nicht erwähnt haben.

Die Semantik strikter Konditionale. Wir betrachten eine Sprache mit den üblichen wahrheitsfunktionalen Junktoren, welche um den Junktor $\multimap\!\!\!\ni$ (strikte Implikation) erweitert ist. Eine solche Sprache interpretieren wir in Modellen

$$(W, R, I)$$

auf Kripke-Rahmen (W, R).

> *Erinnerung*:[3] Ein *Kripke-Rahmen* besteht aus einer nichtleeren Menge W (Punkte, Indizes, "mögliche Welten") sowie einer Relation $R \subseteq W \times W$ (die Zugangsrelation zwischen Punkten). Auf einem Rahmen (W, R) definieren wir ein *Modell* (W, R, I), indem wir eine *Interpretation* I angeben, welche jedes Atom der Sprache an einem Punkt auf genau einen der Werte 0 oder 1 abbildet. Eine *Wahrmacherrelation* $\models$ baut auf der Interpretation I der Atome auf und erlaubt rekursiv den Wahrheitswert einer jeden Formel an jedem Punkt zu bestimmen. Die Rekursion für $\models$ beginnt mit $a \models P$ gdw $I(P, a) = 1$ (für Atome P) und setzt sich dann für wahrheitsfunktionale Zusammensetzungen in üblicher Weise fort. Für strikte Implikationen haben wir die oben bereits eingeführte Bedingung ($\multimap\!\!\!\ni$). — Nun sagen wir, daß eine Formel B aus einer (möglicherweise leeren) Menge X von Annahmen logisch genau dann *folgt* ($X \models B$), wenn an jedem Punkte a eines (beliebigen) Modells gilt: Wenn $a \models A$ (für jede Formel $A \in X$), dann $a \models B$.[4]
>
> (*Ende der Erinnerung.*)

Die Wahrheitsbedingung ($\multimap\!\!\!\ni$) gibt die allgemeinste semantische Definition der strikten Implikation ab. Wir können, darauf aufbauend, den Bereich strikter Implikationen differenzieren, indem wir die Relation R unter Bedingungen stellen. So schränken wir die Menge der zu betrachtenden Rahmen und also Modelle ein, was dazu führt, daß mehr Paare (X, A) als logische Folgerungen ausgezeichnet werden. Was unsere Hypothese, kontrafaktische seien strikte Konditionale, zu Fall bringt, ist jedoch nicht der Umstand, daß sie *zu wenige* Folgerungen generiert, sondern – umgekehrt – daß sie ohne weiteres Folgerungen als logische auszeichnet, die es unter der beabsichtigten Interpretation sicher nicht sind. Die Relation R unter weitere Bedingungen zu stellen, kann die Sache daher nicht besser machen. Hier

---

[3] Vgl. das Kapitel über Modallogik.

[4] Die Relation der Folgerung ist natürlich relativ zu einer Klasse von Rahmen auf denen die betrachteten Modelle aufsitzen. Der Einfachheit halber möge der Leser hier an die Klasse *aller* Rahmen denken.

sind einige Folgerungen, die für jede Art strikter Implikation, jedoch nicht für kontrafaktische Konditionale gelten:

BEOBACHTUNG 1. *In beliebigen Klassen von Kripke-Rahmen gilt:*
1. $A \multimap B, B \multimap C \models A \multimap C$ *(Trans.itivität);*
2. $A \multimap B \models A \wedge C \multimap B$ *(Verst.ärkung des Antezedens);*
3. $A \multimap B \models \neg B \multimap \neg A$ *(Kontrap.osition).*

BEWEIS. *Ad* 1: Wir nehmen an, daß

$$(1)\ a \models A \multimap B \quad \text{und} \quad (2)\ a \models B \multimap C.$$

Zz. $a \models A \multimap C$. Also nehmen wir ferner an, daß

$$(3)\ Rab \text{ und } b \models A.$$

(Zz. $b \models C$.) Aus (1) und (2) folgt jeweils:

$$(1') \qquad \forall x : Rax \ \&\ x \models A \ \Rightarrow\ x \models B$$
$$(2') \qquad \forall y : Ray \ \&\ y \models B \ \Rightarrow\ x \models C$$

Aus (1′) und (3) folgt (4) $b \models B$, woraus mit (2′) und (3) die gewünschte Konklusion $b \models C$ folgt.

Ad 2 und 3: Ähnlich. ∎

Nun gehören aber (Trans), (Verst) und (Kontrap) zu den auffälligsten Folgerungsverhältnisse, die wir von kontrafaktischen Konditionalen *nicht* erwarten. Die folgenden, intuitiv ungültigen Folgerungen sind Instanzen dieser Prinzipien:

(27) Wenn der Kamin brennen würde, dann wäre es gemütlich.
Wenn das Haus brennen würde, dann würde der Kamin brennen.
?Also: Wenn das Haus brennen würde, dann wäre es gemütlich.

(28) Wenn Peter da gewesen wäre, wäre es eine nette Party geworden.
?Also: Wenn Peter da gewesen und vom Balkon gestürzt wäre, dann wäre es eine nette Party geworden.

(29) Wenn Peter in Frankreich leben würde, würde er nicht in Paris wohnen.
?Also: Wenn Peter in Paris wohnen würde, würde er nicht in Frankreich leben.

Wir können uns leicht Situationen vorstellen, in denen die Prämissen jeweils wahr sind. Mindestens einige dieser Situationen sind aber solche, in denen die jeweilige Konklusion falsch ist. Die Folgerungsmuster, die durch (27), (28) bzw. (29) instantiiert werden, nämlich (Trans), (Verst) und (Kontrap), sind daher nicht gültig für kontrafaktische Konditionale. Diese Muster sind aber gültig für jede strikte Implikation. Also können kontrafaktische Konditionale keine strikten Implikationen sein.

Strikte und variabel strikte Konditionale. Als Teil unseres Vorschlags, kontrafaktische im Sinne strikter Konditionale zu deuten, hatten wir eine bestimmte Interpretation der Art von Notwendigkeit, die bei kontrafaktischen Konditionalen im Spiel sein könnte, unterstellt: Im strikten Konditional $\Box(A \to B)$ sollte der Operator $\Box$ zur Betrachtung der materialen Implikation $A \to B$ in "plausiblen" Welten auffordern. D.h. wenn wir fragen, ob $A \sqsupset B$ in einer Welt a wahr ist, dann sollten wir – so lautetet der Vorschlag – nach der Wahrheit von $A \to B$ nicht in schlechthin allen Welten fragen, sondern nur in solchen, die aus der Sicht von a als *plausible* alternative Möglichkeiten in Frage kommen. Aber, ganz unabhängig davon, daß die kontrafaktischen Konditionale aus den soeben dargelegten Gründen gar keine strikten Konditionale *irgendeiner* Art sein können, kann dieser Vorschlag auch aus einem anderen Grunde nicht richtig sein. Denn wenn das Antezedens A selbst eine Annahme macht, die wir in a für unplausibel halten, dann wäre dem Vorschlag zufolge, A in allen zu betrachtenden, d.h. a-plausiblen Welten falsch und also $A \to B$ in allen diesen Welten wahr; also wäre $A \sqsupset B$ in a wahr, gleichgültig wofür B steht.

An einem Beispiel sei das illustriert. Zu dem Satz,

(30) Wenn Peter über die Brüstung steigen würde, dann würde er sich in Lebensgefahr begeben,

können wir uns leicht eine Situation denken, in der er etwas Wahres aussagt. Im Sinne der oben betrachteten Hypothese könnte man etwa sagen: In allen plausiblen alternativen Möglichkeiten ist das einfache Konditional (material verstanden),

(31) Wenn Peter über die Brüstung steigt, dann begibt er sich in Lebensgefahr,

wahr. Unplausibel – und daher von der Betrachtung auszuschließen – sind zum Beispiel Welten in denen Peter wie eine Feder schweben kann. Aber was ist dann mit Sätzen wie:

(32) Wenn Peter über die Brüstung steigen würde und schweben könnte, dann würde er sich in Lebensgefahr begeben ?

Die Hypothese forderte, daß wir mit jeder Welt a eine Menge $R(a) = \{b \in W : Rab\}$ von plausiblen Alternativen verbinden. In diesem fixen Bereich $R(a)$ müssen sich nun die materialen Konditionale bewähren, so der Vorschlag. Damit der Satz (30) wahr ist (was er ja intuitiv ist), mußten wir annehmen, daß $R(a)$ nur Welten enthält, in denen Peter den Gesetzen der Schwerkraft unterworfen ist, also nicht schweben kann. Wenn wir jetzt mit dieser Annahme über $R(a)$ die Wahrheit von (32) beurteilen möchten, dann ist im Bereich $R(a)$ das Antezedens des materialen Konditionals

(33) Wenn Peter über die Brüstung steigt und schweben kann, dann begibt er sich in Lebensgefahr

durchweg falsch und damit (33) genauso wahr wie

(34) Wenn Peter über die Brüstung steigt und schweben kann, dann begibt er sich nicht in Lebensgefahr.

Aber nur (34) scheint ein wahres kontrafaktisches Konditional zu entsprechen, nämlich: Wenn Peter über die Brüstung steigen würde und schweben könnte, dann würde er sich nicht in Lebensgefahr begeben.

Das Problem liegt offenbar darin, daß strikte Konditionale uns nicht erlauben, die zu betrachtenden Möglichkeiten *nach Maßgabe des Antezedens* zu variieren. Wenn wir uns fragen, ob es möglicherweise gefährlich ist, wenn Peter über die Brüstung steigt, dann fassen wir einen anderen Bereich von Möglichkeiten ins Auge als wenn wir uns fragen, ob das möglicherweise für einen schwebenden Peter gefährlich ist. Kontrafaktische Konditonale stellen uns vor die Aufgabe, uns das Antezedens in naheliegender Weise vorzustellen. Was wir uns dazu vorstellen, d.h. welche Möglichkeiten in Betracht zu ziehen sind, hängt aber nicht nur davon ab, wie unsere Welt beschaffen ist, sondern auch davon, welche Modifikationen der Welt das Antezedens verlangt. Mit anderen Worten, wenn wir die Wahrheit eines kontrafaktischen Konditionals $A \sqsupset B$ in a beurteilen wollen, dann hängt der Bereich der plausiblen Alternativen nicht allein von a ab, sondern auch von den Welten, die durch das Antezedens A festgelegt werden. Statt mit $R(a)$ sollten wir also den zu betrachtenen Bereich besser mit $R(\llbracket A \rrbracket, a)$ angeben, wobei $\llbracket A \rrbracket = \{b : b \models A\}$ die Menge der A-verifizierenden Welten im jeweils betrachteten Modell ist.

Statt $b \in R(\llbracket A \rrbracket, a)$ wollen wir $R_{\llbracket A \rrbracket}ab$ schreiben. Unsere Überlegungen münden in diese Wahrheitsbedingung für kontrafaktische Konditionale:

$$(*) \qquad a \models A \sqsupset B \text{ gdw } \forall b: \text{ wenn } R_{\llbracket A \rrbracket}ab \text{ und } b \models A, \text{ dann } b \models B.$$

Ein kontrafaktisches Konditional $A \sqsupset B$ ist also genau dann wahr, wenn das materiale Konditional $A \to B$ durchweg ("strikt") wahr ist in einem Bereich alternativer Möglichkeiten, der mit dem Antezedens variiert. Deshalb werden kontrafaktische Konditionale nach diesem Vorschlag auch *variabel strikte Konditionale* genannt.

Wie soll man sich den Bereich von Möglichkeiten, in denen das Antezedens eines Konditionals auf naheliegende Weise verwirklicht ist, vorstellen? Zumindest sicher nicht anders als so, daß in diesen Welten das Antezedens wahr sein muß, also:

$$(\text{id}) \qquad \text{Wenn } R_{\llbracket A \rrbracket}ab, \text{ dann } b \in \llbracket A \rrbracket.$$

Unter dieser Minimalbedingung können wir $(*)$ vereinfachen zu

$$(\sqsupset) \qquad a \models A \sqsupset B \text{ gdw } \forall b: \text{ wenn } R_{\llbracket A \rrbracket}ab, \text{ dann } b \models B.$$

Nur unter der Annahme, daß Rahmen die Bedingung (id) erfüllen, ist der Übergang von $(*)$ zu $(\sqsupset)$ inhaltlich sinnvoll. Dennoch wollen wir im nächsten Abschnitt zunächst die Klasse *aller* Rahmen, also auch solcher, die (id) nicht erfüllen, betrachten und in den Modellen auf solchen Rahmen Konditionale mittels $(\sqsupset)$ interpretieren. Das hat den Vorteil, daß wir so Resultate hinsichtlich eines Basissystems erbringen können, auf denen wir dann auf einfache Weise aufbauen können.

3. Semantik kontrafaktischer Konditionale und die Basislogik CK

Variabel relationale Rahmen. Wir betrachten eine aussagenlogische Sprache mit einem funktional vollständigen Satz wahrheitsfunktionaler Junktoren (z.B. $\neg$ und $\wedge$), die um den kontrafaktischen Junktor $\sqsupset$ erweitert ist. Eine solche Sprache interpretieren wir in *variabel relationalen Rahmen* der Art

$$(W, R),$$

wobei R nun eine *drei*stellige Relation $R \subseteq \wp(W) \times W \times W$ ist. Für $X \in \wp(W)$ und $a, b, \in W$ schreiben wir statt $(X, a, b) \in R$ kurz: $R_X ab$. Modelle (W, R, I) induzieren wieder eine Wahrmacherrelation $\models_I$ (den Index lassen wir meist weg) mit dieser Klausel für $\sqsupset$-Formeln:

$$(\sqsupset) \qquad a \models A \sqsupset B \text{ gdw } \forall b: \text{ wenn } R_{[\![A]\!]}ab, \text{ dann } b \models B.$$

Der Ausdruck $[\![A]\!]$ (eigentlich $[\![A]\!]_I$) steht für das, was man in der Semantik möglicher Welten eine *Proposition* nennt. Eine Proposition ist eine Menge von Welten – in unserem Fall:

$$[\![A]\!]_I = \{a \in W : a \models_I A\},$$

also die Menge aller Welten, in denen die Formel A unter der Interpretation I wahr ist. Wahrheit im Modell, Gültigkeit und Folgerung sind wie auf p. 181 für die Modellierung der strikten Implikation definiert.

Anmerkung zu allgemeinen Rahmen. Ist jede Menge von Welten eine Proposition? Wir werden hier annehmen, daß das so ist. Aber diese recht starke Annahme ist eigentlich nicht nötig. Es würde genügen, wenn die Struktur der Propositionen der Struktur der Sprache entspricht. Um dies zu garantieren, müßten wir die Definition eines Rahmens erweitern. In einem *allgemeinen Rahmen* (*general frame*), (W, Π, R), ist Π, die Menge der Propositionen, eine Teilmenge von $\wp(W)$, welche unter bestimmten Mengenoperationen – den Operatoren der Sprache entsprechend – abgeschlossen ist. Für manche Zwecke ist es besser, von allgemeinen Rahmen auszugehen; siehe [7, 10] und eine Anwendung in der Konditionallogik in [44]. Wir werden allgemeine Rahmen hier nicht weiter behandeln.

In der Art semantischer Theorie, die wir hier zugrundelegen, repräsentiert die Menge $[\![A]\!]$ die Bedeutung der Formel A (in einem Modell). Anders gesagt: Die Bedeutung eines Satzes ist die Proposition, die er ausdrückt. Natürlich können zwei syntaktisch verschiedene Sätze A und A' in genau denselben Welten wahr sein. Dann ist $[\![A]\!] = [\![A']\!]$, d.h. die beiden Sätze drücken dieselbe Proposition aus.

Obwohl in einem Ausdruck wie $R_{[\![A]\!]_I}ab$ auf eine Interpretation I der Formel A Bezug genommen wird, ist die Relation R doch vollständig Teil eines sprachunabhängigen Rahmens. Die erste Koordinate des Tripels

$([\![A]\!]_I, a, b)$ wird hier zwar mithilfe einer Interpretation I festgelegt, aber das ist nicht wesentlich für die Definition der Relation R; wesentlich ist nur, daß die erste Koodinate aus $\wp(W)$ stammt. Deshalb können wir allgemeine Bedingungen für R allein mit Bezug auf Rahmen, nicht auf Interpretationen, d.h. Modellen formulieren.

Manche Autoren (z.B. Stalnaker [48] und Chellas [11, 12]) ziehen die Darstellung der Rahmen mithilfe einer *Auswahlfunktion* vor. Rahmen sind dann von der Art (W, f) mit

$$f : \wp(W) \times W \to \wp(W)$$

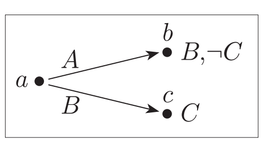
und in den Modellen ist die Bedingung $(\sqsupset)$ ersetzt durch

$$(\sqsupset') \qquad a \models A \sqsupset B \text{ gdw } \forall b: \text{ wenn } b \in f([\![A]\!], a), \text{ dann } b \models B.$$

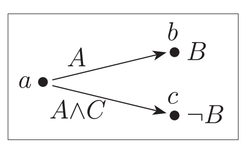
Die Funktion f wählt die plausiblen Antezedens-Welten aus. Das ist lediglich eine Notationsvariante unserer Definitionen, denn wir können von der einen zur jeweils anderen Darstellung leicht übergehen aufgrund der (definitorischen) Äquivalenz

$$(X, a, b) \in R \text{ gdw } b \in f(X, a).$$

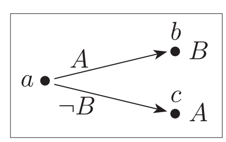
Bevor wir uns der Frage zuwenden, wie sich die logisch gültigen Sätze axiomatisch darstellen lassen, wollen wir uns zunächst vergewissern, daß die Wahrheitsbedingung $(\sqsupset)$ besser auf kontrafaktische Konditionale paßt als die Bedingung $(\multimap\!\!\!\ni)$ für strikte Konditionale. Wir fragen hier insbesondere danach, ob die Sequenzen (Trans), (Verst) oder (Kontrap) (s. Beobachtung 1) sich auch nach dem jetzt vorliegenden Vorschlag als gültig erweisen. Dazu betrachten wir die folgenden, diagrammatisch skizzierten Modelle:



DIAGR. 1



2



3

Ein mit einer Formel A beschrifteter Pfeil soll die $R_{[\![A]\!]}$-Relation darstellen. Nach der oben besprochenen Minimalbedingung ist daher A wahr an jedem Punkt auf den ein A-Pfeil weist. (Beispielsweise ist im Diagramm 1 A am Punkt b und B am Punkt c wahr.)

Diagramm 2 zeigt ein Gegenbeispiel zu (Verst), $A \sqsupset B \models A \wedge C \sqsupset B$. Hier sei b der einzige Punkt, der in der $R_{[\![A]\!]}$-Relation zu a steht (angedeutet durch den oberen Pfeil) und B sei an diesem Punkte wahr. Dann $a \models A \sqsupset B$. Der Punkt c sei der einzige Punkt, der zu a in der $R_{[\![A\wedge C]\!]}$-Relation steht (angedeutet durch den unteren Pfeil) und an diesem Punkt möge B falsch sein. Dann gilt nicht $a \models A \wedge C \sqsupset B$.

Das Gegenbeispiel wäre nicht möglich, wenn wir forderten, daß wenn $R_{[\![A \wedge C]\!]}ab$, dann $R_{[\![A]\!]}ab$. Aber genau das sollten wir nicht tun. Denn eine Welt, die unter den Annahme $A \wedge C$ naheliegend ist, ist es unter der Annahme A möglicherweise nicht. So ist, in unserem Beispiel, ein mißlungener Abend ein naheliegendes Szenario unter der Annahme, daß Peter kommt und vom Balkon stürzt. Aber allein Peters Anwesenheit garantiert keinen mißlungenen Abend.

Da $[\![A \wedge C]\!] = [\![A]\!] \cap [\![C]\!]$, können wir unsere Beobachtung etwas verallgemeinern und festhalten, daß (Verst) ungültig bleibt, solange wir nicht fordern, daß

$$R_{X \cap Y} \subseteq R_Y .$$

Da $X \cap Y \subseteq Y$, so repräsentiert $X \cap Y$ eine spezifischere, d.h. logisch stärkere Proposition als Y. (Daß Peter zur Party kommt, läßt mehr Möglichkeiten zu, als daß Peter kommt und stürzt.) Unser Gegenbeispiel richtet sich also allgemeiner gegen das Prinzip,

$$B \sqsupset C \models A \sqsupset C, \text{ falls } A \models B,$$

und damit gegen diese Bedingung:

(mono) $$R_X \subseteq R_Y, \text{ falls } X \subseteq Y.$$

Diagramm 1 zeigt ein Gegenbeispiel zu (Trans), $A \sqsupset B, B \sqsupset C \models A \sqsupset C$. Wir nehmen an, daß $R_{[\![A]\!]}ab$ mit $b \models B$ und $R_{[\![B]\!]}ac$ mit $c \models C$. Wenn, wie im Bild angedeutet, b und c die einzigen Punkte sind, die in der jeweiligen Relation zu a stehen, dann folgt aus diesen Annahmen, daß $a \models A \sqsupset B$ und $a \models B \sqsupset C$. Aber am Punkt b ist A wahr und C falsch. Also nicht $a \models A \sqsupset C$.

Schließlich zeigt Diagramm 3 ein Gegenbeispiel zu (Kontrap), $A \sqsupset B \models \neg B \sqsupset \neg A$. Der obere Teil des Diagramms verifiziert $a \models A \sqsupset B$, der untere falsifiziert $a \models \neg B \sqsupset \neg A$. (Der Leser möge nun die intuitiven Gegenbeispiele (27-29) in Beziehung setzen zu den gerade besprochenen formalen Gegenbeispielen. Ferner möge man sich Bedingungen für die dreistellige Relation R (bzw. die Funktion f) überlegen, welche die Folgerungen (Trans) und (Kontrap) garantieren könnten.)

Die Basislogik CK. Die kleinste hier betrachtete Logik kontrafaktischer Konditionale basiert auf den klassische Tautologien (im vollen Vokabular, d.h. inklusive Formeln, in denen der Junktor $\sqsupset$ vorkommt). Dem wird ein Axiomenschema sowie eine schematische Regel für Konditionale hinzugefügt. Die Logik ist unter Modus Ponenz abgeschlossen:

τ — Alle Tautologien

K. $$A \sqsupset (B \to C) \to ((A \sqsupset B) \to (A \sqsupset C))$$

RN. $$\frac{B}{A \sqsupset B}$$

MP. $$\frac{A, A \to B}{B}$$

Die Bezeichnungen K und RN sollen an die gleich benannten Schemata der Basislogik **K** für den Notwendigkeitsoperator $\Box$ erinnern:[5]

K. $$\Box(B \to C) \to \Box B \to \Box C$$

RN. $$\frac{B}{\Box B}$$

Man beachte, daß in den konditionallogischen Schemata der Formelteil $A \sqsupset$ die Stelle von $\Box$ in den modallogischen Schemata eingenommen hat. Tatsächlich hat ja auch schon die semantische Analyse gezeigt, daß $A \sqsupset B$ in etwa bedeutet: B ist notwendig relativ zu A. D.h. jeder Formelteil $A \sqsupset$ verhält sich auch semantisch wie ein Notwendigkeitsoperator. Das wird besonders augenfällig, wenn wir für einen Moment die Notation $A \sqsupset B$ durch $[A]B$ ersetzen (wie in [11] erstmals vorgeschlagen). Jetzt sieht die Sache so aus: Während wir in der (einfachen) Modallogik immer nur *einen* Notwendigkeitsoperator $\Box$ betrachten, so haben wir es in der Konditionallogik mit so *vielen* Notwendigkeitsoperatoren $[A]$ zu tun, wie es Formeln A gibt. Die strenge syntaktische und semantische Analogie zwischen $[A]B$ und $\Box B$ gibt den Schlüssel für die folgenden Resultate in die Hand.

Bevor wir diese Resultate vorstellen, sehen wir uns noch eine alternative Axiomatisierung von **CK** an. Auch diese basiert auf den Tautologien und ist unter Modus Ponens abgeschlossen. Hinzu kommen zwei Regeln für Konditionale:

REA. $$\frac{A \leftrightarrow A'}{(A \sqsupset B) \to (A' \sqsupset B)}$$

RK. $$\frac{B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \to B}{(A \sqsupset B_1) \wedge \cdots \wedge (A \sqsupset B_n) \to (A \sqsupset B)} \quad n \geq 0.$$

Nach dem soeben Gesagten, ist die Regel RK unschwer zu erkennen als konditionallogische Version der bekannten modallogischen Regel. Die Regel REA (engl. *replacement of equivalent antecedents*) ist dagegen anderer Art: In ihr wird nicht dasselbe Antezedens Formeln vorangestellt sondern es wird auf verschiedene Antezedens-Formeln Bezug genommen. REA fordert, daß nur die logische Kraft eines Antezedens zählen soll: Die Art und Weise, wie diese logische Kraft ausgedrückt wird, soll für die Wahrheit eines Konditionals keine Rolle spielen – logisch gleichwertige Beschreibungen sind im Wenn-Teil eines Konditionals austauschbar. (Man überzeuge sich davon, daß die zwei vorgestellten Axiomatisierungen äquivalent sind.)

Der Nachweis der *Richtigkeit* von **CK** in variabel relationalen Rahmen ist eine einfache Übung. Für den Beweis der *Vollständigkeit* bedienen wir uns der Methode kanonischer Modelle. Wir nehmen an, eine Formel A sei *kein* Theorem von **CK** und konstruieren ein (kanonisches) variabel relationales Modell, in dem A an einem Punkt falsch wird. Die Methode wurde im Kapitel über Modallogik im Detail geschildert. Wir werden uns hier

[5] Zur Erinnerung (siehe das Kapitel über Modallogik): Wenn wir τ und MP um die Schemata K und RN für $\Box$ erweitern, erhalten wir eine Axiomatisierung der Menge aller Formeln, die in beliebigen Kripke-Modellen wahr sind. Das ist das System **K**.

kürzer fassen und unser Augenmerk auf die wesentlich konditionallogischen Momente richten.

Eine Menge X von Formeln ist genau dann *maximal konsistent* im Sinne von **CK**, wenn sich (a) in **CK** aus X kein Widerspruch, d.h. keine Formel der Form $A \wedge \neg A$ ableiten läßt, und (b) aus jeder Erweiterung von X sich ein solcher Widerspruch in **CK** ableiten läßt.

Wir wissen nach *Lindenbaums Lemma*, daß für jede Logik **L**, welche die klassische Logik erweitert, gilt:

> Jede im Sinne von **L** konsistente Formelmenge läßt sich zu einer im Sinne von **L** maximal konsistenten Menge erweitern.

Das Lindenbaum-Lemma gilt also auch für **CK**. Im Rest dieses Abschnitts meinen wir mit der (maximalen) Konsistenz einer Formelmenge immer diese Eigenschaft im Sinne von **CK**.

Wir wollen nun eine Abkürzungen vereinbaren (die A-*Entkonditionalisierung* einer Formelmenge X):

$$X^A = \{B : A \sqsupset B \in X\}.$$

Der Grund für die Einführung dieser Abkürzung ist folgender. Im nächsten Lemma wollen wir zeigen, daß sich maximal konsistente Mengen im wesentlichen wie die Punkte eines Modells verhalten. Dazu brauchen wir insbesondere auch die Bedingung 4 (im Lemma unten), deren Sinn sich aus dieser Definition einer Relation R ergibt:

Def. $R^{\mathbf{CK}}$ $\qquad R_{[A]}XY$ gdw $X^A \subseteq Y$,

wobei $[A]$ für die Menge aller maximal konistenten Mengen, welche A enthalten, steht.

Lemma 2. *Es seien X und Y maximal konsistente Formelmengen. Dann gilt für alle Formeln A und B:*

1. *$A \in X$ gdw $X \vdash A$;*
2. *$\neg A \in X$ gdw $A \notin X$;*
3. *$A \wedge B \in X$ gdw $A \in X$ und $B \in X$.*
4. *$A \sqsupset B \in X$ gdw für alle Y: $X^A \subseteq Y \Rightarrow B \in Y$.*

Beweis. Für die Beweise der Behauptungen 1-3. sei der Leser auf das entprechende Lemma im Kapitel über Modallogik verwiesen. Nach Def. $R^{\mathbf{CK}}$ ist 4 gleichtbedeutend mit

> $A \sqsupset B \in X$ gdw für alle Y: $R_{[A]}XY \Rightarrow B \in Y$.

Die Behautung wird ganz analog wie im Fall der Modallogik bewiesen:

LR: Wenn $A \sqsupset B \in X$, dann ist $B \in X^A$, welche Menge in Y enthalten ist.

RL: Wir nehmen an (1) $B \in Y$ für alle maximal konstistenten $Y \supseteq X^A$ und, für *reductio*, (2) $A \sqsupset B \notin X$. Es sei nun $X' = X^A \cup \{\neg B\}$. X' ist konsistent. (Denn anderenfalls gäbe es $B_1, ..., B_n \in X^A$ so, daß $\vdash B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \to B$. Daraus würde nach RK folgen $\vdash (A \sqsupset B_1) \wedge \cdots \wedge (A \sqsupset B_n) \to (A \sqsupset B)$. Und da $(A \sqsupset B_1), ..., (A \sqsupset B_n) \in X$, hätten wir $A \sqsupset B \in$

X (Behauptung 1 des Lemmas) – entgegen unserer Annahme (2).) Nach Lindenbaums Lemma können wir X' zu einer maximal konsistenten Menge X^* erweitern. Da $\neg B \in X' \subseteq X^*$, so haben wir $B \notin X^*$ (Behauptung 2 des Lemmas). Da aber $X^A \subseteq X' \subseteq X^*$, so ist X^* eine maximal konsistente Erweiterung von X^A, welche, nach (1), B enthält – Widerspruch. ∎

LEMMA 3. *Das kanonische Modell für* **CK**,

$$\mathcal{M}^{\mathbf{CK}} = (W^{\mathbf{CK}}, R^{\mathbf{CK}}, I^{\mathbf{CK}}) \textit{ mit}$$

(a) $W^{\mathbf{CK}} = \{X \subseteq \mathrm{FML} : X \textit{ ist maximal konsistent}\}$,

(b) $R^{\mathbf{CK}}_{[A]}ab$ *gdw* $a^A \subseteq b$, *und*

(c) $I^{\mathbf{CK}}(P, a) = 1$ *gdw* $P \in a$ $(\forall P \in \mathit{ATM})$,

ist ein Modell im hier zu betrachtenden Sinne, d.h. $(W^{\mathbf{CK}}, R^{\mathbf{CK}})$ *ist ein variabel relationaler Rahmen und* $I^{\mathbf{CK}}$ *ist eine Interpretation auf einem solchen Rahmen.*

BEWEIS. Die in (a) definierte Menge ist offensichtlich nicht leer und auch die Definition (c) ist unproblematisch.

In der Definition (b) darf die Relation $R_{[A]}$ (Superskript fortgelassen) nicht davon abhängen, wie wir die Indexmenge [A] syntaktisch repräsentieren; d.h., wenn $[A] = [A']$, dann brauchen wir eine Garantie, daß $R_{[A]} = R_{[A']}$. Nun sieht die rechte Seite der Definition (b) ausgeschrieben so aus:

$$A \sqsupset B \in a \Rightarrow B \in b. \tag{$*$}$$

Die gewünschte Garantie erhalten wir, wenn wir aus $[A] = [A']$ auf

$$A' \sqsupset B \in a \Rightarrow B \in b \tag{$\dagger$}$$

schließen dürfen (und umgekehrt). Den Schluß ermöglicht die Regel REA. Denn wenn $[A] = [A']$ im kanonischen Modell, dann ist $A \leftrightarrow A'$ in allen Punkten des kanonischen Modells enthalten. Der Schnitt aller Punkte des kanonischen Modells ist aber genau **CK**, d.h. $A \leftrightarrow A'$ ist ein Theorem von **CK**. Also ist, nach REA, auch

$$(A \sqsupset B) \leftrightarrow (A' \sqsupset B)$$

ein Theorem von **CK**. Es folgt, daß $A \sqsupset B \in a$ gdw $A' \sqsupset B \in a$ (für beliebige Punkte a des kanonischen Modells). Also sind $(*)$ und $(\dagger)$ äquivalent. ∎

LEMMA 4. *Sei* (W, R, I) *das kanonische Modell für* **CK**. *Es sei eine Relation* $\models \subseteq W \times \mathrm{FML}$ *so definiert:*

$$a \models A \textit{ gdw } A \in a,$$

Dann ist die Relation $\models$ *eine Erfüllungsrelation.*

BEWEIS. Induktion über den Aufbau einer Formel A.

Basis $A = P$. Nach Definition: $P \in a$ gdw $I(P, a) = 1$ gdw $a \models P$.
Fall $A = \neg B$. Siehe Lemma 2.2.
Fall $A = B \wedge C$. Siehe Lemma 2.3.
Fall $A = B \sqsupset C$. Zz ist $a \models B \sqsupset C$ gdw $\forall b : R_{[B]}ab \Rightarrow b \models C$, d.h.

$$B \sqsupset C \in a \text{ gdw } \forall b : R_{[B]}ab \Rightarrow C \in b,$$

wobei a und b maximal konsistent sind. Nach der Def. des kanonischen Modells ist das die Äquivalenz

$$B \sqsupset C \in a \text{ gdw } \forall b : a^B \subseteq b \Rightarrow C \in b,$$

welche wir in Lemma 2.4 bewiesen haben. ∎

Das *Argument für die Vollständigkeit* von **CK** im Hinblick auf die Klasse der variabel relationalen Rahmen ist nun recht einfach. Es sei A eine beliebige Formel, die kein Theorem von **CK** ist. Dann ist $X = \mathbf{CK} \cup \neg A$ eine konsistente Menge. Diese läßt sich zu einer maximal konsistenten Menge X^* erweitern (Lindenbaums Lemma). Die Menge X^* ist ein Punkt im kanonischen Modell an dem A falsch ist (Lemma 2). Also gibt es ein Modell (Lemma 3), welches A falsifiziert (Lemma 4) und somit ist A nicht gültig in der Klasse der variabel relationalen Rahmen. Kontrapositiv ausgedrückt: Wenn A gültig ist in diesen Rahmen, dann ist A ein Theorem von **CK**.

4. Erweiterungen des Basissystems CK

Die Variabilität der Relation R in Abhängigkeit von der Proposition, die das Antezedens eines kontrafaktischen Konditionals repräsentiert, hat, wie wir gesehen haben, die gewünschte Wirkung: Die drei typischen Folgerungsmuster, die für diese Konditionale nicht gelten, lassen sich in variabel relationalen Modellen widerlegen. Für die Basislogik **CK** sind die entsprechenden Ableitbarkeitsbehauptungen daher falsch.

Damit es sich bei der Relation R_X um kein bloß technisches Mittel handelt, die gewünschten Resultate herbeizuführen, sollten wir in der Lage sein, eine Interpretation der Relation anzugeben, die es erlaubt, aus den auf p. 186 gezeigten abstrakten Gegenmodellen zu (Trans), (Verst) und (Kontrap), konkrete und intuitiv überzeugende Gegenbeispiele zu gewinnen. Die Semantik würde dann *erklären*, wie es zu diesen Gegenbeispielen kommen kann.

Wir haben eine solche Erklärung bereits angedeutet. Wenn wir die Wahrheit eines Konditionals $A \sqsupset B$ in einer Welt a beurteilen wollen, dann müssen wir Welten betrachten, in denen das Antezedens A wahr ist und uns fragen, ob in diesen Welten auch das Konsequens B wahr ist. Welche Welten sind zu betrachten? Sicherlich sind das nicht *alle* A-Welten, denn dann wäre das kontrafaktische Konditional ein striktes. Wenn wir eine Annahme machen, von der wir glauben, daß sie kontrafaktisch sei, dann fassen wir vielmehr Welten ins Auge, die sich von der aktualen Welt nicht allzu sehr unterscheiden sollen. Die Annahme soll in diesen Welten natürlich wahr sein, aber ansonsten soll alles möglichst so sein, wie es in der aktualen

Welt ist. Das heißt, wir betrachten Welten, die der aktualen Welt so ähnlich wie möglich sind unter der Bedingung, daß in ihnen das Antezedens wahr ist. $R_{[\![A]\!]}$ sollte also von der Welt a zu allen Welten b führen, in denen A wahr ist und ansonsten a so ähnlich ("nahe") wie möglich sind. In diesen Welten schauen wir nach, ob auch das Konsequens B wahr ist.[6]

Wir können und sollten uns nun fragen, welche Bedingungen R erfüllen muß, damit die Relation so wie gerade vorgeschlagen, interpretiert werden kann. Bisher haben wir nichts weiter über R angenommen. Die Theorie dieser allgemeinsten Klasse variabel relationaler Rahmen ist die Basislogik **CK**. Wir betrachten nun naheliegende Bedingungen für R und zeigen, welche Axiomenschemata durch diese Bedingungen logisch gültig werden. Es wird in den betrachteten Fällen auch das Umgekehrte gelten (mit einer Ausnahme): Die Axiomenschemata werden nur dann gültig, wenn die Rahmen die entsprechenden Bedingungen erfüllen. "Entsprechung" hat hier den präzisen Sinn einer *Korrespondenz* so, wie wir diesen Begriff im Kapitel über Modallogik eingeführt haben. Der Nachweis von Korrespondenzen in der Konditionallogik ist nicht anders als in der Modallogik. Details werden wir daher hier nicht erörtern. Als Bezeichnungen für die Schemata und korrespondierenden Bedingungen dienen die in der Literatur üblichen.

Identität. Ein kontrafaktisches Konditional lädt ein, anzunehmen, das Antezedens sei wahr. Zumindest diese minimale Bedingung sollte die Relation R daher erfüllen: Sie sollte nur zu Welten führen, in denen das, was das Antezedens beschreibt, auch der Fall ist. Wir können diese Bedingung kurz so notieren (für alle Welten a und b, sowie beliebige $X \subseteq W$):

(id) $$\text{Wenn } R_X ab, \text{ dann } b \in X.$$

In Modellen, welche (id) nicht erfüllen, läßt sich das Identitäts-Schema

ID. $$A \sqsupset A$$

falsifizieren. Umgekehrt ist die Bedingung hinreichend dafür, daß ID an allen Punkten eines Modells wahr wird.

Die Bedingung (id) ist sicher eine offensichtliche Bedingung die man von Rahmen unter der intendierten Interpretation der Relation R erwartet.

[6] Ähnlich – in welcher Hinsicht? Viele Konditionale können wir beurteilen ohne uns über die relevanten Hinsichten der Ähnlichkeit genauer Rechenschaft ablegen zu müssen. Aber wie steht es mit dem folgenden Konditional?:

> Hätte Breschnjew auf den roten Knopf gedrückt, dann sähe die Welt heute ganz anders aus.

Einerseits sind – zumindest auf den ersten Blick – Welten, in denen Breschnjew auf den Knopf drückt und dann der Auslösemechanismus versagt, der aktualen Welt viel ähnlicher als solche in denen es zu einem Nuklearschlag kommt. Andererseits haben wir keinen Grund anzunehmen, der Mechanismus würde, falls gedrückt, nicht funktionieren. So erfordert ein nicht-funkionierender Mechanismus Fehlerquellen und damit Welten, die unserer Welt unähnlicher sind als Welten, in denen der Mechanismus funktioniert. Da wir geneigt sind, das Konditional als wahr zu beurteilen, muß hier ein Sinn von Ähnlichkeit angenommen werden, der der zweiten und nicht der erste Überlegung den Vorzug gibt. Vgl. dazu Lewis [37].

Genauso dürfte das Schema ID zum Grundbestand jeder Konditionallogik gehören. Jedoch entfalten im Rahmen der hier betrachteten Semantik selbst so unschuldig scheinende Prinzipien wie (id)/ID unerwartete und deutlich weniger akzeptable Wirkungen. Im hier betrachteten Fall ist es es die Konsequenz, daß mit (id) auch das Schema $\bot \sqsupset A$ gültig wird – wenn Unmögliches der Fall wäre, dann würde Beliebiges der Fall sein. Wir kommen unten (p. 199) darauf zurück.

Schwache Zentrierung. Wir wollen die der Referenzwelt a ähnlichsten Welten betrachten, in denen das Antezedens A wahr ist. Keine Welt ist a ähnlicher als a selbst. Wenn daher das Antezedenz schon in a wahr ist, dann ist die Welt a sicher mit in Betracht zu ziehen.

(cw) $$\text{Wenn } a \in X, \text{ dann } R_X aa.$$

Die Bedingung der schwachen Zentrierung entspricht dem Schema des konditionalen Modus Ponens:

CW. $$(A \sqsupset B) \to (A \to B).$$

Ein Konditional mit wahrem Antezedens, kann nur wahr sein, falls das Konsequens wahr ist.

Erfolg. Keine Welt kann derart sein, daß es keine ihr ähnlichen Welten geben kann. Ähnliche Welten sollte es immer geben. Die Suche nach Welten, die unserer so ähnlich wie möglich unter einer bestimmten Bedingung sind, kann also nur an der Bedingung scheitern. Die Bedingung könnte einfach *abwegig* sein, d.h. sie könnten derart sein, daß es keine Welten gibt, die a ähnlich sind *und* dabei die Bedingung erfüllen. Etwas "formaler" ausgedrückt: Die Bedingung X ist abwegig, wenn es kein b gibt mit $R_X ab$. Wenn X in diesem Sinne abwegig ist, dann werden X-Welten auch unter keiner anderen Bedingung erreichbar sein, d.h. für beliebige Bedingungen Y gilt, daß es kein b gibt mit $R_Y ab$ und $b \in X$. Der Gedankengang wirbt für diese Rahmenbedingung:

(mod) $$\text{Wenn } \neg\exists b : R_X ab, \text{ dann } \forall Y (\neg\exists b : R_Y ab \text{ und } b \in X).$$

Gelegentlich bietet es sich an, statt $R_X ab$ auch $b \in R_X(a)$ zu schreiben. In dieser Schreibweise sieht (mod) dann so aus:

(mod) $$\text{Wenn } R_X(a) = \emptyset, \text{ dann } \forall Y : R_Y(a) \cap X = \emptyset.$$

Diese Bedingung hat nun den folgenden Effekt. Angenommen $\neg A$ ist in a abwegig, d.h. es gibt keine a-ähnlichen Welten, in denen $\neg A$ der Fall wäre. Die Proposition $\neg A$ ist also "ziemlich unmöglich" und A "so gut wie notwendig", was durch die Formel $\neg A \to \bot$ ausgedrückt wird.[7] Dann ist A

[7] Tatsächlich definiert Lewis [35, pp. 22-24] einen Notwendigkeitsoperator mit Hilfe des Konditionals so $\Box A := A \sqsupset \bot$. er nennt diesen modalen Operator einen "äußeren", weil er über den Bereich der äußersten Sphäre eines Sphärensystems (s.u.) definiert ist.

unter *jeder* Antezedens-Bedingung wahr. In einem Schema können wir das so ausdrücken:

MOD. $$(\neg A \sqsupset \bot) \rightarrow (B \sqsupset A)$$

Es ist genau dieses Schema, welches durch die Bedingung (mod) gültig wird.

Denn, angenommen
$$a \models \neg A \sqsupset \bot$$
(zz. $a \models B \sqsupset A$). Dann
$$R_{[\![\neg A]\!]}(a) \subseteq [\![\bot]\!].$$
Da $[\![\bot]\!] = \emptyset$, folgt, daß $R_{[\![\neg A]\!]}(a) = \emptyset$. Daraus schließen wir nach (mod), daß
$$R_{[\![B]\!]}(a) \cap [\![\neg A]\!] = \emptyset.$$
D.h. $R_{[\![B]\!]}(a) \subseteq [\![A]\!]$, welches die Wahrheitsbedingung für $a \models B \sqsupset A$ ist. ■

Koinzidenz. Die nächste Bedingung sieht zunächst etwas komplizierter aus, drückt aber eine sehr einfache Idee aus: Wenn alle nächsten A-Welten B erfüllen und alle nächsten B-Welten A erfüllen, dann macht es keinen Unterschied, ob die Antezedens-Welten mit A oder B beschrieben werden: Die nächsten A-Welten sind genau die nächsten B-Welten.

(cso) Wenn $\forall b : R_X ab \Rightarrow b \in Y$ und $\forall b : R_Y ab \Rightarrow b \in X$, dann $\forall b : R_X ab$ gdw $R_Y ab$.

Auch das können wir ein wenig kürzer aufschreiben:

(cso) Wenn $R_X(a) \subseteq Y$ und $R_Y(a) \subseteq X$, dann $R_X(a) = R_Y(a)$.

Dieses Koinzidenz-Prinzip entspricht dem Schema

CSO. $$(A \sqsupset B) \wedge (B \sqsupset A) \rightarrow ((A \sqsupset C) \rightarrow (B \sqsupset C)).$$

(Starke) Zentrierung. Jede Welt a ist sich selbst strikt ähnlicher als irgendeine von a verschiedene Welt b es sein kann. Das gilt auch dann, wenn a und b vieles gemein haben – z.B. daß beide das zu betrachtende Antezedens A erfüllen. Wenn nun a das Antezedens A erfüllt, dann kann die Menge der a ähnlichsten A-Welten nur eine einzige Welt umfassen, nämlich a selbst. Das ist die Bedingung der starken Zentrierung:

(cs) Wenn $a \in X$ und $R_X ab$, dann $a = b$.

In jedem Fall, in dem es überhaupt eine Welt b mit $R_X ab$ gibt (X also nicht abwegig ist), folgt aus der starken Zentrierung die schwache. Zentrierung ist notwendig und hinreichend für die Gültigkeit des Schemas

CS. $$A \wedge B \rightarrow (A \sqsupset B).$$

Gegen CS wird eingewandt, daß es für die Wahrheit eines kontrafaktischen Konditionals nicht hinreichend sein kann, daß Antezedens und Konsequens (zufällig) wahr sind. Beispiele, die CS merkwürdig dastehen lassen, sind schnell bei der Hand.

> Peter rechnet mit Regen und nimmt seinen Schirm mit. Tatsächlich scheint die Sonne. Nach CS ist in dieser Situation der Satz "Wenn es sonnig wäre, würde Peter seinen Regenschirm bei sich haben" wahr.

Andererseits aber entspricht das Schema der Bedingung der starken Zentrierung. Und diese Bedingung ist unter der intendierten Interpretation der Relation R sehr einleuchtend. Daher ist es naheliegend – wenn auch sicher nicht zwingend – vermeintliche Gegenbeispiele zu CS so zu erklären, daß in diesen Fällen kein falsches Konditional, sondern der falsche Gebrauch eines wahren Konditionals vorliegt.[8]

Einzigkeit. Wie negiert man ein kontrafaktisches Konditional?

(35) Wenn Wagner in Frankreich geboren wäre, wäre er Franzose.

Das ist vermutlich wahr. Indem wir (35) negieren, behaupten wir da nicht

(36) Wenn Wagner in Frankreich geboren wäre, wäre er kein Franzose ?

Und sicher folgt umgekehrt aus (36) die Negation von (35). Also scheint die Negation eines Konditionals nichts anderes als die Negation des Konsequens zu sein:

$^?$NEG. $$\neg(A \sqsupset B) \leftrightarrow (A \sqsupset \neg B)$$

– ein Schema, welches äquivalent ist zu

CEM. $$(A \sqsupset B) \vee (A \sqsupset \neg B).$$

CEM ist in der Literatur bekannt als *konditionales Tertium Non Datur* und eines der kontoversesten Schemata.[9] Die Kontroverse entzündete sich an direkten Gegenbeispielen zu CEM, welche in der semantischen Perspektive an Schärfe gewinnen. Denn CEM erzwingt die besonders starke Rahmenbedingung

(cem) Wenn $R_X ab$ und $R_X ac$, dann $b = c$.

Die Ähnlichkeitsrelation wird damit funktional, d.h. Jede Relation R_X ordnet die Welten so an, daß keine zwei Welten einer gegebenen Welt gleich

[8] Lewis [35, p. 27]: "Unsere grundsätzliche Erwiderung ist nicht, daß das Konditional [mit wahrem Antezedens und Konsequens] wahr [...] ist, sondern daß es wegen seines wahren Antezedens unrichtig und irreführend ist. [Wahr] ist es zwar, aber das ist nicht der Punkt. Die falsche Information, die durch den Gebrauch einer kontrafaktischen Konstruktion mit einem wahren Antezedens [und Konsequens] zum Ausdruck gebracht wird, überdeckt [...] die Wahrheit des Konditionals." (Übersetzung AF).

[9] Siehe die Diskussion zwischen Lewis und Stalnaker in [35] bzw. [46].

ähnlich sein können: In Punkto Ähnlichkeit gibt es kein Unentschieden.[10] Daß das wenig plausibel ist, sieht man zum Beispiel an Konditionalen, die so beginnen (Beispiel aus [41, §3]):

(37) Wenn Wagner und Verdi Landsleute wären, dann ...

Welche ist diejenige Welt, die genau wie unsere ist, nur daß darin Wagner und Verdi Landsleute sind? Ist das eine Welt, in der Verdi Deutscher ist oder ist es eine, in der Wagner Italiener ist? Keine der beiden Möglichkeiten scheint unserer Welt ähnlicher als die jeweils andere zu sein. Sie sind, auf ihre jeweilige Weise, unserer Welt gleich nahe. Beide sind als naheliegende Möglichkeiten zu berücksichtigen, wenn wir uns fragen, was der Fall wäre, wenn Wagner und Verdi Landsleute wären. Aber dann kann (cem) nicht richtig sein.

Diesem Argument gegen (cem) steht die *prima facie* plausible Hypothese $^{?}$NEG über die Negation von Konditionalen entgegen. Aber ist diese Hypothese wirklich überzeugend? Was ein Konditional "Wenn A der Fall sein wäre, dann würde B wahr sein" falsch macht, ist nicht der Umstand, daß B unter der Annahme A falsch *wäre*, sondern daß B unter der Annahme auch falsch sein *könnte*. Das ist sicher nicht dasselbe.

Neben den *würde*-Konditionalen, gibt es auch die *könnte*-Konditionale: "Wenn A der Fall wäre, dann könnte B wahr sein." Solche könnte-Konditionale wollen wir so notieren: $A > B$. Für *würde*-Konditionale haben wir gefordert, daß das Konsequens in *allen* naheliegenden Antezedens-Welten wahr sein muß. *Könnte*-Konditionale sind offenbar wahr unter der Bedingung, daß das Konsequens in *einigen* naheliegenden Antezedens-Welten wahr ist, d.h.:

(>) $$a \models A > B \text{ gdw } \exists b : R_A ab \text{ und } b \models B.$$

Mit dieser Wahrheitsbedingung geht unmittelbar ein Vorschlag zum richtigen Verständnis der Negation eines *würde*-Konditionals einher:

NEG. $$\neg(A \sqsupset B) \leftrightarrow A > \neg B.$$

Die Wahrheitsbedingung und das damit einhergehende Schema NEG passen nicht zur Bedingung (cem) bzw. $^{?}$NEG. Denn wenn wir beides verbinden, dann verschwindet der logische Unterschied zwischen *würde*- und *könnte*-Konditionalen. Also sollten wir ($\sqsupset$) und ($>$) nicht unter die Bedingung (cem) stellen. Und wir sollten uns für NEG statt für $^{?}$NEG als richtiger Analyse der Negation von *würde*-Konditionalen entscheiden. Denn die richtige Negation von (35) ist nicht (36) sondern

(38) Wenn Wagner in Frankreich geboren wäre, dann *könnte* er (dennoch) nicht Franzose sein.

[10] Denselben Effekt hat die von Stalnaker bevorzugte Wahrheitsbedingung

$$a \models A \sqsupset B \text{ gdw } f([\![A]\!], a) \models B.$$

Hier ist f eine Auswahlfunktion (wie auf p. 186 beschrieben), welche statt einer Menge naheliegender Welten eine einzige, naheliegendste als Wert ausgibt; siehe [48].

So können wir mit NEG erklären, was $^?$NEG vordergründig plausibel erscheinen ließ. Es ist richtig, daß man ein Konditional verneint, indem man das Konsequens verneint. Das ist der zutreffende Kern der Hypothese $^?$NEG über die Negation von Konditionalen. Nur wird im Falle eines *würde*-Konditionals das Konsequens des enstprechenden *könnte*-Konditionals verneint, und ein *könnte*-Konditional wird verneint durch die Verneinung des Konsequens im entsprechenden *würde*-Konditionals. Die richtigen Verneinungsäquivalenzen sind also:

$$\neg(A \sqsupset B) \leftrightarrow (A > \neg B) \quad \text{bzw.} \quad \neg(A > B) \leftrightarrow (A \sqsupset \neg B).$$

Vorsichtige Verstärkung. Gegenbeispiele zum Prinzip der Verstärkung des Antezedens,[11]

$$(*) \qquad (A \sqsupset B) \rightarrow (A \wedge C \sqsupset B),$$

scheinen alle derart zu sein, daß die verstärkende Annahme C die Wahrheit von B unterminieren würde. Aber dann müßte Verstärkung um zumindest solche Aussagen möglich sein, die das Konsequens *nicht* unterminieren. Welche Aussagen sind das?

Betrachten wir noch einmal das folgende Gegenbeispiel zu $(*)$:

(28) (a) Wenn Peter da gewesen wäre (A), wäre es eine nette Party geworden (B).
$^?$Also: (c) Wenn Peter da gewesen und vom Balkon gestürzt wäre ($A \wedge C$), dann wäre es eine nette Party geworden.

Das Beispiel kann gegen $(*)$ nichts ausrichten, wenn in mindestens einer der naheliegenden Möglichkeiten, in denen Peter auf der Party ist, er vom Balkon stürzt. Denn dann ist die Möglichkeit des Sturzes in (a) eingerechnet und daher kann (c) nicht falsch sein.

Wer also (a) behauptet, kann (c) nur ablehnen mit der Begründung, daß unter der Annahme A, die Möglichkeit eines Balkonsturzes weit hergeholt ist. Wenn wir diese Begründungsmöglichkeit abschneiden, dann *folgt* (c) aus (a). Die einfachste Weise, die genannte Möglichkeit im Beispiel auszuschließen geht so:

(b) Wenn Peter da gewesen wäre, hätte er vom Balkon stürzen können.

Wer (a) und (b) behauptet, der ist auch zur Behauptung von (c) verpflichtet.

Unsere Überlegung können wir nun so verallgemeinern und zusammenfassen: Wenn $A \sqsupset B$ wahr ist (also alle naheliegenden A-Welten auch B-Welten sind) und in einigen naheliegenden A-Welten auch C der Fall ist, dann kann die Präsenz von C in A-Welten die Wahrheit von B nicht unterminieren, und also ist dann auch $A \wedge C \sqsupset B$ wahr. Daß A in naheliegenden Welten C nicht ausschließt, wird durch das *könnte*-Konditional $A > C$

[11] Wird das Antezedens verstärkt, so wird das Konditional geschwächt, weshalb (kurz) Verstärkung (*strengthening*) manchmal auch (kurz) "Abschwächung" (*weakening*) genannt wird.

wiedergegeben. Wir haben so ein Argument für die logische Wahrheit des Schemas der *vorsichtigen Verstärkung*,

CV. $$(A \sqsupset B) \wedge (A > C) \rightarrow (A \wedge C \sqsupset B).$$

Das Schema korrespondiert mit der Rahmenbedingung

(cv) Wenn $\exists b : R_X ab$ und $b \in Y$ und $R_{X \cap Y} ac$, dann $R_X ac$.

Das Prinzip der vorsichtigen Verstärkung wird zuweilen skeptisch gesehen. Das folgende Gegenbeispiel – wenn es denn eines ist – stammt von Stalnaker [47]. Brahms, Verdi und Wagner sind keine Landsleute, jedenfalls nicht alle drei. Aber wenn Brahms und Verdi Landsleute wären, dann würden entweder beide Italiener oder beide Deutsche sein. Diese zweite Möglichkeit, wie Brahms und Verdi Landsleute sind, ist eine, in der auch Verdi und Wagner Landsleute sind. Also *könnte* es sein, daß auch Verdi und Wagner Landsleute sind ($v \sim w$), wenn Brahms und Verdi es wären ($b \sim v$):

(39) $A > C : \; b \sim v > v \sim w.$

Andererseits bleibt Wagner Deutscher in allen Welten, die unserer so ähnlich wie möglich sind bis auf den Umstand, daß Brahms und Verdi Landsleute sind. Die kontrafaktische Annahme, daß Brahms und Verdi Landsleute sind, erzwingt keinen Wechsel der Nationalität Wagners. D.h., wenn Brahms und Verdi Landsleute wären, dann *würde* Wagner (immer noch) Deutscher sein (Dw):

(40) $A \sqsupset B : \; b \sim v \sqsupset Dw.$

Aus (39) $\wedge$ (40) können wir jetzt mit CV schließen auf

(41) $A \wedge C \sqsupset B : \; b \sim v \wedge v \sim w \sqsupset Dw,$

d.h. wenn alle drei Landsleute wären, dann *würde* Wagner Deutscher und also würden alle drei Deutsche sein. Aber das, so möchten wir sagen, ist sicher falsch, denn es gibt mindestens eine andere naheliegende Weise, in der die drei Komponisten Landsleute sein könnten: Sie könnten ja alle Italiener sein.

Haben wir die Gültigkeit von CV widerlegt? Die Prämisse (39) behauptet – ID einmal voraussetzend –, daß es naheliegende Welten gibt, in denen alle drei Komponisten Landsleute sind. Das können sie in diesen Welten auf genau zweierlei Weise sein: Entweder sind sie alle Italiener oder sie sind alle Deutsche. Der erste Fall widerspricht der zweiten Prämisse, (40). Also besagen die beiden Prämissen zusammengenommen, daß die drei nur auf eine Weise Landsleute sein können, nämlich indem sie Deutsche sind. Das ist das, was die Konklusion behauptet und wenn diese Konklusion falsch sein sollte, dann können die beiden Prämissen nicht zugleich wahr sein. D.h. wenn die drei tatsächlich auf *zweierlei* Weise Landsleute sein können (die Negation von (41)), dann schließen diese Möglichkeíten einander aus:

(42) Brahms und Verdi können nur als Deutsche Lendsleute sein, und
(43) die drei könnten Landsleute sein.

Der Schluß von (42) und (43) auf (41) ist also völlig in Ordnung, wenn man nur richtig versteht, welche Situation die Prämissen zusammen beschreiben.

Unmögliches Antezedens. Wie gehen wir um mit Konditionalen der Form

IMP $\quad\quad \bot \sqsupset A \quad ?$

In der Basislogik **CK** ist IMP kein Theorem. (Man betrachte zwei Punkte, a und b, mit $R_{[\![\bot]\!]}ab$ und $b \not\models A$. Dann ist $\bot \sqsupset A$ am Punkt a falsch.) Sobald jedoch Bedingung die (id) gilt, muß die Menge $\{b : R_X ab\}$ in X enthalten sein. Da $[\![\bot]\!] = \emptyset$, bedeutet das, daß $\{b : R_{[\![\bot]\!]}ab\} \subseteq \emptyset$. Also gibt es keinen Punkt b so, daß $R_{[\![\bot]\!]}ab$. Damit ist die Wahrheitsbedingung für $a \models \bot \sqsupset A$, nämlich $\forall b : R_{[\![\bot]\!]}ab \Rightarrow b \models A$, an jedem Punkt a auf leere Weise erfüllt und also ist IMP ein gültiges Schema.

Nun scheint es aber so zu sein, daß einige kontrafaktische Konditionale mit unmöglichem Antezedens falsch und andere auf nicht-leere Weise wahr sind – z.B.:

(44) Wenn das System **CK** die richtige Konditionallogik wäre, dann wäre ID ein gültiges Schema. (Falsch.)
(45) Wenn Peter die Quadratur des Kreises gelingen würde, wäre seine Mathematiklehrerin überrascht. (Wahr.)

Die Logik **CK** kann nicht die richtige Konditionallogik sein; dafür ist sie zu schwach. Aber wenn sie es wäre, dann wäre ID *nicht* gültig. Mit (45) liegt dagegen ein Konditional vor, von dem wir uns mühelos vorstellen können, daß es auf eine gehaltvolle Weise wahr ist, im Gegensatz etwa zu dem Konditional

(46) Wenn Peter die Quadratur des Kreises gelingen würde, dann würde er häufiger baden.

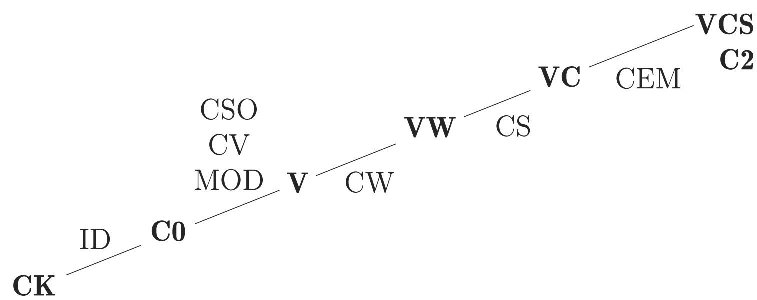
Wir können solche Beispiele zum Anlaß nehmen, unsere semantische Theorie zu revidieren. In diesem Fall müßten wir zwischen verschiedenen unmöglichen Welten unterscheiden: Wir müßten unterscheiden zwischen einer (unmöglichen) Welt, in der die Quadratur des Kreise überrascht und einer, in der sie nicht überrascht. Kurzum, wir müßten die Beschränkung auf *mögliche* Welten aufgeben.[12]

Eine andere theoretische Option besteht darin, auf dieses “Paradox der kontrafaktischen Implikation” wie auf die analogen Schwierigkeit mit der materialen und der strikten Implikation zu reagieren. Wir müßten erklären, warum manche Konditionale, obwohl wahr, nicht behauptbar sind. Von einem Konditional wie (44), zum Beispiel, würden wir sagen, daß es “nicht richtig” sei. Können wir dieses “nicht richtig” im Sinne von “nicht behauptbar obwohl (auf leere Weise) wahr” interpretieren? Warum ist (44) nicht behauptbar? Und warum ist (45) im Gegensatz zu (46) behauptbar, obwohl beide auf bloß leere Weise wahr sind? Eine Antwort müßte hier

[12] Siehe [18] und [8] für einen Einblick in mögliche Strategien für eine Revision der semantischen Theorie.

die einfache semantische Theorie der Wahrheitsbedingungen mit einer komplizierten Theore der Behauptbarkeitsbedingungen kombinieren. Dagegen scheint unter der zuerst genannten Option die Erklärung recht einfach zu sein: (45) ist behauptbar, weil das Konditional wahr ist, während (44) und (46) nicht behauptbar sind, weil die Konditionale falsch sind. Aber diese einfache Antwort müßten wir uns mit einer erheblichen Komplizierung der semantischen Theorie erkaufen.

Einige bekannte Erweiterungen von CK. Die Logik **CK** ist eine durch ihre einfachen Modelle ausgezeichnete Ausgangsbasis für eine Logik kontrafaktischer Konditionale; sie ist aber sicher selbst keine solche Logik. Es fehlt beispielsweise das Schema ID. Das folgende Diagramm zeigt die Beziehungen zwischen sechs Logiken, die in der Literatur häufig Erwähnung finden. Eine Linie von unten nach oben deutet eine Erweiterung an, wobei die Linie mit den Schemata versehen ist, um welche das unmittelbar darunter stehende System erweitert wird; vgl. auch die Tafel auf p. 211.



Während CK so etwas wie ein "technischer Anfang" ist, spielt das System **C0** die Rolle einer gesicherten Basis für die Konditionallogik. Auch die Hinzunahme von MOD und CSO ist unkontrovers. Mit der vorsichtigen Verstärkung CV beginnen jedoch die Kontroversen. Noch umstrittener sind schwache und starke Zentrierung, CW und CS, und das konditionale *tertium non datur* CEM. Diese Systeme und ihre charakteristischen Schemata bilden jedoch nur die Eckpunkte für eine Diskussion, die weitaus subtiler und verzweigter ist als es hier dargestellt werden kann.

Das System **VC** ist das von Lewis in [35] bevorzugte System. Es handelt sich dabei um die logische Theorie einer besonders suggestiven Semantik für kontrafaktische Konditionalsätze, der sogenannten (zentrierten) Sphärensysteme.

Übung. Man betrachte die folgenden Schemata, um die man die kleinste normale Modallogik **K** erweitern kann. (Vgl. den Abschnitt über Definierbarkeit im Kapitel über Modallogik.)

T.	$\Box B \to B$
4.	$\Box B \to \Box\Box B$
B.	$B \to \Box\Diamond B$

5.	$\Diamond\Box B \to \Box B$
D.	$\Box B \to \Diamond B$
4c.	$\Box\Box B \to \Box B$
G.	$\Diamond\Box B \to \Box\Diamond B$

Man ersetze jedes Vorkommen von $\Box$ durch $A \sqsupset$ bzw. von $\Diamond$ durch $A >$. Sind die so entstandenen Schemata plausibel für kontrafaktische Konditionale? Welchen Rahmenbedingungen würden sie entsprechen? Sind einige dieser Schemata in einigen der oben genannten Konditionallogiken enthalten?

5. Lewis' Sphärensemantik

Die Grundidee der hier vorgestellten semantischen Theorie für kontrafaktische Konditionale besteht darin, daß Welten einander mehr oder weniger ähnlich sein können. Um ein Konditional in einer Welt zu beurteilen, sollten wir nur solche Welten betrachten, in denen das Antezedens wahr und alles andere möglichst unverändert ist. Es liegt nahe, sich die Ähnlichkeit bildhaft vorzustellen, in dem wir das Maß der Ähnlichkeit in ein topographisches Maß der Entfernung übersetzen: Je unähnlicher eine Welt der Ausgangswelt ist, umso weiter ist jene von dieser entfernt. So stellen wir uns schließlich Sphären der Ähnlichkeit, um die Ausgangswelt angeordnet, vor – wie eine Matroschka-Puppe oder die Schichten einer Zwiebel. Diese bildliche Vorstellung steht tatsächlich in einer strikten Analogie zu den bisher betrachteten variabel relationalen Rahmen.

Es sei $\mathfrak{S}$ eine Funktion, die jeder Welt $a \in W$ eine Menge $\mathfrak{S}_a$ von Mengen möglicher Welten zuordnet:

$$\mathfrak{S} : W \longrightarrow \wp(\wp(W)),$$

d.h. $\mathfrak{S}_a \subseteq \wp(W)$. Wir nennen $(W, \mathfrak{S})$ einen *Sphärenrahmen*, wenn jede Menge $\mathfrak{S}_a$ ein Sphärensystem um a ist. Die Elemente S eines Sphärensystems $\mathfrak{S}_a$ heißen *Sphären*. Ein *Sphärensystem* $\mathfrak{S}_a$ *um* a soll die folgenden Bedingungen erfüllen:

(Scs) $\mathfrak{S}_a$ ist auf a *zentriert*: $\{a\} \in \mathfrak{S}_a$.
(Sli) $\mathfrak{S}_a$ ist *verschachtelt*: $\forall S, S' \in \mathfrak{S}_a : S \subseteq S'$ oder $S' \subseteq S$.
(Sla) *Limes-Annahme*: $\forall X \subseteq W$: Wenn $X \cap \bigcup \mathfrak{S}_a \neq \emptyset$, dann
$\exists S \in \mathfrak{S}_a : S \cap X \neq \emptyset$ und
$\forall S' \in \mathfrak{S}_a : S' \cap X \neq 0 \Rightarrow S \subseteq S'$.

Die Limes-Annahme besagt soviel wie: Für jede nicht abwegige Bedingung X gibt es eine kleinste Sphäre mit Punkten, die X erfüllen; wir werden gleich darauf zurückkommen. In einer Zeile lassen sich Sphärensystem also so beschreiben:

$$\{a\} \subseteq S \subseteq S' \subseteq \cdots \subseteq \bigcup \mathfrak{S}_a (\subseteq W).$$

Die Mengeninklusion repräsentiert hier die relative Distanz einer Sphäre vom Zentrum a.[13] Die Menge $\bigcup \mathfrak{S}_a$ aller Punkte, die in irgend einer Sphäre in $\mathfrak{S}_a$ vorkommen, ist die größte Sphäre in $\mathfrak{S}_a$. Was außerhalb von $\bigcup \mathfrak{S}_a$ liegt, ist "abwegig", d.h. eine Möglichkeit, die keinerlei Ähnlichkeit zur Welt im Zentrum aufweist. Wir könnten fordern, daß keine noch so entfernte Möglichkeit abwegig sei. Dann müßten wir Sphärensysteme unter die weitere Bedingung $\bigcup \mathfrak{S}_a = W$ stellen. Zur Grundkonzeption eines Sphärensystems gehört diese Bedingung jedoch nicht.[14]

Die Limes-Annahme (Sla) verhindert, daß die Ketten der Mengeninklusion unendlich dicht werden können – jedenfalls in den Fällen, die uns interessieren. Wenn wir ein Konditional in a beurteilen, dann wollen wir die a ähnlichste Sphäre finden, in denen das Antezedens möglich ist (d.h. in einigen Welten dieser Sphäre wahr ist). Ohne (Sla) kann aber nun folgendes geschehen: Wir betrachten alle Sphären, in denen A-Welten vorkommen; nennen wir sie A-Sphären. Wenn es zu jeder A-Sphäre eine kleinere (a-ähnlichere) und zu dieser wiederum eine kleinere gibt, ohne daß wir im Fortschreiten von größeren zu kleineren Sphären jemals den Bereich der A-Sphären verlassen müssen, dann gibt es offenbar keine kleinste (ähnlichste) A-Sphäre. Die Bedingung (Sla) schließt genau diese Möglichkeit aus: Für jede nicht abwegige Bedingung X ($X \cap \bigcup \mathfrak{S}_a \neq \emptyset$), gibt es eine X-Sphäre ($S \cap X \neq \emptyset$), welche die kleinste unter den X-Sphären ist ($\forall S' \in \mathfrak{S}_a : S' \cap X \neq 0 \Rightarrow S \subseteq S'$). Die Limes-Annahme ist, bei genauerer Betrachtung, zumindest gewagt. Aber sie vereinfacht die Theorie. Glücklicherweise können wir ohne sie auskommen, wir wir später sehen werden.

Um die Wahrheitsbedingung für Konditionale kurz darstellen zu können, führen wir eine Definition ein: $\min_a(X)$ soll die a naheliegendste Sphäre in $\mathfrak{S}_a$ sein, die sich mit X (nicht-leer) überschneidet, falls es eine solche gibt; anderenfalls sei $\min_a(X)$ die leere Menge. Also

Definition 5. Für $X \cap \bigcup \mathfrak{S}_a = \emptyset$ sei $\min_a(X) = \emptyset$ (in $(W, \mathfrak{S})$). Anderenfalls sei $\min_a(X) = S$ (in $(W, \mathfrak{S})$) gdw

1. $S \in \mathfrak{S}_a$,
2. $S \cap X \neq \emptyset$, und
3. $\forall S' \in \mathfrak{S}_a : S' \cap X \neq \emptyset \Rightarrow S \subseteq S'$.

Schließlich sei für jede Teilmenge X von W, $\mu_a(X) = \min_a(X) \cap X$.

Der Hinweis darauf, daß für jedes $a \in W$ die Abbildungen $\min_a$ und μ_a immer relativ zu einem Sphärenrahmen $(W, \mathfrak{S})$ zu verstehen sind, ist wichtig. Wir können ihn aber im folgenden implizit lassen, da wir uns in einem Kontext immer nur auf einen Sphärenrahmen beziehen werden.

Die erste Zeile der Definition behandelt den Fall, daß X eine abwegige

[13] Man beachte, daß die Bedingungen nicht ausschließen, daß es Sphärensysteme gibt, die die Inklusionskette links noch um $\emptyset \subseteq$ ergänzen. Tatsächlich ist dies in allen Sphärensystemen der Fall, die wir im Abschnitt über die Limes-Annahme (Sla) betrachten werden. Die Hinzunahme der leeren Menge ergibt intuitiv wenig Sinn und ist für die so entstehende Logik folgenlos.

[14] Ebenso könnte man (Scs) aus der Grundkonzeption von Sphären herausnehmen und durch eine schwächere Zentrierungsbedingung ersetzen. Wir werden darauf zurückkommen; siehe p. 210.

Bedingung ist, d.h. die Menge X nur aus Welten besteht, die außerhalb des Sphärensystems liegen. Im Hauptfall ("anderenfalls ...") einer nicht abwegigen Bedingung X besteht die Menge $\mu_a(X)$ aus allen X-Welten in der kleinsten Sphäre um a, in der es überhaupt X-Welten gibt; mit anderen Worten, $\mu_a(X)$ ist die Menge der a-ähnlichsten X-Welten. Hier setzt die Definition voraus, daß es *genau eine* Sphäre S gibt, welche die Bedingungen 1-3 erfüllt, d.h. eine Sphäre, in denen es X-Welten gibt (Existenz) und die keine kleineren (a näheren) Sphären mit X-Welten enthält (Einzigkeit). In allen *endlichen* Sphärensystemen ist diese Voraussetzung natürlich erfüllt. Für unendliche Sphärensysteme ist es die Limes-Annahme (Sla), welche die Voraussetzung garantiert. Aus der Definition folgt daher unmittelbar, daß

(Sla′) $$X \cap \bigcup \mathfrak{S}_a \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \min_a(X) \neq \emptyset.$$

Die Wahrheitsbedingung für $\sqsupset$-Formeln können wir nun so definieren:

($\sqsupset_\ell$) $$a \models A \sqsupset B \text{ gdw } \mu_a[\![A]\!] \subseteq [\![B]\!]$$

(mit $\mu_a[\![A]\!]$ kurz für $\mu_a([\![A]\!])$). Wenn A eine abwegige Bedingung ausdrückt, also $[\![A]\!] \cap \bigcup \mathfrak{S}_a = \emptyset$, dann ist $\mu_a[\![A]\!] = \emptyset$ und somit gilt $a \models A \sqsupset B$ für beliebige Formen B. Im Hauptfall $[\![A]\!] \cap \bigcup \mathfrak{S}_a \neq \emptyset$ läßt sich diese Wahrheitsbedingung z.B. so wie in den Diagrammen 4–7 (s.u.) illustrieren.

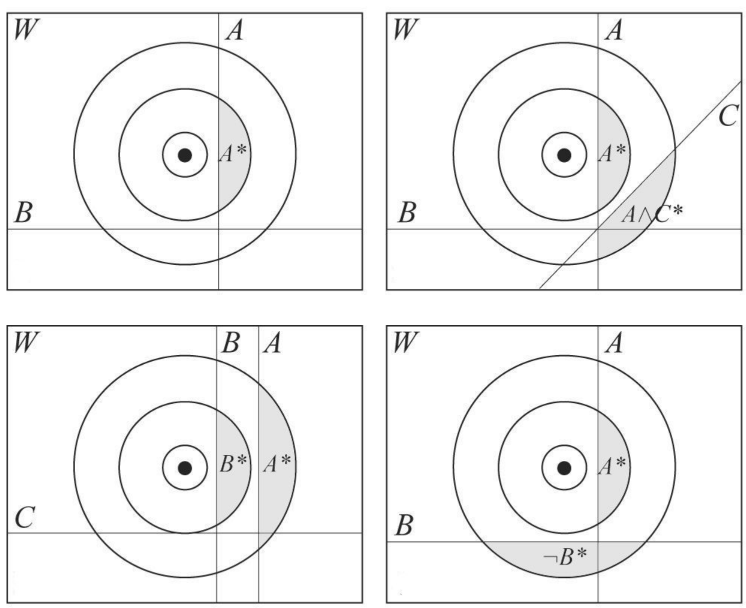


Diagramme 4–7. (Im Uhrzeigersinn.) Der Bereich rechts von der mit A beschrifteten Geraden sei der Bereich der A-Welten. A^* deutet $\mu_a(A)$ an (grauer Bereich); ebenso für die übrigen Buchstaben*. Diagramm 4 illustriert die Wahrheitsbedingung für den Hauptfall $[\![A]\!] \neq \emptyset$. Diagramme 5–7 zeigen jeweils ein Gegenbeispiel zu (Verst), (Trans) und (Kontrap).

In Sphärenmodellen scheitern (Verst), (Trans) und (Kontrap) auf recht anschauliche Weise.

· In den Diagrammen 4–7 liegt $\mu_a(A)$ (mit A^* angedeutet) immer im Bereich der B-Welten; also gilt überall $a \models A \sqsupset B$ nach der Wahrheitsbedingung für ($\sqsupset_\ell$).
· In Diagramm 5 ist jedoch $\mu_a(A \wedge C)$ nicht in B enthalten; also nicht $a \models A \wedge C \sqsupset B$.
· In Diagramm 6 gilt auch $a \models B \sqsupset C$, jedoch nicht $a \models A \sqsupset C$, da $\mu_a(A) \nsubseteq [\![C]\!]$.
· In Diagramm 7 ist $\mu_a(\neg B)$ nicht vollständig in $[\![\neg A]\!] = W \setminus [\![A]\!]$ enthalten; also nicht $a \models \neg B \sqsupset \neg A$.

Von Sphären zu Relationen. In welcher Beziehung stehen Sphärenrahmen zu den früher betrachteten variabel strikten Rahmen für Konditionale? In Sphärenrahmen $(W, \mathfrak{S})$ können wir eine Relation $R^{\mathfrak{S}} \subseteq \wp(W) \times W \times W$ so definieren:

$$(R^{\mathfrak{S}}) \qquad R^{\mathfrak{S}}_X ab \ \text{ :gdw } \ b \in \mu_a(X).$$

(Wir erinnern uns, daß μ_a im Kontext relativ zu $\mathfrak{S}$ ist.) Wenn wir für $R_X ab$ wieder die Notationsvariante $b \in R_X(a)$ verwenden, dann können wir $(R^{\mathfrak{S}})$ auch als Gleichung ausdrücken:

$$R^{\mathfrak{S}}_X(a) = \mu_a(X).$$

Die Relation, so definiert, setzt also zu a alle die Punkte b in Beziehung, welche in der nächstgelegenen Sphäre die Bedingung X erfüllen. Diese Relation ist ersichtlich eine Relation vom selben Typ wie die Relation R in variabel relationalen Rahmen (vgl. p. 185).

Aufgrund der Anordnung der Sphären in einem Sphärenrahmen $(W, \mathfrak{S})$ haben die daraus abgeleiteten variabel relationalen Rahmen $(W, R^{\mathfrak{S}})$ gleich eine Reihe von Eigenschaften. Darüberhinaus sind Sphärenrahmen einerseits und daraus abgeleitete relationale Rahmen andererseits im Sinne der zweiten Behauptung des folgenden Satzes äquivalent.

Satz 5. *Sei $(W, \mathfrak{S})$ ein Sphärenrahmen.*

1. *Dann ist $(W, R^{\mathfrak{S}})$ ein variabel relationaler Rahmen, der die folgenden Bedingungen erfüllt (statt $R^{\mathfrak{S}}$ schreiben wir einfacher R):*
   - *(id)* $R_X ab \Rightarrow b \in X$.
   - *(cw)* $a \in X \Rightarrow R_X aa$.
   - *(mod)* $R_X(a) = \emptyset \Rightarrow R_Y(a) \cap X = \emptyset$.
   - *(cso)* $R_X(a) \subseteq Y \ \& \ R_Y(a) \subseteq X \Rightarrow R_X(a) = R_Y(a)$.
   - *(cs)* $a \in X \ \& \ R_X ab \Rightarrow a = b$.
   - *(cv)* $R_X(a) \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow R_{X \cap Y}(a) \subseteq R_X(a)$.
2. *$(W, \mathfrak{S})$ und $(W, R^{\mathfrak{S}})$ sind äquivalent: Für beliebige Formeln A und Interpretationen I,*

$$(W, \mathfrak{S}, I) \models A \ \textit{gdw} \ (W, R^{\mathfrak{S}}, I) \models A.$$

Beweis. *Ad* 1. Wir übersetzen zunächst, nach Def. ($R^{\mathfrak{S}}$), in allen Bedingungen $R_X xy$ als $y \in \mu_x(X)$ [$= \min_x(X) \cap X$].

(id): Angenommen $X = \emptyset$, dann $\min_a(X) = \emptyset$ und so $\mu_a(X) = \emptyset$. Also gibt es kein b mit $R_X ab$ und somit ist die Implikation (id) auf leere Weise wahr. Im anderen Fall, $X \neq \emptyset$, nehmen wir ferner an, daß $R_X ab$, d.h. $b \in \mu_a(X)$. Dann ist $b \in X$ nach Def. 5.

(cw): Angenommen $a \in X$. Dann ist $X \neq \emptyset$ und also, nach Def. 5 und der Zentrierungsbedingung (Scs) für Sphären, $a \in \min_a(X)$. Also ist $a \in \mu_a(X)$ [$= \min_a(X) \cap X$], d.h. $R_X aa$.

(mod): Angenommen $\min_a(Y) \cap Y \cap X \neq \emptyset$; zz. $\min_a(X) \cap X \neq \emptyset$. Da $\min_a(Y) \in \mathfrak{S}_a$, ist $\bigcup \mathfrak{S}_a \cap X \neq 0$. Es folgt nach (Sla′), daß $\min(X) \neq 0$ und also (Def. 5.2) auch $\min_a(X) \cap X \neq \emptyset$.

(cso): Wir nehmen an

$$(1)\ \mu_a(X) \subseteq Y \quad \text{und} \quad (2)\ \mu_a(Y) \subseteq X$$

sowie – für *reductio* – $\mu_a(X) \neq \mu_a(Y)$, d.h.

$$\exists b : (3)\ b \in \mu_a(X) \text{ und } (4)\ b \notin \mu_a(Y).$$

Aus (4) folgt $b \notin \min_a(Y)$ oder $b \notin Y$. Letzteres ist jedoch aufgrund von (1,3) ausgeschlossen; also

$$(5)\ b \notin \min_a(Y)$$

Aus (5) und (3) ($\Rightarrow b \in \min_a(X)$) folgt, daß

$$(6)\ \min_a(X) \not\subseteq \min_a(Y).$$

Aus (2) folgt jedoch, daß $S = \min_a(Y)$ eine Sphäre in $\mathfrak{S}_a$ ist mit $S \cap X \neq \emptyset$. Also folgt nach Def 5.3, $\min_a(X) \subseteq S$, im Widerspruch zu (6).

(cs): Wir müssen zeigen, daß im Falle $a \in X$, $\mu_a(X) = \{a\}$. Dazu genügt es nachzuweisen, daß unter der Voraussetzung, $\min_a(X) = \{a\}$. Nach der Zentrierungsbedingung (Scs) ist $\{a\}$ die kleinste Sphäre in $\mathfrak{S}_a$. Da schon diese Sphäre X schneidet, ist $\{a\}$ a-minimal in X.

(cv): Wir nehmen an, daß

$$(1)\ \mu_a(X) \cap Y \neq \emptyset;$$

zz. $\mu_a(X \cap Y) \subseteq \mu_a(X)$, d.h. $\min_a(X \cap Y) \cap X \cap Y \subseteq \min_a(X) \cap X$. Sei $S = \min_a(X)$. Wir zeigen zunächst, daß $S = \min_a(X \cap Y)$. (Da nach (1) X und $X \cap Y$ nicht leer sind, kommt nur der Hauptfall der Def. 5 zur Anwendung.) Aus (1) folgt unmittelbar, daß $S \cap (X \cap Y) \neq \emptyset$. Angenommen nun, es gäbe eine Sphäre $S' \subset S$ mit $S' \cap (X \cap Y) \neq \emptyset$. Dann $S' \cap X \neq \emptyset$. Aber da S minimal in den X-schneidenden Sphären ist, wäre dann, nach Def., 5.3 $S \subseteq S'$ – Widerspruch. Somit haben wir

$$(2)\ \min_a(X) = \min_a(X \cap Y)$$

aus (1) bewiesen. Da nun

$$\min_a(X) \cap X \cap Y \subseteq \min_a(X) \cap X$$

folgt durch Einsetzen gemäß (2) die gewünschte Inklusion

$$\min_a(X \cap Y) \cap X \cap Y \subseteq \min_a(X) \cap X.$$

Ad 2. Es genügt, zu zeigen, daß

$$\mu_a[\![A]\!] \subseteq [\![B]\!] \text{ in } (W, \mathfrak{S}, v) \text{ gdw } R^{\mathfrak{S}}_{[\![A]\!]} \subseteq [\![B]\!] \text{ in } (W, R^{\mathfrak{S}}, v),$$

was unmittelbar aus ($R^{\mathfrak{S}}$) folgt. ∎

Von Relationen zu Sphären. Im vorigen Abschnitt haben wir gezeigt, daß es zu jedem Sphärenrahmen einen daraus abgeleiteten relationalen Rahmen mit den für die Logik **VC** typischen Eigenschaften gibt. Wir zeigen nun, daß auch der umgekehrte Weg möglich ist: Aus relationalen Rahmen können wir Sphärenrahmen ableiten. Das kann natürlich nicht für beliebige relationale Rahmen gelten. So falsifizieren z.B. Rahmen, in denen die Relation nicht die Bedingung (id), $R_X ab \Rightarrow b \in X$, erfüllt, das Schema $A \sqsupset A$, welches in allen Sphärenrahmen gilt. Relationale Rahmen, aus denen sich Sphärenrahmen ableiten lassen, müssen also eine Reihe von Bedingungen erfüllen. Welches sind diese Bedingungen? Es zeigt sich (im Beweis des nächsten Satzes), daß die folgenden Bedingungen dem Zweck dienen.

(ex) $\exists X : R_X aa$
(id) $R_X ab \Rightarrow b \in X$
(cs) $a \in X$ und $R_X ab \Rightarrow a = b$
(cn) $R_X(a) \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow R_Y(a) \subseteq R_X(a)$
(disj) $R_X(a) \subseteq R_{X \cup Y}(a)$ oder $R_Y(a) \subseteq R_{X \cup Y}(a)$

Diese Zusammenstellung von Bedingungen hat im jetzigen Zusammenhang vor allem eine technische Bedeutung indem sie die Wahrheit von Satz 6 garantiert. Wir wollen variabel relationale Rahmen, welche die Bedingungen (ex), (id), (cs), (cn) und (disj) erfüllen, schon im Vorgriff auf Satz 6 *sphäroid* nennen. Für jeden Punkt $a \in W$ eines sphäroiden Rahmens sei eine Menge $\mathfrak{S}^R_a \subseteq \wp(W)$ wie folgt definiert:

($\mathfrak{S}^R_a$) $S \in \mathfrak{S}^R_a$ gdw
1. $\forall b \in W : \ b \in S \Rightarrow \exists X \subseteq W : R_X ab$, und
2. $\forall X \subseteq W : \ X \cap S \neq \emptyset \Rightarrow R_X(a) \subseteq S$.

Die so definierten Mengen sammeln genau die Punkte ein, die zu a ähnlich unter einer (nicht abwegigen) Bedingung X sind. Mit $\mathfrak{S}^R$ bezeichnen wir diejenige Funktion, die jeden Punkt $a \in W$ auf die gerade definierte Menge $\mathfrak{S}^R_a$ abbildet. Es stellt sich heraus, daß die Elemente von $\mathfrak{S}^R_a$ Sphären sind.

SATZ 6.
1. *Wenn* (W, R) *ein sphäroider relationaler Rahmen ist, dann ist* $(W, \mathfrak{S}^R)$ *ein Sphärenrahmen.*
2. (W, R) *und* $(W, \mathfrak{S}^R)$ *sind äquivalent, d.h. für beliebige Formeln* A *und Interpretation* I *gilt:*

$$(W, R, I) \models A \text{ gdw } (W, \mathfrak{S}^R, I) \models A.$$

BEWEIS. *Ad* 1. Wir zeigen, daß $(W, \mathfrak{S}^R)$ die Bedingungen (Scs), (Sli) und (Sla) erfüllt.

(Scs): Mit $\{a\}$ für b in $(\mathfrak{S}^R_a)$ eingesetzt, ist die zweite Bedingung der Definition äquivalent zu (cs) und die erste Bedingung folgt unmittelbar aus (ex).

(Sli): Wir nehmen für *reductio* an, daß weder $S \subseteq S'$ noch $S' \subseteq S$ $(S, S' \in \mathfrak{S}_a)$. Dann gibt es Punkte b und c mit

$$(1)\ b \in S \text{ und } (2)\ b \notin S' \text{ sowie } (3)\ c \in S' \text{ und } (4)\ c \notin S.$$

Aus (1) folgt nach $(\mathfrak{S}^R_a)$.1 $\exists X : R_X ab$, also, nach (id), $b \in X$, und also mit (1), $X \cap S \neq \emptyset$. Daraus schließen wir nach $(\mathfrak{S}^R_a)$.2 auf (5) $R_X(a) \subseteq S$. Aus (5) folgt aber auch

$$(*) \qquad R_{(X \cup Y)}(a) \subseteq S.$$

(Denn aus (5) folgt zunächst $R_X(a) \cap S \neq \emptyset$, und da, nach (id), $R_X(a) \subseteq X$, haben wir so $X \cap S \neq \emptyset$. Aber dann auch $(X \cup Y) \cap S \neq \emptyset$, woraus (6) nach $(\mathfrak{S}^R_a)$.2 folgt.) Mit einem exakt parallelen Argument führen wir (3) zu der Konklusion

$$(\dagger) \qquad R_{(X \cup Y)}(a) \subseteq S'.$$

Nun wenden wir (disj) and und schließen aus (*) und (†)

$$R_X(a) \subseteq S' \text{ oder } R_Y(a) \subseteq S.$$

Im Falle des linken Disjunkts haben wir dann $b \notin R_X(a)$ aus (2) und im Falle des rechten Disjunkts $c \notin R_Y(a)$ aus (4) – was dem obigen Schluß aus (1) auf $R_X ab$ bzw. dem parallelen Schluß aus (3) auf $R_Y ac$ widerspricht.

(Sla): Wir nehmen an, daß (1) $\bigcup \mathfrak{S}^R_a \cap X \neq \emptyset$. Dann ist nach $(R^{\mathfrak{S}})$ die folgende Familie $\mathcal{X}$ von Mengen S nicht leer:

$$(\mathcal{X}) \qquad \mathcal{X} := \{S \in \mathfrak{S}^R_a : S \cap X \neq \emptyset\}$$

Wir zeigen, daß $R_X(a) \in \mathcal{X}$ und daß $R_X(a)$ minimal in $\mathcal{X}$ ist.

$R_X(a) \in \mathcal{X}$. Denn Bedingung $(\mathfrak{S}^R_a)$.1 ist trivial erfüllt. Die Bedingung $(\mathfrak{S}^R_a)$.2 gilt aufgrund von (cn).

$R_X(a)$ ist minimal in $\mathcal{X}$. Denn, sei $S \in \mathcal{X}$. Dann $S \cap X \neq \emptyset$. Es folgt aufgrunde $(\mathfrak{S}^R_a)$.2, daß $R_X(a) \subseteq S$.

Ad 2. Gegeben eine beliebige Interpretation I, zeigen wir, daß

$$(W, R, I) \models C \text{ gdw } (W, \mathfrak{S}^R, I) \models C$$

durch Induktion über den Aufbau von C. Der interessante Schritt ist der, in dem C ein Konditional $A \sqsupset B$ ist. Hier ist zu zeigen:

$$(*) \qquad \forall b : R_X ab \Rightarrow b \in Y \text{ gdw } \min_a(X) \cap X \subseteq Y.$$

Nun ist $\min_a(X) = S$ genau dann, wenn S minimal in $\mathcal{X}$ (wie soeben in ($\mathcal{X}$) definiert) ist. Wir haben gesehen, daß $S = R_X(a)$. Da, nach (id), $R_X(a) = R_(X)a \cap X$, ist die rechte Seite von (*) äquivalent zu $R_X(a) \subseteq Y$ und damit auch äquivalent zur linken Seite ist. ■

Die Limes-Annahme. Wenn die Linie ———— kürzer als 2 cm wäre, dann wäre sie kürzer als sie es tatsächlich ist. Wie kurz wäre die Linie, wenn sie kürzer als 2 cm wäre? Wäre sie dann einen halben Zentimeter kürzer? Aber Welten, in denen die Linie ein Viertel Zentimeter kürzer wäre, sind unserer Welt ähnlicher als solche, in denen sie einen halben Zentimeter kürzer ist – und um ein Achtel Zentimeter kürzere Linien sind unserer Welt noch ähnlicher. Ganz allgemein gibt es für eine Welt, in der die Linie $2-\delta$ cm lang ist, eine unserer Welt ähnlichere, in der sie $2-\frac{\delta}{2}$ cm lang ist. Also gibt es keine Welten, in der die Linie auf die unserer Welt *ähnlichste* Weise kürzer als 2 cm ist. Durch fortgesetze Kürzung der Differenz δ können Welten unserer Welt immer ähnlicher werden und dabei die Bedingung erfüllen, daß die Linie kürzer als 2 cm ist. Es gibt als Antezedens-Bedingungen, die in Weisen erfüllt werden kann, die der aktualen Welt immer näher kommen, ohne dabei an eine Grenze zu stoßen. In solchen Fällen ist die Limes-Annahme falsch. Aber wenn die Limes-Annahme für *manche* Bedingungen, die im Antezedens eines Konditionals ausgedrückt werden können, falsch ist, dann kann sie keine Bedingung sein für Modelle, die wir zur Beurteilung *beliebiger* Konditionale verwenden möchten.

Was geschieht, wenn wir auf die Limes-Annahme verzichten? In diesem Fall ist die Funktion $\min_a$ für solche Bedingungen $[\![A]\!]$ nicht definiert, die zu unendlichen Annäherungsketten führen. Daraus folgt, das dann auch der Ausdruck $\mu_a[\![A]\!]$ keine Bedeutung hat. Die rechte Seite der Wahrheitsbedingung

$$(\sqsupset_\ell) \qquad a \models A \sqsupset B \text{ gdw } \mu_a[\![A]\!] \subseteq [\![B]\!]$$

ist dann unwahr – ohne falsch zu sein. Wenn aber die rechte Seite von ($\sqsupset$) nicht wahr ist, dann kann auch die linke Seite nicht wahr sein, d.h.

$$(\dagger) \qquad a \not\models A \sqsupset B.$$

Also wäre z.B. der Satz “Wenn die Linie [siehe oben] kürzer als 2 cm wäre, dann wäre sie kürzer als sie es tatsächlich ist” nicht wahr – was offenkundig falsch ist.

Nun ist es so, daß aus der Limes-Annahme folgt, daß jede Teilmenge $\mathcal{A}$ von $\bigcup \mathfrak{S}_a$ eine kleinste und eine größte Sphäre enthält. Da $\mathcal{A}$ verschachtelt unter $\subseteq$ ist (Bedigung Sli), so ist unter dieser Annahme garantiert, daß $\bigcup \mathcal{A}$ und $\bigcap \mathcal{A}$ ebenfalls Sphären in $\bigcup \mathfrak{S}_a$ sind. Ohne die Limes-Annahme müssen wir diese wichtige Garantie in die Definition eines Sphärenrahmens explizit aufnehmen. Ein Sphärenrahmen $(W, \mathfrak{S})$ steht deshalb unter den folgenden Bedingungen:

(Scs) $\mathfrak{S}_a$ ist auf a zentriert: $\{a\} \in \mathfrak{S}_a$.
(Sli) $\mathfrak{S}_a$ ist verschachtelt: $\forall S, S' \in \mathfrak{S}_a : S \subseteq S'$ oder $S' \subseteq S$.
(S∪) $\mathfrak{S}_a$ ist unter Vereinigung abgeschlossen: $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}_a : \bigcup \mathcal{A} \in \mathfrak{S}_a$.
(S∩) $\mathfrak{S}_a$ ist unter nicht-leeren Schnitten abgeschlossen: $\forall \mathcal{A}[\neq \emptyset] \subseteq \mathfrak{S}_a : \bigcap \mathcal{A} \in \mathfrak{S}_a$.

Die Wahrheitsbedingung für ($\sqsupset$) ist nun folgende:

$$(\sqsupset) \qquad a \models A \sqsupset B \text{ gdw } \begin{cases} \bigcup \mathfrak{S}_a \cap [A] = \emptyset, \text{ oder} \\ \bigcup \mathfrak{S}_a \cap [\![A]\!] \neq \emptyset \text{ und } \exists S \in \mathfrak{S}_a : S \cap [\![A]\!] \subseteq [\![B]\!]. \end{cases}$$

Die erste Zeile der rechten Seite behandelt den Fall, daß A abwegig ist. Für diesen Fall sieht ($\sqsupset$) vor, daß das Konditional (auf leere Weise) wahr ist; vgl. den Abschnitt über unmögliche Antezendentes, p. 199. Die zweite Zeile behandelt den Hauptfall, $[\![A]\!] \neq \emptyset$. In diesem Fall suchen wir eine Sphäre S, in der es A-Welten gibt. Wenn in allen A-Welten in S auch B wahr ist, dann ist das Konditional wahr und umgekehrt. Das erste Diagramm auf p. 203 illustriert diesen Fall (wobei A^* nun einfach $S \cap [\![A]\!]$ bezeichnet.)

Die Bedingungen ($\sqsupset_\ell$) und ($\sqsupset$) stimmen überein in allen Fällen, in denen die Limes-Annahme erfüllt ist. Für $[\![A]\!] = \emptyset$ ist das offensichtlich. Betrachten wir also den Hauptfall, $[\![A]\!] \neq \emptyset$. Zu zeigen ist

$$\exists S \in \mathfrak{S}_a : S \cap [\![A]\!] \subseteq [\![B]\!] \quad \text{ gdw } \quad \min_a [\![A]\!] \cap [\![A]\!] \subseteq [\![B]\!].$$

Unter der Limes-Annahme (Sla) ist $\min_a [\![A]\!] \in \mathfrak{S}_a$ und die Äquivalenz gilt daher von rechts nach links. Für die andere Richtung nehmen wir die linke Seite an. Es sei $\mathcal{A} = \{\mathcal{S} : \mathcal{S} \cap [\![A]\!] \neq \emptyset\}$. Nach (S∪) ist $\bigcap \mathcal{A} \in \mathfrak{S}_a$ und erfüllt auch die übrigen Bedingungen für $\bigcap \mathcal{A} = \min_a [\![A]\!]$ (Def. 5). Da $\min_a [\![A]\!] \subseteq S$, so auch $\min_a [\![A]\!] \cap [\![A]\!] \subseteq S \cap [\![A]\!]$ und also aufgrund der Annahme über S, $\min_a [\![A]\!] \cap [\![A]\!] \subseteq [\![B]\!]$.

Im Falle unendlicher Ketten von a immer näher kommenden Sphären, ergibt ($\sqsupset$) jetzt das richtige Ergebnis. Das Konditional $A \sqsupset B$ (mit erfüllbarem Antezedenz) ist in a genau dann wahr, wenn folgende Situation zutrifft: Indem wir der Welt a immer näher liegende A-Sphären betrachten, stoßen wir schließlich auf eine A-Sphäre, in der alle A-Welten auch B-Welten sind. Im Falle des Antezedens "Wenn die Linie kürzer als 2cm wäre ..." müssen wir uns von der aktualen Welt a nicht weit entfernen, um auf eine Sphäre von Welten zu stoßen, in der die Linie kürzer ist, als sie es tatsächlich ist. Das Konditional

(47) wenn die Linie kürzer als 2 cm wäre, dann wäre sie kürzer als sie es tatsächlich ist,

wird also wahr unter der neuen Wahrheitsbedingung ($\sqsupset$). Wie sieht es jedoch mit dem folgenden Konditional aus?

(48) Wenn die Linie kürzer als 2 cm wäre, dann würde der Leser es beim Nachmessen bemerken.

Die Sache ist nicht so klar. Einerseits scheint das Antezedens von (48) von der Art zu sein, welche zur Betrachtung dicht angeordneter Sphären zwingt: Die Differenz δ, um welche die Linie kürzer als 2 cm ist, kann beliebig klein werden. Längen, die man mit einem einfachen Lineal messen kann, sind jedoch nicht beliebig klein. Also ist (48) falsch. Andererseits kann die Rede vom Lineal im Konsequens im passenden Kontext die Limes-Annahme gewissermaßen in Kraft setzen. Ein passender Kontext wäre zum Beispiel der Geometrieunterricht, in dem die Schüler eine Lineal- und Zirkelkonstruktion durch Längenmessung nachprüfen sollen. Dabei werden immer Toleranzen eingeräumt. (Die Differenz δ bekommt einen fixen Minimalwert und kann nur ein ganzzahliges Vielfaches dieses Wertes betragen.) Wenn die Toleranz im Kontext bei 1 mm liegt, dann gelten alle Linien als gleich lang, wenn sie sich nicht um mehr als 1 mm unterscheiden. Das hat den Effekt, daß "kürzer als" in (48) nicht als eine dichte, sondern als eine diskrete Relation interpretiert wird. Unter dieser Interpretation sind für die Beurteilung von (48) nur endlich viele Sphären zu betrachten und das Konditional ist wahr. Ob wir ein Konditional in dichten oder diskreten Sphärensystemen beurteilen sollten, hängt offenbar nicht nur vom semantischen Gehalt des Antezedens, sondern auch vom Kontext ab.

Das ändert nichts daran, daß die Limes-Annahme etwas Falsches über die Relation der Ähnlichkeit zwischen Welten sagt. Da Ähnlichkeit grundsätzlich eine dichte Relation ist, so sind Sphärensysteme immer dicht angeordnet. Aber in vielen Fällen erlaubt der Kontext die Dichte zu ignorieren. In solchen Fällen sind die relevanten Sphären diskret voneinander unterschieden. Für die relevanten Sphären gilt dann die Limes-Annahme obwohl das System als solches dicht angeordnet ist.

Logik der Sphären. Die Limes-Annahme spielt für die logische Theorie keine Rolle; sie ist für dichte und diskrete Sphärensysteme gleich. Es sei SPH_ℓ die Klasse aller Sphärenmodelle so, wie wir diese zu Anfang, d.h. mit der Limes-Annahme (Sla) und der Wahrheitsbedingung ($\sqsupset_\ell$) definiert haben. Dagegen sei SPH die Klasse der Sphärenmodelle so, wie wir sie im letzten Abschnitt neu definiert haben, d.h. ohne (Sla), dafür jedoch mit den Abschluß unter Vereinigung und Schnitt und der neuen Wahrheitsbedingung ($\sqsupset$), welche die Limes-Annahme nicht voraussetzt. Dann sind in SPH_ℓ und in SPH genau dieselben Formeln gültig. Es stellt sich heraus, daß dies die Theoreme der Logik **VC** sind; vgl. die Tafel unten.[15]

Bis einschließlich MOD sind alle Schemata der Tafel in die Sphärensysteme gewissermaßen eingebaut. Wenn die semantische Analyse kontrafaktischer Konditionale in Sphärensystemen überzeugt, dann kann keines dieser Schemata strittig sein. Etwas anders steht es um das Schema CS. Es wird durch die starke Zentrierungsbedingung (Scs) erzwungen, wonach in jedem Sphärensystem auf einer Welt a die Menge $\{a\}$ als kleinste Sphäre enthalten ist. Einerseits ist die Bedingung durch die Modellierungsidee sehr gut motiviert; andererseits ist das zugehörige Schema negativ auffällig: Nicht

[15] Ein Vollständigkeitsbeweis über die Methode der kanonischen Modelle findet sich in [35].

Das System **VC**

τ. Alle Tautologien

REA. $$\frac{A \leftrightarrow A'}{(A \sqsupset B) \to (A' \sqsupset B)}$$

RK. $$\frac{B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \to B}{(A \sqsupset B_1) \wedge \cdots \wedge (A \sqsupset B_n) \to (A \sqsupset B)} \ (0 \leq n)$$

MP. $$\frac{A, A \to B}{B}$$

ID. $$A \sqsupset A$$

CSO. $$(A \sqsupset A') \wedge (A' \sqsupset A) \to ((A \sqsupset B) \to (A' \sqsupset B))$$

CV. $$(A > B) \wedge (A \sqsupset C) \to (A \wedge B \sqsupset C)$$

MOD. $$(\neg A \sqsupset \bot) \to (B \sqsupset A)$$

CW. $$(A \sqsupset B) \to (A \to B)$$

CS. $$A \wedge B \to (A \sqsupset B)$$

jedes zufällig wahre Paare von Aussagen scheint entsprechende Konditionale (in beide Richtungen) zu implizieren. Vielleicht sollten wir deshalb einer schwächeren Zentrierungsbedingung den Vorzug geben: $\{a\}$ ist nicht immer die kleinste Sphäre in $\mathfrak{S}_a$ aber a ist der gemeinsame Kern aller Sphären auf a, d.h. a ist in allen Sphären als Element enthalten. Genauer formuliert ist diese Bedingungen der schwachen Zentrierung gemeint:[16]

(Scw) $\exists S \in \mathfrak{S}_a : S \neq 0$ und $\forall S \in \mathfrak{S}_a : S \neq \emptyset \Rightarrow a \in S$.

Diese Bedingung entspricht dem unkontroversen Schema CW. Wenn wir aus den Schemata der Tafel das Schema CS streichen, dann erhalten wir eine Axiomatisierung der in schwach zentrierten Sphärensystemen gültigen Formeln. Dieses System wird **VW** genannt. Für eine Axiomatisierung von **VC** ist das Schema CW in der Tafel redundant; vor dem Hintergrund der anderen Schemata folgt dieses aus CS. Fügen wir **VC** noch das Schema

CEM. $$(A \sqsupset B) \vee (A \sqsupset \neg B)$$

[16] Wenn wir (Scs) durch die neue Bedingung ersetzen, daß a in allen Sphären enthalten sein muß, dann garantiert jetzt nur die Bedingung (S∪), daß ein Sphärensystem nicht leer ist. Aber die bloße Garantie, daß $\emptyset \in \mathfrak{S}_a$, ist zu wenig für eine nicht-triviale logische Theorie. Deshalb brauchen wir eine Bedingung, die mindestens eine nichtleere Sphäre in $\mathfrak{S}_a$ erzwingt. Genau das ist der Sinn des ersten Konjunkt von (Scw).

hinzu, so entsteht Stalnakers System **C2** (bei Lewis **VCS**). In der Sphärensemantik entspricht CEM der Bedingung, daß es in jedem Sphärensystem für jede nicht abwegige Proposition X eine Sphäre S gibt, so daß $X \cap S$ genau eine Welt enthält.

* * *

Die Theorie kontrafaktischer Konditionale, die wir bis hierher vorgestellt haben, ist eine reife Theorie, nicht anders als die Modelltheorie der Modallogik. Die Theoriebildung hat schon früh einen Fixpunkt erreicht – im Grunde schon mit Lewis' Untersuchung [35] aus dem Jahre 1973.[17] Das gilt sowohl für die Art der semantischen und logischen Analyse als auch für die ausgezeichnete Stellung gewisser Systeme unter der Grundinterpretation. Die Systeme **VW** und **VC** sind – wie **S4** und **S5** in der Modallogik – als Referenzpunkte wenig umstritten. Weitgehend unumstritten ist es auch, daß kontrafaktische Konditionale wichtige Aspekte der Welt beschreiben. Daß Kochsalz löslich ist, ist eine Tatsache, und genau diese Tatsache wird auch beschrieben durch das Konditional "Wenn man Kochsalz in Wasser geben würde, dann würde es sich darin auflösen". Mit anderen Worten, wenn Dispositionseigenschaften auf Stoffe zutreffen können – was kaum jemand bestreitet –, dann müssen auch die entsprechenden kontrafaktischen Konditionale wahr sein können.

Die Theorie indikativischer Konditionalsätze, der wir uns jetzt zuwenden, ist dagegen weitaus unabgeschlossener. Das betrifft auch die grundsätzliche Fragen, ob sich für solche Konditionale überhaupt Bedingungen angeben lassen, unter denen sie etwas zutreffend beschreiben, also wahr sind. Unumstritten ist, daß ein Sprecher mit einem Konditional wie "Wenn der Zug pünktlich abgefahren ist, dann wir er auch pünktlich eintreffen" Auskunft über seinen Überzeugungszustand gibt, nämlich, daß dieser so ist, daß der Sprecher glaubt, der Zug komme pünktlich an, sobald er glaubt, daß er pünktlich abgefahren sei. Wenn sein Überzeugungszustand nicht so ist, dann sollte er das Konditional nicht behaupten. Daß zu Konditionalen Bedingungen gehören, unter denen sie richtig behauptet werden können, ist also nicht kontrovers. Aber können Konditionale darüber hinaus auch wahr oder falsch sein? Beschreiben sie Tatsachen so wie das das kontrafaktische Kochsalz-Konditional tut? Wenn ja, welche Tatsache wird durch diese eigentümliche Kombination zweier Sätze beschrieben?

6. Indikativische Konditionale

Jacksons Tatsächlichkeitsargument (vgl. p. 177) weist auf einen wesentlich Unterschied zwischen kontrafaktischen und indikativischen Konditionalen hin: Jene bringen alternative mögliche Welten ins Spiel, diese tun das nicht. Wenn indikativische Konditionale überhaupt Wahrheitsbedingungen haben, dann spielen für die Wahrheit von *Wenn A, dann B* in einer Welt

[17] Diese schließt an noch frühere Arbeiten an von Lennart Åquvist, Kit Fine, Hans Kamp und Robert Stalnaker.

a allein Eigenschaften dieser Welt a eine Rolle. Wenn die Wahrheitsbedingung in irgendeiner Weise rekursiv sein soll, dann bedeutet das, daß der Wahrheitswert von *Wenn A, dann B* in a bestimmt wird von Eigenschaften der Teilsätze A und B in a. Die einfachste und daher zunächst auch plausibelste Hypothese ist, daß die einzig relevanten Eigenschaften, um die es hier gehen kann, die Wahrheitswerte von A und B in a sind. Nach dieser Hypothese ist das Konditional *Wenn A, dann B* eine Wahrheitsfunktion der Teilsätze A und B, und offenbar kommt hier nur diejenige Funktion in Frage, die wir so ausdrücken können:

MAT. $\quad a \models \textit{Wenn A, dann B} \;$ gdw $\; a \not\models A$ oder $a \models B$,

d.h. indikativische Konditionale haben die Wahrheitsbedingungen materialer Konditionale.

Diese Hypothese MAT, steht, für sich betrachtet, nicht gut da angesichts von Beispielen wie diesen:

(49) (a) Peter hat einige Klausuren bestanden.
(b) Peter wird zur Abschlußprüfung zugelassen.
?*Also*: (c) Wenn Peter keine Klausur bestanden hat, dann wird er zur Abschlußprüfung zugelassen.

(50) (a) Die Staatsschulden werden nicht abgebaut.
(b) Die Krise hält an.
?*Also*: (c) Wenn die Schulden abgebaut werden, dann hält die Krise an.

Unter den Annahmen (a) und (b) würden wir die konditionale Konklusion (c) normalerweise nicht behaupten wollen. Aber (c) ist wahr unter den Annahmen (a) und (b) und der Wahrheitsbedingung MAT. Wir müssen also entweder die Hypothese MAT aufgeben oder den Schluß von der Wahrheit auf die Behauptbarkeit von (c) blockieren.

Grice: Konditionale und Gesprächsimplikatur. Nach Grice [21] sollten wir bei der Betrachtung von Konditionalen pragmatische Aspekte mit einbeziehen. Es ist eine Binsenweisheit, daß man nicht allein durch das Äußern wahrer Sätze zu einem gelungenen Gespräch beiträgt. Beispielsweise ist es nicht sehr hilfreich, wenn ein Arzt seinem Patienten mitteilt, daß er unter Migräne oder an einem Hirntumor leidet, wenn der Arzt entweder die Migräne oder den Tumor schon festgestellt hat. Die schwächere disjunktive Aussage ist zwar wahr, aber im Kontext interessiert allein die informativere, stärkere Aussage. Wahre Aussagen sind nicht in jedem Kontext äußerbar oder *behauptbar*, wie wir fortan sagen wollen.[18] Für ein erfolgreiches Gespräch gibt es gewisse Regeln. Gespäche sind korperative Unternehmungen, die vornehmlich dem Zweck dienen, Information auszutauschen. Die oberste Regel muß es es also sein, sich im Hinblick auf den

[18] Umgekehrt, müssen auch nicht alle behauptbaren Aussagen wahr sein. Wenn der Sprecher seinen "epistemischen Pflichten" nachkommt – Aussagen nach bestem Wissen und Gewissen macht –, dann können wir ihn nicht für die Behauptung von Aussagen kritisieren, die sich als falsch herausstellen.

Zweck kooperativ zu verhalten. Das ist man nur dann, wenn man ehrlich ist, sich so deutlich wie möglich ausdrückt, zum Punkt spricht und nicht hinter dem Berg hält. Grice hat diese Bedingungen in Maximen gefaßt, zu denen auch die folgende gehört:[19]

Die Maxime der Quantität

Behaupte nicht weniger als Du weißt und nicht mehr als dem Zweck des Gesprächs dienlich ist.

Normalerweise unterstellen Sprecher einander, daß sie die Maxime befolgen. In diesem Sinne trägt jeder Redebeitrag eine sogenannte *Gesprächsimplikatur*: In einem Gesprächskontext ist eine Aussage B Implikatur einer Behauptung A (unter der Quantitätsmaxime), wenn

(a) der Hörer davon ausgehen darf, daß der Sprecher, indem er A behauptet, die Maxime der Quantität befolgt;
(b) diese Annahme den Hörer berechtigt auf B zu schließen (und dieser dazu auch in der Lage ist); und
(c) der Sprecher davon ausgehen muß, daß (b) der Fall ist.

Nach der Maxime der Quantität trägt Peters Äußerung des Satzes "Die Eintracht oder die Borussia spielen um den Pokal" in einem typischen Kontext die Implikatur, daß Peter sich nicht in der Lage sieht, zu sagen, welche von beiden Mannschaften ins Finale einziehen wird. Diese Implikatur kann er aufheben, indem er dem Satz einfach hinzufügt: "... und ich weiß auch schon, wer es sein wird". Die Möglichkeit, eine Implikatur B einer Äußerung von A zu streichen, indem man einfach $\neg B$ der Aussage A hinzufügt, unterscheidet Implikaturen von Implikationen – und ist somit ein Test auf das Vorliegen einer Implikatur. Denn, wenn A die Aussage B (material) impliziert, dann ist die Konjunktion $A \wedge \neg B$ widersprüchlich. Wenn die Behauptung von A dagegen B "implikiert", dann generiert die Hinzufügung von $\neg B$ keinen Widerspruch, sondern "löscht" einfach nur die normalerweise unterstellte Aussage B.

Die Maxime der Quantität gibt eine Möglichkeit an die Hand, zu erklären, was Beispiele wie (49) und (50) so merkwürdig macht, ohne daß wir die einfache Wahrheitsbedingung MAT für indikativische Konditionale aufgeben müssen. Es läßt sich keine einigermaßen normale Situation denken, in der ein Sprecher (c) zurecht behaupten könnte, wenn er (a) oder (b) für wahr hält. Denn, in normalen Kontexten geäußert, trägt (c) die Implikatur, daß der Sprecher nichts stärkeres behaupten kann. Aber genau diese Implikatur ist falsch; er könnte ja (a) oder (b) behaupten und damit dem

[19] Die anderen Maximen sind die Maxime der *Qualität* (behaupte nur, was Du für wahr und ausreichend begründet hältst), die Maxime der *Relation* (enthalte Dich irrelevanter Behauptungen), und die Maxime der *Art und Weise* (drücke Dich so klar und deutlich wie möglich und in guter Reihenfolge aus). Daß Gespräche im Normalfall kooperative Unternehmungen sind und also von Normen bestimmt werden, die den Erfolg der Kooperation sichern sollen, ist einleuchtend. Die Theorie von Grice in [21] ist ein erster Versuch, diese Normen zu bestimmen und die Unterscheidung zwischen Wahrheit und Behauptbarkeit systematisch anzugehen. Bei genauerem Hinsehen steht eine solche Theorie vor schwierigen Herausforderungen; viele davon behandelt schon Grice in späteren Schriften (gesammelt in [22]); vgl. auch [13].

Gesprächszweck besser dienen. Die Bedingungen für die Behauptbarkeit von (c) sind also nicht erfüllt. Das Konditional (c) ist, obgleich wahr unter einer der Voraussetzungen (a) oder (b), nicht behauptbar. Daher würde auch niemand in einem normalen Gespräch ein Argument wie (49) oder (50) vorlegen wollen, obgleich es doch gültig ist.

Die Theorie der Gesprächsmaximen blockiert also den Schluß von der Wahrheit eines Konditionals auf dessen Behauptbarkeit. Sie erklärt, warum wir an den Konditionalen (c) in (49) und (50) Anstoß nehmen: Die Konditionale sind wahr, jedoch falsch verwendet. Die andere Möglichkeit, unserer Ablehnung der Konditionale zu erklären, bestünde in einem Nachweis ihrer Unwahrheit: Wir würden so die Wahrheitsbedingung MAT zurückweisen und (c) als Beispiele einer neuen Sorte von Konditionalen identifizieren. Welcher Erklärung sollten wir den Vorzug geben?

Gesprächsmaximen haben eine einfache Erlärung im sozialen Zweck von Sprache überhaupt. Menschen sind auf Kooperation angewiesen. Gesprächsmaximen sind Normen, die den kooperativen Zweck sprachlicher Kommunikation sichern sollen. Grice zieht daraus einen methodologischen Schluß, der manchmal das "Grice'sche Rasiermesser" genannt wird:[20] Wenn zwei Erklärungen eines sprachlichen Phänomens angeboten werden, von denen die eine ausschließlich auf allgemeine Kooperationsmaximen zurückgreift, während die andere spezifischere Erklärungen bemühen muß, dann ist immer der ersten der Vorzug zu geben, da sie auf einer allgemeineren und letztlich sprachunabhängigen Erklärungsbasis beruht.

* * *

Die entscheidende Frage ist: Reichen Gesprächsmaximen aus, um die gegen die Hypothese MAT sprechenden Daten über indikativische Konditionale zu erklären? Der Versuch, MAT durch den Rückgriff auf Gesprächsmaximen zu retten, ist von zwei Möglichkeiten bedroht. Erstens, könnte die Theorie material wahre Konditionale als behauptbar passieren lassen, die es tatsächlich nicht sind. Die Grice'sche Theorie würde dann nicht alle Gegenbeispiele zu MAT ausschalten können – ihr Behauptbarkeitsbegriff würde "übergenerieren". Zweitens könnte die Theorie auch untergenerieren. Dann würde sie material wahre Konditionale als nicht behauptbar aussondern obwohl sie durchaus behauptbar sind. Die folgenden Beispiele bedrohen die Theorie mit dem Vorwurf der Untergenerierung:

(51) Es wird nicht regnen. Falls es (doch) regnet, gehen wir ins Haus.
(52) Das Spiel gewinnen wir. (Selbst) wenn Meier ausfällt, gewinnen wir.

Die Beispiel sind analog zu (49) und (50) konstruiert. Der jeweilige Nachsatz ist ein Konditional; in (51) wird dessen Antezedens eingangs verneint, bzw. in (52) wird dessen Konsequens eingangs bejaht. Im Gegensatz zu (49) und (50) haben diese Paare aber überhaupt nichts Merkwürdiges an sich. Wir

[20] Das spielt auf Ockhams Rasiermesser in der Ontologie an: Entitäten sind nicht ohne Not zu vermehren. Das Grice'sche Rasiermesser wird gegen die Vermehrung semantischer Entitäten geführt.

können uns zwanglos Situationen vorstellen, in denen jeweils beide Sätze in (51) bzw. (52) behauptet werden. In solchen Situationen behauptet der Sprecher ein Konditional, obwohl er zuvor eine stärkere Behauptung macht. Damit verletzt der Sprecher die Quantitätsimplikatur des Konditionals – und wir würden das nicht beanstanden.[21]

Angenommen Peter ist überzeugt, daß die Eintracht gewinnt, daß der Torwart nicht ausfällt und der Einsatz von Meier, im Gegensatz zu dem des Torwarts, keinen Einfluß auf das Spielergebnis haben wird. Nach der Grice'schen Theorie sind beide Konditionale nicht behauptbar:

(53) Wenn Meier ausfällt, gewinnt die Eintracht.
(54) Wenn der Torwart ausfällt, gewinnt die Eintracht.

Aber während Peter sehr wohl und zurecht (53) behaupten könnte, würde er (54) sicher nicht behaupten wollen. Den Unterschied in der Behauptbarkeit der beiden Konditionale können wir nicht allein im Ruckgriff auf die Quantitäts-Maxime erklären.

Daß die Quantitätsmaxime allenfalls *cum grano salis* zu nehmen ist, zeigt sich selbst an ihrem Schaufensterstück, dem Gebrauch von Disjunktionen. Angenommen Peter ist sich sicher, daß Meier spielen und daß Müller aufgrund einer schweren Verletzung ausfallen wird. Nach der Maxime sollte Peter deshalb auf die Frage nach der Mannschaftsaufstellung, nicht mit der Disjunktion "Meier oder Müller spielt" antworten. Angenommen aber, Peter und Hans sind im Stadion, die Aufstellung wird kurz auf dem Bildschirm gezeigt, Hans ist abgelenkt, und Peter sieht nur den Anfangsbuchstaben "M". Hans fragt: "Wer spielt?" Die Antwort "Meier oder Müller" scheint völlig in Ordnung zu sein, obschon sich an der doxastischen Situation von Peter nichts geändert hat.[22] Peter könnte – müßte aber nicht – so fortsetzen: "... Aber Müller ist verletzt. Also spielt Meier." Ein solcher, völlig natürlicher Gesprächsbeitrag, würde durch die Quantitätsmaxime infrage gestellt. Wir brauchen daher eine alternative Theorie des angemessenen Gebrauchs solcher Sätze.

[21] Gegen (49) könnte eingewandt werden, daß das Konditional mehr als eine bloße Abschwächung von "Es wird nicht regnen" ausdrückt. Es scheint auch eine *Aufforderung* auszudrücken, welche die bloße Negation des Antezedens nicht zu verstehen gibt. In (50) scheint das Konditional nicht eine Abschwächung des Konsequens, sondern, im Gegenteil, eine Verstärkung auszudrücken: Wir gewinnen *in jedem Fall*. Es ist nicht zu bestreiten, daß die Grice'sche Theorie über beträchtliche Resourcen verfügt. Die Herausforderung besteht darin, diese Resourcen in einer Weise zu mobilisieren, die nicht *ad hoc* erscheinen muß und dem Grice'sche Rasiermesser Scharten zufügt. Wie groß – und vielleicht unüberwindlich – die Schwierigkeiten wirklich sind, zeigt [28].

[22] Beispiel adaptiert aus [30, p. 23]. Das Beispiel weist voraus auf den Begriff der Robustheit einer Information; siehe unten. Die schwächere Auskunft "Meier oder Müller" ist robust gegen die Möglichkeit, daß Meier nicht spielt, auch wenn Peter das für wenig wahrscheinlich hält. Manchmal kann in einem Gespäch Robustheit wichtiger sein als die riskantere Erfüllung der Quantitätsmaxime.

7. Konditionale und konditionale Wahrscheinlichkeit

Eine Beobachtung, die uns auf den richtigen Weg bringen könnte, ist, daß Peter (53) eine höhere *Wahrscheinlichkeit* zumißt als (54). Unter den gemachten Annahmen, ist Peters Wahrscheinlichkeit für das erste Konditional sehr hoch, während die für das zweite Konditional sehr niedrig ist. Peter sollte sicher nichts behaupten, was er für wenig wahrscheinlich hält. Und, soweit relevant und schicklich, sollte er Aussagen zum Gespräch beisteuern, von deren hoher Wahrscheinlichkeit er überzeugt ist. Es ist daher eine naheliegende Frage, ob und, wenn ja, wie die Behauptbarkeit eines Konditionals mit der Wahrscheinlichkeitseinschätzung des Sprechers einhergeht.

Exkurs über Wahrscheinlichkeit. Wahrscheinlichkeiten werden Ereignissen zugeordnet.[23] Wir wollen annehmen, daß Ereignisse durch die Sätze einer Sprache beschrieben werden. Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion über einer Menge von Ereignissen ist dann eine Abbildung P, die jedem Satz A, der ein Ereignis in der Menge beschreibt, einen Wert $\mathrm{P}(A)$ zwischen einem Minimum und einem Maximum zuordnet; konvenionellerweise legt man das Werteintervall $[0,1] = \{n \in \mathbb{R} : 0 \leq n \leq 1\}$ zugrunde. (Wenn die Anzahl der Atome der Sprache endlich ist, dann tut es das Interval $[0,1]$ in $\mathbb{Q}$ genauso gut.) Von einer *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $\mathrm{P} : \mathrm{FML} \longrightarrow [0,1]$ erwarten wir, daß sie eine Reihe von Bedingungen erfüllt. So soll es nicht darauf ankommen, wie wir Ereignisse beschreiben; logisch äquivalente Beschreibungen sollen gleiche Wahrscheinlichkeitswerte erhalten:

P0. $$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B), \text{ falls } A \equiv B.$$

Tautologien sind absolut sichere Ereignisse und erhalten deshalb den Maximalwert 1 (Bedingung der *Normalität*):

P1. $$\mathrm{P}(\top) = 1.$$

Wenn zwei Ereignisse einander ausschließen, d.h. die Wahrscheinlichkeit ihres gemeinsamen Auftretens gleich Null ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß das eine oder das andere stattfindet, gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten. Dies ist die Bedingung der *endlichen Summierbarkeit*:

P2. $$\mathrm{P}(A \vee B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B), \text{ falls } \mathrm{P}(A \wedge B) = 0.$$

Damit sind die wesentlichen Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsfunktionen $\mathrm{P} : \mathrm{FML} \longrightarrow [0,1]$ beschrieben.[24]

[23] Klassische Darstellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie die von Kolmogorow, beginnen mit einem Bereich Ω von Zufallsexperimenten und fassen diese (als Mengen) zu Ereignissen zusammen. Intuitiv sollen solche Ereignisse Experimente mit gleichem Ergebnis repräsentieren. In der elementaren Theorie (mit endlicher Menge Ω) wird angenommen, daß eine für diese Aufgabe geeignete Familie aus Ω gebildeter Teilmengen Ω selbst enthält und unter Komplementbildung und endlicher Vereinigung abgeschlossen ist. Die Elemente einer solchen Mengenfamilie, d.h. die Ereignisse dienen als Argumente für Wahrscheinlichkeitsfunktionen. Siehe auch die nächste Fußnote.

[24] Diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus einer Verteilung d von Werten aus [0,1] über die Elemente eines endlichen Bereichs Ω so, daß die verteilten Werte sich zum Wert 1 summieren. Gegeben eine solche Verteilung d über Ω, definieren wir für jede nichtleere Menge $A \subseteq \Omega$ die Funktion $\mathrm{P}_d(A) = \Sigma\{d(a) : a \in \Omega\}$; $\mathrm{P}_d(\emptyset)$ sei 0. Die genannten P-Eigenschaften lassen sich jetzt leicht verifizieren.

Da A und $\neg A$ einander ausschließen, dürfen wir nach P2 auf $\mathrm{p}(A \vee \neg A) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(\neg A)$ schließen. Da $A \vee \neg A$ eine Tautologie ist, so wissen wir nach P1 (und P0), daß $\mathrm{p}(A \vee \neg A) = 1$ und also $\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(\neg A) = 1$, woraus unmittelbar folgt, daß

P3. $$\mathrm{p}(\neg A) = 1 - \mathrm{p}(A).$$

Wenn wir in diese Gleichung $\top$ für A einsetzen, dann folgt $\mathrm{p}(\neg\top) = 0$, d.h. Widersprüche $\bot$ ($= \neg\top$) haben den minimalen Wahrscheinlichkeitswert 0.

Die Addition von Wahrscheinlichkeiten können wir auch auf "allgemeinere" Weise beschreiben, d.h. ohne die Bedingung, daß A und B einander ausschließen:

P2′. $$\mathrm{p}(A \vee B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \wedge B).$$

Tatsächlich sind P2 und P2′ äquivalent. Der Schluß von P2′ auf P2 ist trivial. Für die andere Richtung stellen wir zunächst fest, daß

$$\text{(a) } A \vee B \equiv A \vee (\neg A \wedge B) \quad \text{und} \quad \text{(b) } B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B).$$

Also gelten nach P0 die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsgleichungen. Da A und $\neg A \wedge B$ einander ausschließen, folgt nach P2 aus (a), daß

(a′) $$\mathrm{p}(A \vee B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(\neg A \wedge B).$$

Auch auf das einander ausschließende Paar $A \wedge B$ und $\neg A \wedge B$ können wir P2 anwenden und erhalten so aus (b),

(b′) $$\mathrm{p}(B) = \mathrm{p}(A \wedge B) + \mathrm{p}(\neg A \wedge B),$$

was wir zu

$$\mathrm{p}(\neg A \wedge B) = \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \wedge B)$$

umstellen können. Durch Einsetzen in (a′) folgt nun die gewünschte Gleichung P2′.

Man kann sich schnell davon überzeugen, daß Wahrheitsbewertungen $[\![\ ]\!]_I : \mathrm{FML} \longrightarrow \{0, 1\}$ Grenzfälle von Wahrscheinlichkeitsbewertungen sind.[25] Das ist schon intuitiv zu erwarten und wird durch die bisher betrachteten P-Bedingungen bestätigt. Man beachte aber auch, daß die Wahrscheinlichkeit einer wahrheitsfunktional zusammengesetzten Aussage im allgemeinen keine Funktion der Wahrscheinlichkeiten ihrer Teilaussagen ist. Wahrheitsfunktionen müssen keine Wahrscheinlichkeitsfunktionen sein. Die Negation ist, nach P3, wahrscheinlichkeitsfunktional. Die Disjunktion ist es jedoch nicht. Denn $\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(A')$ garantiert nicht, daß $\mathrm{p}(A \vee B) = \mathrm{p}(A' \vee B)$. Würfel haben eine Chance von 1/2 eine gerade (A) oder ungerade (A') Zahl zu

[25] Unter einer Wahrheitsbewertung $[\![\ ]\!]_I$ wollen wir, wie schon zuvor, die Erweiterung einer Interpretation I der Atome in $\{0, 1\}$ verstehen, die in Einklang mit den bekannten Wahrheitsbedingungen steht; d.h. $[\![\neg A]\!]_I = 1 - [\![A]\!]_I$, $[\![A \wedge B]\!]_I = 1$ gdw $[\![A]\!]_I = 1 = [\![B]\!]_I$ usw.

zeigen. Ferner ist die Chance, eine gerade Zahl oder eine Sechs zu zeigen ($A \vee B$) gleich der Wahrscheinlichkeit eine gerade Zahl zu zeigen – welche (um 1/6) geringer ist als die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Zahl oder eine Sechs zu zeigen ($A' \vee B$).

Es gilt ferner aufgrund der Bedingungen:

PL. $$\text{Wenn } A \models B, \text{ dann } \mathrm{p}(A) \leq \mathrm{p}(B).$$

Denn $\mathrm{p}(A \vee \neg B) \leq 1$, während $\mathrm{p}(A \vee \neg A) = 1$; also

(∗) $$\mathrm{p}(A \vee \neg B) \leq \mathrm{p}(A \vee \neg A).$$

Nun folgt aus $A \models B$, daß $\mathrm{p}(A \wedge \neg B) = 0$. Also dürfen wir P2 anwenden und erhalten aus (∗),

$$\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(\neg B) \leq \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(\neg A).$$

Aber dann haben wir $\mathrm{p}(\neg B) \leq \mathrm{p}(\neg A)$ und also nach P3, $\mathrm{p}(A) \leq \mathrm{p}(B)$.

Oft interessiert uns nicht die Wahrscheinlichkeit schlechthin eines Ereignisses, sondern die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses unter der Voraussetzung, daß andere Ereignisse eintreffen, d.h. unter einer Bedingung B. In diesem Fall fragen wir nicht mehr nach den Wahscheinlichkeiten von Ereignissen im ursprünglichen, "großen" Raum von Möglichkeiten, sondern nach Wahrscheinlichkeiten in einem kleineren, auf B eingeengten Raum. Anders gesagt: Wir gehen über von einer Wahrscheinlichkeitsfunktion zu einer anderen. Dieser Übergang ist natürlich nicht willkürlich, sondern wird bestimmt durch die bereits vergebenen Wahrscheinlichkeiten im ursprünglichen Ereignisraum. Das drücken wir durch eine definierende Gleichung aus:[26]

Def. $\mathrm{p_B}$ $$\mathrm{p}_B(A) = \frac{\mathrm{p}(A \wedge B)}{\mathrm{p}(B)}, \text{ wenn } \mathrm{p}(B) \neq 0.$$

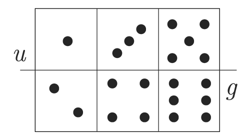
Die Funktion p_B mißt die durch B *bedingte Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses. Sie ist nur definiert für den Fall, daß B eine Möglichkeit beschreibt.[27]

Aus der Definition folgt unmittelbar eine Wahrscheinlichkeitsbedingung für Konjunktionen, nämlich

P4. $$\mathrm{p}(A \wedge B) = \mathrm{p}_B(A) \cdot \mathrm{p}(B), \text{ wenn } \mathrm{p}(B) \neq 0.$$

[26] Manche Autoren notieren die durch B bedingte Wahrscheinlichkeit von A als $\mathrm{p}(A|B)$. Das sieht so aus, als ob der Ausdruck $A|B$ Argument der Wahrscheinlichkeitsfunktion p ist – so wie es $A \wedge B$ oder $A \to B$ sein kann – und lädt die Suche nach einem Junktor $\circ$ ein, der bedingte Wahrscheinlichkeiten genau wiedergibt: $\mathrm{p}(A \circ B) = \mathrm{p}(A|B)$. Einen solchen Junktor kann es jedoch (normalerweise) gar nicht geben, wie wir gleich sehen werden; vgl. das Trivialitätsresultat von[36] auf pp. 225f.

[27] Weil Division durch 0 keinen Wert hat, ist die bedingte Wahrscheinlichkeit undefiniert im Fall $\mathrm{p}(B) = 0$. Man könnte hier durch eine Festsetzung nachhelfen – etwa so: wenn die Bedingung B unerfüllbar ist, dann sei $\mathrm{p}_B(A) = 1$. Aber das würde die merkwürdige Folge haben, daß bedingte Wahrscheinlichkeiten keine Wahrscheinlichkeiten sind. Denn wenn $\mathrm{p}(B) = 0$, dann $\mathrm{p}_B(A) = 1 = \mathrm{p}_B(\neg A)$, was im Widerspruch zu P3 stünde. Besser ist es, bedingte Wahrscheinlichkeit nur partiell, d.h. unter der Einschränkung zu definieren, daß die Bedingung erfüllbar sein muß.



Um uns davon zu überzeugen, daß (p_B) eine gute Definition bedingter Wahrscheinlichkeit ist, wollen wir die Definition anhand eines Würfels veranschaulichen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Sechs gewürfelt wir? Wenn alles mit rechten Dingen zugeht, 1/6. Das ist 1/6 der Gesamtfläche im Bild rechts. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Sechs gewürfelt wird (s), gegeben, daß eine gerade Zahl gewürfelt wird (g)? Um diese Frage zu beantworten betrachten wir nur die Felder unterhalb der Geraden und fragen, welchen Anteil daran die Fläche hat, auf die beide Eigenschaft s und g zutreffen. D.h. wir fragen nach dem Verhältnis von $s \wedge g$ und g. Die Wahrscheinlichkeit von $s \wedge g$ ist 1/6 (die gleiche wie die von s) und $\mathrm{p}(g) = 1/2$. Also ist das Verhältnis von $\mathrm{p}(s \wedge g)$ zu $\mathrm{p}(g)$ gleich $1/6 : 1/2 = 1/3$. Das beantwortet unsere Frage nach der Wahrscheinlichkeit von s gegeben die Bedingung g, d.h. nach dem Wert von $\mathrm{p}_g(s)$.

Die Definition von $\mathrm{p}_B(A)$ hat also genau den gewünschten Effekt. Sie schränkt die ursprüngliche Funktion p auf den Bereich ein, in dem B gilt und gibt die neue Wahrscheinlichkeit von A als "Anteil" von $A \wedge B$ an B an. Die Einschränkung auf die Bedingung B ist ferner minimal in dem Sinne, daß unter p und p_B alle Wahrscheinlichkeitsverhältnisse übereinstimmen soweit sie nicht durch die Bedingung B (und dem, was daraus folgt) berührt sind. Denn

- für beliebige Formeln A und A' mit $A \models B$ und $A' \models B$ gilt:
$$\frac{\mathrm{p}_B(A)}{\mathrm{p}_B(A')} = \frac{\mathrm{p}(A)}{\mathrm{p}(A')}.$$

Schließlich können wir noch beobachten, daß die neue Funktion selbst wieder eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist:

- Wenn $\mathrm{p}(B) \neq 0$, dann ist p_B selbst eine Wahrscheinlichkeitsfunktion im Sinne von P0-2.

Es gilt deshalb insbesonere, daß die Funktion p_B die Gleichung P3 erfüllt, d.h.

P5. $$\mathrm{p}_B(\neg A) = 1 - \mathrm{p}_B(A).$$

Denn, nach (p_B) ist $\mathrm{p}_B(\neg A) = \mathrm{p}(\neg A \wedge B) : \mathrm{p}(B)$ und also ...

$$\begin{aligned}
&= (\mathrm{p}(\neg A \wedge B) + \mathrm{p}(A \wedge B) - \mathrm{p}(A \wedge B)) : \mathrm{p}(B) && \text{Arithmetik}\\
&= (\mathrm{p}(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B)) - \mathrm{p}(A \wedge B)) : \mathrm{p}(B) && \text{P2}\\
&= (\mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \wedge B)) : \mathrm{p}(B) && \text{Logik, P0}\\
&= 1 - (\mathrm{p}(A \wedge B) : \mathrm{p}(B)) && \text{Arithmetik}\\
&= 1 - \mathrm{p}_A(B) && \text{Def. } \mathrm{p}_A.
\end{aligned}$$

Die Beobachtungen, die wir hier über Wahrscheinlichkeiten gemacht haben, gelten (beinahe) für beliebige Begriffe von Wahrscheinlichkeit, d.h. gleich ob wir Wahrscheinlichkeit im Sinne von Häufigkeit mit der sich ähnliche Ereignisse in der Welt wiederholen oder im Sinne der Festigkeit von

Überzeugungen interpretieren. Für die Zwecke dieses Kapitels ist letztere Interpretation naheliegender, wie wir gleich sehen werden. Denn wir wollen eine Beziehung herstellen zwischen dem Grad, in dem ein Sprecher eine Aussage behaupten darf und dem Grad seiner Überzeugung, daß die betreffende Aussage wahr sei. Natürlich wird der Begriff der Behauptbarkeit nur dann die beabsichtigte normative Dimension aufweisen, wenn die Überzeugungsgrade von Sprechern selbst richtigen normativen Vorgaben genügen. Diese Vorgaben sind in den P-Bedingungen formuliert. Wahrscheinlichkeiten, die diese Bedingungen verletzen, sind unvernünftig – so wollen wir hier annehmen – und daher für die Frage, was vernünftig behauptbar ist, ohne Belang.

Vier Hypothesen über indikativische Konditionale (MAT, BP, AT, SH). Man sollte nur das behaupten, wovon man genügend überzeugt ist; und wovon man genügend überzeugt ist, das kann man auch behaupten, wenn die Gelegenheit sich bietet. Das ist jedenfalls eine plausible Hypothese über den Zusammenhang von Behauptung und Überzeugung. Wenn wir den Grad der Überzeugung als Wahrscheinlichkeit wiedergeben, dann bedeutet das, daß die Behauptbarkeit b einer Aussage direkt mit ihrer Wahrscheinlichkeit variiert:[28]

BP. $$\mathrm{b}(A) = \mathrm{p}(A)$$

Nun haben wir zuvor festgestellt, daß in normalen Gesprächskontexten die Äußerung beliebiger Wahrheiten unangebracht ist. In diesem Sinne ist nicht jede Wahrheit jederzeit behauptbar ist. Was für Wahrheit gilt, gilt sicher auch für hohe Wahrscheinlichkeit. Nicht alles, was dem Sprecher genügend wahrscheinlich ist, kann er in beliebigen Situation angemessenerweise behaupten. Dagegegen stehen Erwägungen der Relevanz, der Schicklichkeit, des angemessenen Ausdrucks, der Ordnung der Rede etc. Aber wenn wir von solchen Erwägungen einmal absehen, dann bleibt eine Klasse von Aussagen, die der Sprecher (im weiteren Sinne) behaupten kann, wenn – wie wir oben schon formuliert haben – eine passende Gelegenheit sich bietet.[29] Die Quantitätsmaxime als Kriterium für Behauptbarkeit in diesem Sinne ist zu streng, wie wir gesehen haben. Gibt BP ein erfolgreicheres Kriterium ab? Kann ein Specher genau das richtig behaupten (im weiteren Sinne), was er für hochwahrscheinlich hält?

Indikativische Konditionale wollen wir ab jetzt mit $A \succ B$ notieren. Für solche Konditionale bedeutet BP, daß

$$\mathrm{b}(A \succ B) = \mathrm{p}(A \succ B).$$

Wenn wir unter der Hypothese arbeiten, daß indikativische und materiale Konditionale die gleichen Wahrheitsbedingen haben, kurz

MAT. $$A \succ B \equiv A \to B,$$

[28] Die Behauptbarkeitsfunktion b möge die gleiche Metrik wie p haben, d.h. $\mathrm{b} : \mathrm{FML} \longrightarrow [0, 1]$.
[29] In der englischsprachigen Literatur wird in diesem Zusammenhang manchmal zwischen *assertibility* (mit *i*) und *assertability* (mit *a*) unterschieden. Letzteres ist ein Kunstwort, das den beschriebenen weiteren Sinn von Behauptbarkeit treffen soll.

dann folgt aus BP sogeich (per P0), daß

BPM. $$\mathrm{b}(A \succ B) = \mathrm{p}(A \rightarrow B).$$

Das ist aber keine gute Option. Denn nach (P2) wäre dann $\mathrm{b}(A \succ B) = \mathrm{p}(\neg A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(\neg A \wedge B)$. Das erlaubt nun Instantiierungen nach diesem Muster: Man wähle A und B so, daß $\mathrm{p}(\neg A \wedge B)$ sehr klein obgleich $\mathrm{p}(\neg A)$ sehr groß ist. Dann wird $\mathrm{b}(A \succ B)$ ebenfalls groß sein.

> *Beispiel.* Es sei hochwahrscheinlich, daß Oma morgen zu Besuch kommt (A), und es sei sehr unwahrscheinliche, daß morgen ein Meteor die Erdkugel trifft und alles Leben auf diesem Planeten beendet (B). Dann stellt $\mathrm{p}(A \wedge B)$ nur einen sehr kleinen Wert (nahezu Null) dem hohen Wert von $\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B)$ [$\approx \mathrm{p}(A)$] gegenüber. Aber dann ist $\neg A \succ B$, d.h. "Wenn Oma morgen nicht zu Besuch kommt, dann hat ein Meteor die Erde getroffen" im hohen Grade behauptbar.

Im Grunde wiederholt sich hier nur in einem probabilistischen Rahmen das Problem, auf das die Grice'sche Theorie antworten wollte. Die Unwahrscheinlichkeit des Antezedens eines Konditionals kann dieses unter bestimmten Umständen hochwahrscheinlich machen. Daraus sollten wir nicht auf eine hohe Behauptbarkeit des Konditionals schließen. BPM fordert aber genau dies und bringt uns daher um keinen Schritt weiter.

Wenn wir BPM ablehnen, dann müssen wir entweder BP oder MAT aufgeben. Wir wollen hier zunächst weiter unter der Hypothese arbeiten, daß MAT die Wahrheitsbedingungen indikativischer Konditionale richtig erfaßt. Also müssen wir uns nun nach einem Ersatz für BP umsehen. Der Ersatz darf sich nicht zu weit vom Original entfernen, denn es kann ja nicht völlig falsch sein, daß Behauptbarkeit und Überzeugungsgrad in einem engen Verhältnis zueinander stehen.

Ein solcher Ersatz bietet sich schnell an. Schon recht deutlich formuliert, findet er sich in einer oft zitierten Fußnote zu einem Aufsatz von F.P. Ramsey (1929, [42, p. 247]):

> Wenn zwei Leute sich fragen ob "Wenn A, dann B" der Fall ist und beide nicht wissen, ob A, dann fügen sie hypothetisch A ihrem Wissen hinzu und fragen auf dieser Basis, ob B. Gewissermaßen sind so "Wenn A, dann B" und "Wenn A, dann $\neg B$" kontradiktorisch. Wir können sagen, daß sie die Grade ihrer Überzeugungen, daß B, gegeben A, festlegen.

Diese Idee, den Status von $A \succ B$ in einem Überzeugungssystem zu prüfen, indem man den Status von B in einem leicht veränderten Überzeugungssystem prüft, nennt man den *Ramsey Test*. In verschiedenen theoretischen Rahmen, nimmt der Test verschiedene Formen an. In der Theorie, in der wir uns jetzt bewegen, wollen wir ihn den *Adams Test* (oder Adams' These) nennen. Danach variiert die Behauptbarkeit eines Konditionals direkt mit der Stärke, mit welcher der Sprecher vom Konsequens überzeugt ist, wenn er die Wahrheit des Antezedens einmal hypothetisch voraussetzt:[30]

AT. $$\mathrm{b}(A \succ B) = \mathrm{p}_A(B),$$

[30] Vgl. Adams [1, 3].

Die Bedingung der Wahrscheinlichkeit auf das Antezedens des zu prüfenden Konditionals übernimmt die Rolle der hypothetischen Annahme, von der Ramsey spricht. Das Resultat paßt auch gut zu Ramseys Beobachtung, daß die Behauptung von $A \succ B$ im Widerspruch zur Behauptung von $A \succ \neg B$ steht. Denn, wenn es sich so verhält, wie Adams es vorschlägt, dann ist $\mathrm{b}(A \succ \neg B) = 1 - \mathrm{p}_A(B)$ (nach P5) und also verhalten sich $\mathrm{b}(A \succ B)$ und $\mathrm{b}(A \succ \neg B)$ komplementär, d.h. $\mathrm{b}(A \succ B) = 1$ genau dann, wenn $\mathrm{b}(A \succ \neg B) = 0$.

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß AT eine echte Alternative zu BPM ist. Denn $\mathrm{p}(A \to B)$ und $\mathrm{p}_A(B)$ können durchaus (sehr) verschiedene Werte annehmen. Zwar gilt (für $\mathrm{p}(A) \neq 0$)

$$\mathrm{p}_A(B) \leq \mathrm{p}(A \to B),$$

jedoch nicht die Umkehrung.

Beispiel. Das Spiel bestehe aus 32 Karten. $\spadesuit 1$: Die erste Karte ist ein Pik; $\spadesuit 2$: die zweite Karte ist ein Pik. Dann ist $\mathrm{p}(\spadesuit 1) = 8/32 = 1/4$ und $\mathrm{p}_{\spadesuit 1}(\spadesuit 2) = 7/31$. Wir rechnen nun so:

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}(\spadesuit 1 \to \spadesuit 2) &= \mathrm{p}(\neg(\spadesuit 1 \wedge \neg\spadesuit 2)) && \text{P0}\\
&= 1 - (\mathrm{p}(\spadesuit 1) \cdot \mathrm{p}_{\spadesuit 1}(\neg\spadesuit 2)) && \text{P1, P4}\\
&= 1 - (\mathrm{p}(\spadesuit 1) \cdot (1 - \mathrm{p}_{\spadesuit 1}(\spadesuit 2))) && \text{P5}\\
&= 1 - (1/4 \cdot (1 - 7/31))\\
&= 1 - 24/124\\
&= 25/31
\end{aligned}$$

$\mathrm{p}(\spadesuit 1 \to \spadesuit 2)$ ist also (bedeutend) größer als $\mathrm{p}_{\spadesuit 1}(\spadesuit 2)$.

Auch bei weiterer Betrachtung sieht AT gut aus. Die These bewährt sich in allen Fällen, in denen wir die einfache These MAT sichern wollen, indem wir Wahrheit und Behauptbarkeit auseinandertreten lassen. Das sind insbesondere solche Fälle, in denen $A \to B$ wahr ist, weil A falsch oder B wahr ist. Hier gilt es zu zeigen, daß die hohe Behauptbarkeit von $\neg A$ oder von B nicht die hohe Behauptbarkeit von $A \succ B$ garantiert. Wir benötigen also Beispiele mit $\mathrm{p}(\neg A) > \mathrm{p}_A(B)$ und $\mathrm{p}(B) > \mathrm{p}_A(B)$.

Beispiel. Sei $\spadesuit \succ as$ das Konditional "Wenn die erste Karte ein Pik ist, dann ist sie ein As". Dann ist $\mathrm{p}_{\spadesuit}(as) = 1/8$, obwohl die Wahrscheinlichkeit, daß das Antezedens $\spadesuit$ falsch ist, recht hoch ist, nämlich $\mathrm{p}(\neg\spadesuit) = 24/32 = 3/4$. Darüberhinaus ist mit $\mathrm{p}(as) = 1/4$ auch das Konsequens wahrscheinlicher als das Konditional.

Wie wenig wahrscheinlich ein Antezedens A auch sein mag, solange A einen positiven Wert hat, kann $\mathrm{p}_A(B)$ noch unwahrscheinlicher sein. (Ist $\mathrm{p}(A) = 0$, dann ist $\mathrm{p}_A(B)$ nicht definiert.) Ähnlich für ein hochwahrscheinliches Konsequens B: Solange $\mathrm{p}(B) < 1$, gibt es immer einen Wert ($\neq 0$) für A so, daß $\mathrm{p}_A(B) < \mathrm{p}(B)$. Damit ist AT in der Lage, die Fälle zu klären, die auch die Quantitätsmaxime zugunsten von MAT klären kann.

Die Quantitätsmaxime besagt auch: Wer A für falsch oder B für wahr hält, der kann das schwächere Konditional "Wenn A, dann B" nicht richtig behaupten! Das ist jedoch nicht immer so; vgl. p. 215. AT läßt die richtigen Ausnahmen von der Maxime zu: Wir können Wahrscheinlichkeiten vernünftig so verteilen, daß A niedrig oder B hoch ist (so, daß $\neg A$ bzw. B behauptbar sind) während $\mathrm{p}_A(B)$ hoch und also das Konditional $A \succ B$ behauptbar ist.

Beispiel. Peter glaubt fest an einen Sieg der Eintracht (B). Auf Meier kommt es diesmal nicht an. Ob dieser überhaupt spielen wird (A), steht auf Messers Schneide. Peter behauptet daher zurecht beides: Wenn Meier spielt, dann gewinnt die Eintracht, und: Wenn Meier nicht spielt, dann gewinnt die Eintracht. Es sei $\mathrm{p}(B) = 0,9$ und $\mathrm{p}(A) = 0,5$; dann ist $\mathrm{p}(A \wedge B) = 0,5 - \epsilon$, für einen kleinen Wert ϵ. Also hat $\mathrm{p}_A(B) = (0,5 - \epsilon) : 0,5$ ebenso wie $\mathrm{p}_{\neg A}(B)$ einen hohen Wert: etwa so hoch wie $\mathrm{p}(B)$.

Das Beispiel läßt sich leicht so verändern, daß auch mit einem sehr unwahrscheinlichen Antezedens A die Wahrscheinlichkeit von $\mathrm{p}_A(B)$ hoch genug ausfallen kann. (Man setze $\mathrm{p}(A) = 0,1$, d.h. Peter glaubt nicht, daß Meier spielen wird. Aber auf Meier kommt es diesmal ja nicht an ...)

Wenn wir AT folgen und die Behauptbarkeit eines Konditionals mit dessen Wahrscheinlichkeit messen, dann ist diese nicht einfach eine Funktion der Behauptbarkeiten des Antezedens und des Konsequens. Schon auf p. 219 haben wir gesehen, daß Junktoren keine Wahrscheinlichkeitsfunktionen sein müssen. Das gilt auch für Konditionale. Die Wahrscheinlichkeiten von A und A' mögen gleich sein und dennoch können die Konditionale $A \succ B$ und $A' \succ B$ unterschiedlich behauptbar sein.

Beispiel. Es sei $\spadesuit$: die erste Karte ist ein Pik, $\clubsuit$: die erste Karte ist ein Kreuz, und $\spadesuit as$: die erste Karte ist das Pik-As. Dann ist $\mathrm{p}(\spadesuit) = \mathrm{p}(\clubsuit) = 1/4$ während $\mathrm{p}_\spadesuit(\spadesuit as) = 1/8$ und $\mathrm{p}_\clubsuit(\spadesuit as) = 0$. Also ist $\mathrm{b}(\spadesuit \succ \spadesuit as) \neq \mathrm{b}(\clubsuit \succ \spadesuit as)$.

Das erlaubt uns, wie gewünscht, zwischen Paaren von Konditionalen wie (53) und (54) zu differenzieren:

(53) Wenn Meier ausfällt (A), gewinnt die Eintracht (B).
(54) Wenn der Torwart ausfällt (A'), gewinnt die Eintracht (B).

Beispiel. Peter ist vom Sieg der Eintracht überzeugt und hält den Ausfall des Torwarts für genauso unwahrscheinlich wie den von Meier. Gleichzeitig hält er die Mitwirkung des Torwarts für spielentscheidend so, daß er $\mathrm{p}_{A'}(B)$, im Gegensatz zu $\mathrm{p}_A(B)$, sehr niedrig ansetzt. Das erklärt, warum er (53), nicht aber (54) behauptet – obwohl doch nach der Quantitätsmaxime beide Konditionale gleich unbehauptbar wären, weil $\mathrm{p}(B)$ hoch und im Falle von (53) darüberhinaus noch $\mathrm{p}(A)$ niedrig ist.

Adams' These ist also nicht nur vorab sehr plausibel, sondern besteht auch erfolgreich einige Schlüsselproben. Aber wie kommt es zu dieser erfolgreichen Ausnahme von BP? Wie können wir erklären, warum AT die richtige

Beziehung zwischen Behauptbarkeit und Wahrscheinlichkeit im Falle von Konditionalen herstellt?

Eine einfache Erklärung würde *Stalnakers Hypothese* liefern:

$$\text{SH.} \qquad \mathrm{p}(A \succ B) = \mathrm{p}_A(B).$$

Danach ist die Wahrscheinlichkeit eines indikativischen Konditionals nichts anderes als die entsprechende konditionale Wahrscheinlichkeit. Diese These hat den Vorzug der Einfachheit und erlaubt, AT direkt aus BP herzuleiten: keine Ausnahme für Konditionale also.

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{b}(A \succ B) = \mathrm{p}(A \succ B)}\,\text{BP} \qquad \dfrac{}{\mathrm{p}(A \succ B) = \mathrm{p}_A(B)}\,\text{SH}}{\mathrm{b}(A \succ B) = \mathrm{p}_A B}$$

SH ist eine These mit Biss. Denn falls sie richtig sein sollte, dann ist die einfache These MAT über die Wahrheitsbedingungen von indikativischen Konditionalen falsch. Aus SH und MAT könnten wir aufgrund von P0 die falsche Gleichung $\mathrm{p}(A \to B) = \mathrm{p}_A(B)$ ableiten. Wir müssen uns also zwischen SH und MAT entscheiden. Im nächsten Abschnitt erklären wir, warum SH für MAT keine Gefahr darstellen kann.

Das Trivialitätsresultat von Lewis. Wir wissen bereits, daß die materiale Implikation $\to$ kein Junktor von der Art ist, daß für beliebige Sätze A und B und beliebige Wahrscheinlichkeitsfunktion p, die Wahrscheinlichkeit von $A \to B$ durch die entsprechende konditionale Wahrscheinlichkeit wiedergegeben werden kann. Im allgemeinen gilt eben nicht, daß $\mathrm{p}(A \to B) = \mathrm{p}_A(B)$. Woher wissen wir eigentlich, daß es überhaupt Junktoren mit dieser Eigenschaft gibt? Stalnakers Hypthese SH setzt genau das offensichtlich voraus: daß es nämlich einen zweistelligen Junktor $\circ$ gibt so, daß für beliebige Sätze A und B und beliebige Wahrscheinlichkeitsfunktion p, die Wahrscheinlichkeit von $A \circ B$ mit der entsprechenden konditionalen Wahrscheinlichkeit zusammenfällt, d.h.

$$(\circ) \qquad \mathrm{p}(A \circ B) = \mathrm{p}_A(B).$$

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß diese Voraussetzung normalerweise falsch ist. Das ist das sogenannte Trivialitätsresultat von Lewis [36]. Die Einschränkung “normalerweise” soll triviale Wahrscheinlichkeitsfunktionen ausschließen, die zwei Sätzen A und (kontingentem) B keine Werte zuordnen können, ohne daß die Wahrscheinlichkeit von B mit der von $A \circ B$ zusammenfällt.[31]

Satz 7. (Trivialitätsresultat von Lewis) *Wenn* $\mathrm{p}(A \circ B) = \mathrm{p}_A(B)$ *(für* $\mathrm{p}(A) > 0$*) und* $0 < \mathrm{p}(B) < 1$*, dann* $\mathrm{p}(A \circ B) = \mathrm{p}(B)$.

Zunächst beweisen wir ein Lemma.

[31] Das Trivialitätsresultat von Lewis gibt es in verschieden starken Varianten. Drei Varianten finden sich in [36], [38] und [39]; weitere in [24] und [25].

Lemma 8. *Jeder Junktor* $\circ$*, der die Gleichung* ($\circ$) *erfüllt, hat auch die Eigenschaft* $\mathrm{p}_A(B \circ C) = \mathrm{p}_{A \wedge B}(C)$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_A(B \circ C) &= (\mathrm{p}_A)_B(C) && (\circ)\\
&= \frac{\mathrm{p}_A(B \wedge C)}{\mathrm{p}_A(B)} && \text{Def. } (\mathrm{p}_A)_B\\
&= \frac{\mathrm{p}(A \wedge B \wedge C) : \mathrm{p}(A)}{\mathrm{p}(A \wedge B) : \mathrm{p}(A)} && \text{Def. } \mathrm{p}_A\\
&= \frac{\mathrm{p}(A \wedge B \wedge C)}{\mathrm{p}(A \wedge B)} && : \mathrm{p}(A)\\
&= \mathrm{p}_{A \wedge B}(C) && \text{Def. } \mathrm{p}_{A \wedge B}
\end{aligned}$$

∎

Den Trivialitätssatz beweisen wir nun, indem wir von der folgenden Eigenschaft einer Wahrscheinlichkeitsfunktion p ausgehen. Für kontingentes B (d.h. $0 < \mathrm{p}(B) < 1$) gilt:

(1) $$\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}_B(A) \cdot \mathrm{p}(B) + \mathrm{p}_{\neg B}(A) \cdot \mathrm{p}(\neg B).$$

Denn $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ und also $\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B))$ (nach P0). Da $A \wedge B$ und $A \wedge \neg B$ einander ausschließen, ist (nach P2)

$$\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(A \wedge B) + \mathrm{p}(A \wedge \neg B).$$

Daraus folgt (1) nach P4 und der Annahme $0 < \mathrm{p}(B) < 1$.

Eine Instanz von (1) ist

(2) $$\mathrm{p}(A \circ B) = \mathrm{p}_B(A \circ B) \cdot \mathrm{p}(B) + \mathrm{p}_{\neg B}(A \circ B) \cdot \mathrm{p}(\neg B).$$

Jetzt wenden wir das Lemma auf (2) an und erhalten

(3) $$\mathrm{p}(A \circ B) = \mathrm{p}_{A \wedge B}(B) \cdot \mathrm{p}(B) + \mathrm{p}_{A \wedge \neg B}(B) \cdot \mathrm{p}(\neg B).$$

Nun ist aber

(4) $$\mathrm{p}_{A \wedge B}(B) = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{p}_{A \wedge \neg B}(B) = 0.$$

Setzen wir diese Werte in (3) ein, so erhalten wir

$$\mathrm{p}(A \circ B) = \mathrm{p}(B).$$

∎

Nun wissen wir, daß Stalnakers Hypothese SH über indikativische Konditionale $A \succ B$ nur in trivialen Fällen zutreffen kann. Damit ist die einfachste Erklärung von Adams' These $\mathrm{b}(A \succ B) = \mathrm{p}_A(B)$ vom Tisch: Die These AT ist nicht einfach nur ein Fall des allgemein plausiblen Prinzips BP, wonach Behauptbarkeit durch Wahrscheinlichkeit gemessen wird. Die These ist dem allgemeinen Prinzip zwar nahe genug, um von dessen Plausibilität zu profitieren – aber sie stellt doch eine Ausnahme von dem Prinzip dar. Es wäre gut, wenn wir dafür eine Erklärung hätten.

8. Konditionale und Robustheit

Wir wissen, daß $\mathrm{p}_A(B) \leq \mathrm{p}(A \to B)$ (wenn $\mathrm{p}(A) \neq 0$) und also, daß es für alle A und B einen Wert $0 \leq x \leq 1$ gibt, so daß

$$(*) \qquad \mathrm{p}_A(B) = \mathrm{p}(A \to B) - x.$$

Wenn nun, nach AT, $\mathrm{p}_A(B)$ die Behauptbarkeit eines Konditionals $A \succ B$ mißt, dann folgt aus $(*)$, daß diese durch die Wahrscheinlichkeit des materialen Konditionals $A \to B$ mit einem gewissen Abzug gegeben ist; d.h. AT behauptet dies:

$$\text{AT.} \qquad \exists x \ \mathrm{b}(A \succ B) = \mathrm{p}(A \to B) - x.$$

In jeder Theorie also, die x (abhängig von A und B) so bestimmt, daß die Gleichung $(*)$ erfüllt ist, wäre AT ableitbar. Und wenn x so bestimmt wird, daß deutlich ist, warum der Wert von x die Behauptbarkeit des Konditionals steuert, dann liegt eine Ableitung von AT mit erklärender Kraft vor: eine Ableitung, die erklärt, warum $\mathrm{p}_A(B)$ die Behauptbarkeit des entsprechenden Konditionals wiedergibt.

Eine erste solche Theorie hat Lewis [36] vorgelegt, sie aber schon bald verworfen, um sich der Theorie von Jackson anzuschließen. Der Grundgedanke von Jacksons [28, 30, 31] Theorie beruht auf der Beobachtung, daß die Äußerung von Konditionalen die Funktion hat, zu einem Modus Ponens-Schritt einzuladen. Ein Konditional $A \succ B$ ist gewissermaße ein Fahrschein zum Schließen: Wenn A eintrifft, dann berechtigt der Fahrschein – das Konditional –, zu B überzugehen.[32] So verstehen Hörer jedenfalls einen Sprecher, der ein Konditional äußert. Deshalb ist es grob irreführend, ein Konditional zu äußern, bloß weil man das Antezedens für sehr unwahrscheinlich hält. In diesem Fall würde der Sprecher ja nicht, wie scheinbar angekündigt, schließen, sondern das Konditional zurückziehen, sobald er erfährt, daß das Antezedens der Fall ist. Im Bild: Statt zum Übergang von A nach B zu berechtigen, würde der Fahrschein $A \succ B$ in dem Moment seine Gültigkeit verlieren, in dem A eintrifft. Oder, wie Jackson sagt: Das Konditional wäre hinsichtlich seines Antezedens nicht *robust*.

> *Beispiel.* Peter glaubt (mit hoher Wahrscheinlichkeit), daß Aigner das Tor geschossen hat. Daraufhin behauptet er: "Wenn Aigner das Tor nicht geschossen hat, dann war es Meier". Paul überzeugt nun Peter, daß Aigner nicht geschossen hat und sagt weiter: "Nach dem, was Du gesagt hast, Peter, glaubst Du also, daß es Meier war." – "Nein, das glaube ich nicht", antwortet Peter. — ??

Eine Aussage A ist robust gegenüber einer Aussage B (hinsichtlich einer Wahrscheinlichkeitsfunktion p), wenn die Wahrscheinlichkeit von A unter der Annahme B nicht leidet (kurz: $\mathrm{p}(A) \approx \mathrm{p}_B(A)$).[33] Konditionale

[32] Diese Metapher geht auf Gilbert Ryle zurück, der Konditionale als "inference tickets" bezeichnet hat.

[33] Das ist ein etwas stärkerer Begriff von Robustheit als er für Jacksons These (s.u.) benötigt wird. Für diese These würde es genügen zu sagen, daß A gegenüber B robust ist, falls die *hohe* Wahrscheinlichkeit von B unter der Annahme A nicht zurückgeht. Für die Herleitung von AT in voller Allgemeinheit, werden wir jedoch auf die stärkere Definition zurückgreifen müssen.

sind dann und nur dann behauptbar, wenn sie genügend hoch wahrscheinlich und robust gegenüber ihrem Antezedens sind, d.h. wenn sie nicht an Wahrscheinlichkeit verlieren, sobald das Antezedens an Wahrscheinlichkeit gewinnt. Nur so kann ein Konditional seine Funktion als Folgerungsfahrschein erfüllen. Ein Konditional ist also in dem Grade behauptbar, in dem wir es inbesondere auch dann akzeptieren, wenn sein Antezedens sich als wahr erweist. Diese Grundidee können wir so zusammenfassen:

(†) $A \succ B$ ist genau dann behauptbar, wenn $\mathrm{p}(A \succ B)$ und $\mathrm{p}_A(A \succ B)$ hoch sind.

Wenn wir nun die Äquivalenzthese MAT annehmen, dann können wir $\rightarrow$ für $\succ$ einsetzen und erhalten (h für "hoch"):

(‡) $\mathrm{b}(A \succ B) \approx h$ gdw $\mathrm{p}(A \rightarrow B) \approx h$ und $\mathrm{p}_A(A \rightarrow B) \approx h$.

Da $\mathrm{p}_A(A \rightarrow B) \leq \mathrm{p}(A \rightarrow B)$, so impliziert ein hoher Wert des linken Ausdrucks einen mindestens so hohen Wert des rechten Ausdrucks. Aus (‡) folgt daher

JT. $$\mathrm{b}(A \succ B) \approx h \;\text{ gdw }\; \mathrm{p}_A(A \rightarrow B) \approx h.$$

Das ist *Jacksons These*. Sie beruht auf der These MAT und der Berücksichtigung der Robustheitsforderung für behauptbare Konditionale. Jackson nennt sie daher das Kernstück einer "ergänzten Äquivalenztheorie". Aus JT läßt sich schnell AT für Konditionale mit hoher Behauptbarkeit herleiten. Denn

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_A(A \rightarrow B) &= \mathrm{p}_A(\neg A \vee B) && \text{P0}\\
&= \frac{\mathrm{p}((\neg A \vee B) \wedge A)}{\mathrm{p}(A)} && \text{Def. } \mathrm{p}_A\\
&= \frac{\mathrm{p}(A \wedge B)}{\mathrm{p}(A)} && \text{P0}\\
&= \mathrm{p}_A(B) && \text{Def. } \mathrm{p}_A
\end{aligned}$$

Also besagt JT, daß $A \succ B$ genau dann eine hohe Behauptbarkeit hat, wenn $\mathrm{p}_A(B)$ hoch ist. So kann JT erklären, warum AT erfolgreich Voraussagen über die Behauptbarkeit von Konditionalen macht. (Da diese Erklärung von MAT Gebrauch macht, möchte Jackson [33, p. 51] sie als indirekten Beleg für die Richtigkeit der Äquivalenzthese verstehen. Aber genau besehen, genügt es für die Herleitung beim Übergang von (†) zu (‡) irgendeinen Junktor $\circ$ für $\succ$ mit der Eigenschaft $A \wedge B \equiv (A \circ B) \wedge A$ (Zeile 3 der Ableitung) einzusetzen; vgl. dazu Ellis [17].)

Soweit haben wir nur hohe Wahrscheinlichkeiten betrachtet. Aber Adams' These AT stellt auch für kleine Behauptbarkeits- und Wahrscheinlichkeitswerte eine Korrelation her. Um Adams' These ganz allgemein herzuleiten, erinnern wir an die Definition von Robustheit:

B ist genau dann robust gegenüber A, wenn $\mathrm{p}(B) \approx \mathrm{p}_A(B)$.

Die Differenz $\mathrm{p}(B) - \mathrm{p}_A(B)$ gibt den Grad der Verletzlichkeit ("Irrobustheit") von B gegenüber der Annahme A an. Es stellt sich heraus, daß genau dieser Verletzlichkeitsgrad die Rolle des Subtrahenden in der Gleichung ($*$) übernehmen kann. Im Falle eines Konditionals $A \to B$ ist die Verletzlichkeit des Konditionals gegenüber der Annahme des Antezedens gegeben durch

$$x \qquad \mathrm{p}(A \to B) - \mathrm{p}_A(A \to B).$$

Setzen wir diesen Ausdruck für x ein in

$$\mathrm{b}(A \succ B) = \mathrm{p}(A \to B) - x$$

(siehe (*) oben), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{b}(A \succ B) &= \mathrm{p}((A \to B) - [\,\mathrm{p}(A \to B) - \mathrm{p}_A(A \to B)\,] \\ &= \mathrm{p}((A \to B) - [\,\mathrm{p}(A \to B) - \mathrm{p}_A(B)\,] && \text{s.o.} \\ &= \mathrm{p}_A(B) && \text{Arithmetik} \end{aligned}$$

Die Behauptbarkeit des indikativischen Konditionals nähert sich also in dem Maße der Wahrscheinlichkeit des entsprechenden materialen Konditionals, in dem letzeres robust gegenüber seinem Antezedens ist.

Man beachte, daß nur die Robustheit gegenüber der Wahrheit des Antezedens, nicht gegenüber der Falschheit des Konsequens eine Rolle für die Behauptbarkeit des Konditionals spielt. So wird die Möglichkeit gelassen, aus der hohen Behauptbarkeit von $A \succ B$ und $\neg B$ nicht auf die hohe Behauptbarkeit von $\neg A$ zu schließen. (Der Folgerungsfahrschein gilt nur für die Modus Ponens-, nicht für die Modus Tollens-Richtung.)

Beispiel: Aus "Wenn Peter nicht in Frankfurt wohnt, dann wohnt er anderswo im Rhein-Main-Gebiet" und "Peter wohnt nicht im Rhein-Main-Gebiet" wollen wir nicht auf "Peter wohnt in Frankfurt" schließen.

Nun wird auch deutlich, warum AT nicht einfach das Schema BP instanziiert. Denn bei genauerer Betrachtung erkennen wir, warum wir uns von BP (in der Richtung von rechts nach links) verabschieden müssen. Viele Aussagen drücken nicht nur aus, daß ihre Wahrheitsbedingung erfüllt ist, sondern signalisieren darüber hinaus robuste Wahrscheinlichkeit oder andere Implikaturen (s.u.). Der richtige Umgang mit solchen Implikaturen gehört zum kompetenten Gebrauch einer ganzen Reihe sprachlicher Ausdrücke. In all diesen Fällen gilt, daß hohe Wahrscheinlichkeit eine notwendige Bedingung für Behauptbarkeit ist – jedoch nicht umgekehrt. Zur hohen Wahrscheinlichkeit von A muß eine weitere, durch die Implikatur angezeigte Bedingung hinzutreten, damit A behauptbar ist. Im Falle von Konditionalen ist das Bedingung der Robustheit gegenüber dem Antezedens.

Daß es sich hierbei um ein sehr allgemeines Phänomen handelt, verdeutlichen wir uns am besten an einem Beispiel, das mit Robustheit nichts zu tun hat. So ist der Satz A *obwohl* B genau dann hochwahrscheinlich, wenn die Konjunktion $A \wedge B$ eine hohe Wahrscheinlichkeit hat. Aber eine hohe

Wahrscheinlichkeit von $A \wedge B$ reicht nicht aus, den Satz A *obwohl* B behauptbar zu machen. Hier wird ein Kontrast ausgedrückt, der in der einfachen Konjunktion fehlt. Zwar sind $A \wedge B$ und A *obwohl* B unter denselben Bedingungen wahr, nämlich wenn A und B wahr sind, aber die Bedeutung von A obwohl B wird von dieser Wahrheitsbedingung nicht vollständig ausgeschöpft. Vielmehr trägt A *obwohl* B eine *Bedeutungsimplikatur*, nämlich, daß die gleichzeitige Wahrheit von A und B überraschend ist. Grice nennt solche Bedeutungsimplikaturen auch *konventionelle Implikaturen* um sie von Konversationsimplikaturen abzugrenzen. Im Falle von A *obwohl* B können wir daher nicht einfach

$$\mathrm{b}(A \textit{ obwohl } B) = \mathrm{p}(A \textit{ obwohl } B)$$

setzen, denn die recht Seite ist (aufgrund von P0) gleich $\mathrm{p}(A \wedge B)$. Vielmehr ist A *obwohl* B nur dann behauptbar, wenn die an "obwohl" haftende Bedeutungsimplikatur eines Kontrastes zutrifft.

Robustheit gehört ebenfalls zu den Bedeutungsimplikaturen und betrifft nicht nur Konditionale. Zum Beispiel sollte niemand die Disjunktion

(55) Peter ist ein Fanatiker (A), oder jedenfalls sehr verblendet (B),

behaupten, der Peter weder für einen Fanatiker noch für in anderer Weise verblendet hält. Behauptbarkeit impliziert also hohe Wahrscheinlichkeit. Umgekehrt muß aber für die Behauptbarkeit von (55) zur einfachen Disjunktion $A \vee B$ noch die Robustheit gegenüber $\neg A$ hinzutreten, d.h. der Sprecher sollte der Aussage auch dann noch eine hohe Wahrscheinlichkeit zumessen, wenn er A für falsch hält, $\mathrm{p}_{\neg A}(A \vee B)$ also hoch ist. Es ist nicht erstaunlich, daß Sprachen über Konstruktionen verfügen, die Robustheit signalisieren. Oft wissen wir nicht, was unsere Gesprächspartner glauben, wollen aber, daß manche unserer Aussagen auch dann auf Gehör und Glauben treffen, wenn der Gesprächspartner mit anderen Aussagen nicht einverstanden ist. Genau deshalb äußern wie den schwächeren Satz (55), obwohl wir eigentlich die stärkere Aussage A glauben: Wir wollen etwas behaupten, daß robust ist im Austausch mit Gesprächspartnern, die A für falsch halten.

Bedeutungsimplikaturen sind im Unterschied zu den aus allgemeinen Maximen abzuleitenden Gesprächsimplikaturen sehr spezifischen Konventionen: Während Gesprächsimplikaturen Folge allgemeiner pragmatischer Regeln zur effizienten Gesprächsführung sind, betreffen Bedeutungsimplikaturen bestimmte Ausdrücke und finden ihren Niederschlag in Lexikoneinträgen. Sprecher erlernen solche Implikaturen als Teile der Bedeutung von Ausdrücken. Wie Gesprächsimplikaturen – und im Unterschied zu Implikationen aus den Wahrheitsbedingungen – können Bedeutungsimplikaturen ohne logischen Widerspruch gestrichen, d.h. verneint werden. Dem Satz

(56) Die Eintracht hat gewonnen, *obwohl* sie schlecht aufgestellt war

kann Peter ohne *logischen* Widerspruch den Satz

(57) Es überrascht mich überhaupt nicht, daß eine schlecht aufgestellte Mannschaft gewinnt

hinzufügen. Die Wahrheit von (56) schließt (57) nicht aus. Aber indem Peter (57) äußert, gibt er zu erkennen, daß er die Bedeutung von “obwohl”, d.h. die Implikatur eines Kontrastes, nicht erfaßt hat. Deshalb untergräbt die Äußerung von (57) zwar nicht die Wahrheit, wohl aber die Behauptbarkeit von (56). Das ist, wie wir gesehen haben, bei Gesprächsimplikaturen anders. Sie zu streichen, untergräbt weder die Wahrheit noch die Behauptbarkeit der betreffenden Äußerung.

Nach Jackson gehört es nicht zur Bedeutung *im engeren Sinne*, d.h. zur Wahrheitsbedingung eines indikativischen Konditionals, daß es robust im Hinblick auf sein Antezedens ist. Seine Bedeutung in diesem engeren Sinne ist die des materialen Konditionals. Aber die Robustheit gehört wesentlich zur Konvention des richtigen Gebrauchs eines indikativischen Konditionals. In diesem Sinne ist die Robustheit gegenüber dem Antezedens Teil der Bedeutung *im weiteren Sinne* eines Konditionals. Ähnlich wie im Falle von *obwohl* verhält es sich hier so: Wenn Peter nicht glaubt, daß Meier das Tor geschossen hat, obgleich er zuvor das Konditional

Wenn Aigner das Tor nicht geschossen hat, dann war es Meier

behauptet und später erfahren hat, daß Aigner nicht der Torschütze war, dann sind Peters Überzeugungen zwar nicht inkonsistent – aber sie geben zu erkennen, daß er einen wichtigen Teil der Bedeutung von *wenn-dann* nicht erfaßt hat. Er hat nicht verstanden, daß er mit der Äußerung des Konditionals eine bestimmte Art von Robustheit signalisiert hat.

9. Probabilistisches Folgern mit Konditionalen

Sehen wir uns Lewis’ Trivialitätsresultat gegen Stalnakers Hypothese

SH. $$\mathrm{p}(A \succ B) = \mathrm{p}_A(B)$$

genauer an, dann entdecken wir im Beweis eine Annahme, die in der Formulierung des Satzes nicht explizit gemacht wurde. Das Lemma zum Resultat beginnt so:

(∗) $$\mathrm{p}_A(B \succ C) = (\mathrm{p}_A)_B(C),$$

und diese Gleichung wird als Instanz von SH deklariert. Man beachte, daß die rechte Seite der Gleichung nach SH wiederum gleich ist zu

$$\mathrm{p}(A \succ (B \succ C)).$$

Die nicht explizite Annahme ist also, daß indikativische Konditionale (links) iterierbar sind. Die Annahme der Iterierbarkeit ist zwingend, wenn wir davon ausgehen, daß solche Konditionale wahrheitsdefinit sind: Wenn A und B einen Wahrheitswert haben, dann hat auch $A \succ B$ einen Wahrheitswert. Ein einfaches induktives Argument zwingt dann zur Konklusion, daß beliebige eingebettete und also auch iterierte Konditionale wahrheitsdefinit sind – alles andere wäre *ad hoc*.

Dem Trivialitätsresultat von Lewis können wir entgehen, indem wir die Iterierbarkeit von Konditionalen ablehnen, was wiederum erfordert, die These von der Wahrheitsdefinitheit indikativischer Konditionale – und also inbesondere auch MAT – abzulehnen. Wir können das Argument gegen SH dann so umdrehen:

· *Statt*: Aus dem Trivialitätsresultat und der Wahrheitswertigkeit von Konditionalen schließen wir auf die Falschheit von SH.
· *Nun*: Aus dem Trivialitätsresultat und SH – richtig verstanden! – schliessen wir darauf, daß indikativische Konditionale nicht wahrheitswertig sind.

Richtig verstehen wir SH, wenn wir dessen rechte Seite, $\mathrm{p}_A(B)$, als Erläuterung der problematischen linken Seite, $\mathrm{p}(A \succ B)$, auffassen. Problematisch ist der Ausdruck $\mathrm{p}(A \succ B)$, weil die Funktion p eigentlich den Grad einer Überzeugung, daß etwas der Fall ist, mißt. Aber wir wollen ja jetzt Abstand nehmen von der Annahme, daß $A \succ B$ irgendeine Überzeugung darüber, wie die Welt ist, beschreibt. So kann $A \succ B$ nur in einem uneigentlichen, zu erläuternden Sinne in die Argumentstelle von p geraten. Die rechte Seite von SH liefert die Erläuterung. Der Ausdruck "die Wahrscheinlichkeit von $A \succ B$" bedeutet nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit von B unter der Annahme A, wobei A und B Aussagen sind, die im eigentlichen Sinne Argumente von p, d.h. wahr oder falsch ("faktisch") sein können. Das ist Adams' Hypothese, der Kern seiner "probability conditional theory",[34]

AH. $$\mathrm{p}(A \succ B) = \begin{cases} \mathrm{p}_A(B), \text{ falls } \mathrm{p}(A) > 0; \\ 1 \text{ anderenfalls.} \end{cases}$$

Faktisch wollen wir einen Satz A in einer Sprache mit Booleschen Verknüpfungen und dem Junktor $\succ$ nennen, falls A ein Atom ist oder allein mit Booleschen Verknüpfungen, also rein wahrheitsfunktional aufgebaut ist.[35] Im Verein mit dem, was wir Adams' These AT genannt haben, erhalten wir so eine Behauptbarkeitsbedingung für indikativische Konditionale, ohne daß wir annehmen müssen, daß solche Konditionale darüberhinaus auch Wahrheitsbedingungen haben; dieser weiteren Annahme steht Lewis' Resultat entgegen, wie wir gesehen haben. Nach Adams behauptet man mit $A \succ B$ zwar konditional, daß B wahr, nicht jedoch, daß das Konditional wahr ist. Quine (1950) bringt das so auf den Punkt (ohne weiter etwas daraus zu machen):

> Eine Behauptung der Form *Wenn A, dann B* gilt gewöhnlich weniger als Behauptung eines Kondtionals, denn als konditionale Behauptung des Konsequens. [41, §3]

[34] Die Festsetzung für den Fall $\mathrm{p}(A) = 0$ hat in Adams' Schriften einen etwas unsicheren Status. Manchmal ist sie explizit angegeben, manchmal scheint Adams die Option anzudeuten, daß in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit des Konditionals nicht definiert ist. Jedenfalls spielt dieser Fall keine kritische Rolle in Adams' Theorie.
[35] Das ist die einfache Definition. Es liegt jedoch nichts daran, daß die Verknüpfungen wahrheitsfunktional sind. Sie müssen nur, im Gegensatz zu $\succ$, Sätze erzeugen, deren semantische Werte Gegenstände von Überzeugungen sein können.

Das ist die Funktion indikativischer Konditionale in der Rede: Sie sind Mittel zur hypothetischen Behauptung einer Wahrheit, ohne selbst eine Wahrheit kategorisch behaupten zu wollen.[36]

Bemerkung. Die Formulierung AH mag nicht ganz glücklich sein, denn eine Wahrscheinlichkeitsfunktion p kann ja – wie wir gerade gesagt haben – nur in einem "uneigentlichen" Sinne auf indikatische Konditionale angewandt werden. Formulierungen wie "Konditionale sind nicht wahr oder falsch, sondern nur wahrscheinlich" oder "die Wahrscheinlichkeit von Konditionalen ist nicht die Wahrscheinlichkeit ihrer Wahrheit" decken die Schwierigkeit nur mehr oder weniger elegant zu. Der Vorschlag, $\mathrm{p}(A \succ B)$ sei nur eine Ersatznotation für $\mathrm{p}_A(B)$ mag technisch genügen, weist aber AH nicht mehr als den Status einer unverbindlichen Vereinbarung zu. Besser wäre es, auf AH als Trittstein zu verzichten und direkt mit AT zu arbeiten, d.h. einer These nicht über die Wahrscheinlichkeit, sondern über die *Behauptbarkeit* von Konditionalen. Vieles, was Adams schreibt, scheint genau das nahezulegen. Wie dem auch sei, wir werden hier Adams' Entscheidung folgen, die Theorie allein mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsfunktionen darzustellen.

* * *

Diese Theorie steht zunächst einer prinzipiellen Schwierigkeit gegenüber. Ein gültiger Schluß ist einer, der die Wahrheit der Prämissen auf die Konklusion ausnahmslos überträgt. Wenn indikativische Konditionale weder wahr noch falsch sind, wie können sie dann wesentliche Bestandteile von Argumenten sein, die wir im Hinblick auf ihre Gültigkeit beurteilen? Es scheint, als könnten indikativische Konditionale gar keine Logik haben. Aber das ist sicher absurd. Es sei nur an die Funktion von solchen Konditionalen als Folgerungsfahrscheinen erinnert; d.h. wir fordern, daß Modus Ponens gültig sei: Aus $A \succ B$ und A folgt B. Aber in welchem Sinne kann dieser Schluß gültig sein, wenn $A \succ B$ gar nicht wahrheitswertig ist?

Wir benötigen einen Begriff gültiger Folgerung, der auch auf Prämissen und Konklusionen anwendbar ist, von denen wir nur annehmen, daß sie im Hinblick auf ihre Wahrscheinlichkeit – und möglicherweise nicht im Hinblick auf ihre Wahrheit – bewertet werden können. Dieser sollte weiter sein als der übliche Begriff logischer Folgerung, ihn also als Grenzfall enthalten. Auf dem Weg zu einer solchen Relation gültiger Folgerung, kommen wir auf die Beobachtung,

PL. $$\text{wenn } A \models B, \text{ dann } (\forall \mathrm{p})\ \mathrm{p}(A) \leq \mathrm{p}(B)$$

zurück, vgl. p. 219. PL nennt eine Eigenschaft von $\models$, die wir uns insbesondere dann wünschen, wenn wir aus unsicheren Prämissen schließen: Wenn

[36] Wir haben hier Lewis' Trivialitätsresultat als prinzipiellen Beweggrund für die Ablehnung von Wahrheitsbedingungen für indikativische Konditionale in den Vordergrund gestellt. Viele Autoren führen dafür aber weitere und von Lewis' Resultat unabhängige Gründe an; vgl. z.B. Gibbard [19], Appiah [4], Edgington [14], [16], Bennett [6], Arló-Costa [5] und Adams [3].

unter jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung p der Wert von B nie kleiner als der von A werden kann, dann garantiert der Schluß von A nach B, daß es unter keiner Funktion p zu einem Abfall der Wahrscheinlichkeit von der Prämisse zur Konklusion kommt. Auch die Umkehrung von PL gilt, wenn A und B wahrheitswertige Aussagen sind. (Denn Wahrheitswertverteilungen $I : \mathrm{FML} \longrightarrow \{0, 1\}$ sind Grenzfälle von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Also folgt aus der Annahme $\mathrm{p}(A) \leq \mathrm{p}(B)$ $(\forall \mathrm{p})$, daß dies insbesondere auch für alle I gilt, falls A und B als Argumente für I zulässig sind. Da nun $A \models B$ gdw $\forall I : I(A) \leq I(B)$, so folgt $A \models B$.)

Diese Beobachtung gibt so etwas wie eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation logischer Folgerung (aus einer Prämisse) ab. Für die weitere Entwicklung dieses Gedankens wird es einfacher sein mit dieser Formulierung zu arbeiten: Gültige Schlüsse (aus einer Prämisse) haben die Eigenschaft, daß die Konklusion nie, d.h. unter keiner Wahrscheinlichkeitsverteilung, *ungewisser* als die Prämisse sein kann. Ungewißheit ist hier einfach Unwahrscheinlichkeit (das Komplement von Wahrscheinlichkeit), d.h. ein Maß $\overline{\mathrm{p}}$ so, daß $\overline{\mathrm{p}}(A) = 1 - \mathrm{p}(A)$. Wenn wir – wie dies meist der Fall ist – von ungewissen Annahmen ausgehen müssen, dann können wir uns von Folgerungen aus solchen Annahmen nicht mehr wünschen, als daß diese nicht noch ungewisser sein mögen. Eine Folgerung, die diese Eigenschaft hat, wollen wir eine *Wahrscheinlichkeitsfolgerung* (kurz: p-Folgerung, $\models_{\mathrm{p}}$) nennen:

$$A \models_{\mathrm{p}} B \text{ gdw } \forall \mathrm{p} : \overline{\mathrm{p}}(A) \geq \overline{\mathrm{p}}(B).$$

Die Verallgemeinerung zu Fällen mit mehr als einer Prämisse liegt auf der Hand: Die Ungewißheit der Konklusion darf nicht größer als die der Prämisse*n* sein. Aber wie messen wir die Wahrscheinlichkeit einer Pluralität $A_1, ..., A_n$ von Prämissen?

Für die Relation $\models$ logischer Folgerung gilt (unter elementaren Annahmen)

$$A, B \models C \text{ gdw } A \wedge B \models C. \tag{1}$$

Das liegt daran, daß die Aussagen der Prämissenmenge $\{A, B\}$ genau dann wahr sind, wenn deren Konjunktion $A \wedge B$ wahr ist. Aber selbst wenn A und B im selben Grade ungewiß sind, ist dies im allgemeinen nicht der Grad der Ungewißheit von $A \wedge B$. (Ob die Münze in der geschlossen Hand oben Kopf oder Zahl zeigt, ist gleich ungewiß; daß beides oben liegt ist "maximal ungewiß", d.h. mit Sicherheit nicht der Fall.) Die Äquivalenz (1) wird also falsch, wenn wir logische ($\models$) durch Wahrscheinlichkeitsfolgerung ($\models_{\mathrm{p}}$) ersetzen. Wir wissen jedoch auch (vgl. den Beweis der nächsten Beobachtung), daß $\overline{\mathrm{p}}(A \wedge B)$ nie größer als $\overline{\mathrm{p}}(A) + \overline{\mathrm{p}}(B)$ sein kann, d.h.

$$\overline{\mathrm{p}}(A) + \overline{\mathrm{p}}(B) \geq \overline{\mathrm{p}}(A \wedge B). \tag{2}$$

Aus PL und (1) folgt ferner $(\forall \overline{\mathrm{p}})$,

$$\text{wenn } A, B \models C, \text{ dann } \overline{\mathrm{p}}(A \wedge B) \geq \overline{\mathrm{p}}(C), \tag{3}$$

und also nach (2)

(4) $\qquad$ wenn $A, B \models C$, dann $\overline{\mathrm{p}}(A) + \overline{\mathrm{p}}(B) \geq \overline{\mathrm{p}}(C)$,

So haben wir die richtige Verallgemeinerung logischer Folgerung für den Fall nur wahrscheinlicher Prämissen und Konklusionen gefunden:

Def. $\models_{\mathrm{p}}$ $\qquad A_1, ..., A_n \models_{\mathrm{p}} B$ gdw $\forall \mathrm{p} : \overline{\mathrm{p}}(A_1) + \cdots + \overline{\mathrm{p}}(A_n)) \geq \overline{\mathrm{p}}(B)$.

Wahrscheinlichkeitsschlüsse sind solche, in denen die Ungewißheit der Konklusion nie die summierte Ungewißheit der Prämissen übersteigen kann, gleichgültig wie ungewiß Prämissen und Konklusion sind. Jeder logisch gültige Schluß hat diese Eigenschaft, wie die nächste Beobachtung, (4) verallgemeinernd, zeigt.

Satz 9. (Adams' "Erster Hauptsatz" [2, p. 38].)
1. *Wenn* $A_1, ..., A_n \models B$, *dann* $A_1, ..., A_n \models_{\mathrm{p}} B$.
2. *Wenn* $A_1, ..., A_n$ *und* B *wahrheitswertig sind, dann gilt auch: Wenn* $A_1, ..., A_n \models_{\mathrm{p}} B$, *dann* $A_1, ..., A_n \models B$.

Beweis. *Ad 1.* Angenommen, $A_1, ..., A_n \models B$. Dann $\neg B \models \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n$ und also nach PL,

$$\mathrm{p}(\neg B) \leq \mathrm{p}(\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n).$$

Daraus folgt nach (P2′), daß

$$\mathrm{p}(\neg B) \leq \mathrm{p}(\neg A_1) + \cdots + \mathrm{p}(\neg A_n),$$

Also nach Definition $\overline{\mathrm{p}} = 1 - \mathrm{p}$,

$$\overline{\mathrm{p}}(B) \leq \overline{\mathrm{p}}(A_1) + \cdots + \overline{\mathrm{p}}(A_n).$$

Ad 2. Folgt aus dem Umstand, daß jede Wahrheitswertverteilung über geeignete Aussagen auch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. ■

Die Lotterie-Paradoxie. Man beachte, daß Argumente p-gültig sein können, auch wenn sie von jeweils einzeln hochwahrscheinlichen Prämissen auf eine ganz unwahrscheinliche Konklusion führen. Hier ist ein berühmte Beispiel [34]: In einer Lotterie gebe es 1000 Lose. $L_1, \ldots, L_{1000}$ seien die Aussagen, daß das Los mit der Nummer $1 \ldots 1000$ gewinnt, und L stehe für $L_1 \vee \cdots \vee L_{1000}$, also für die Aussage, daß ein Los gewinnt. Ob ein bestimmtes Los L_i gewinnt, ist sehr ungewiß (vernünftigerweise $1 - 0,001$), jede Aussage $\neg L_i$ ist daher hochwahrscheinlich (0,999) – praktisch eine Gewißheit. (Wenn eine Aussage mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,999 noch keine praktische Gewißheit sein sollte, dann erhöhe man im Beispiel die Anzahl der Lose.) Das Beispiel verführt zu einem paradox anmutenden Gedankengang. Wenn jede Annahme L_i praktisch sicher ist, dann sollte logisches Folgern aus der Gesamtheit dieser Annahmen nicht zu unsicheren Konklusionen führen. Aber aus $\neg L_1, \ldots, \neg L_{1000}$ folgt logisch die völlig unwahrscheinliche, tatsächlich falsche Konklusion $\neg L$, daß *kein* Los gewinnt. Wie kann das sein? Der Satz liefert eine Erklärung. Auch wenn einzelne Prämissen nur eine kleine Restungewißheit haben, so steigt die Ungewißheit einer Menge solcher Prämissen mit der Anzahl ihrer Elemente. Ist der Schluß gültig, so setzt die Ungewißheit der Konklusion eine obere Schranke für die Ungewißheit der Prämissenmenge (so der Satz). Wenn – wie in der Lotterie-Paradoxie – genügend viele Prämissen mit jeweils kleiner Ungewißheit zusammenkommen, so kann diese obere Schranke erreicht werden. Dann ist die Unsicherheit der Prämissen, als Gesamtheit aufgefaßt, gleich der Unsicherheit der Konklusion. Der Schluß ist in diesem Fall zwar p-gültig aber es wäre nicht richtig, ihn auszuführen. Täten wir es, dann würden wir aus Prämissen schließen, die, zusammengenommen betrachtet, maximal unsicher sind. (Genauso wie der Schluß von $\neg L_1, ..., \neg L_{1000}$ auf $\neg L$ zwar logisch gültig aber nicht richtig ist, da die Prämissen nicht allesamt wahr sein können.)

Die Relation der p-Folgerung erfüllt die wichtigsten Bedingungen, die wir uns von Folgerungsrelation erwarten; oder, etwas anders ausgedrückt, die Operation

$$C_{\mathrm{p}}(X) = \{A : X \models_{\mathrm{p}} A\}$$

erfüllt die charakteristischen Bedingungen einer Tarski'schen Konsequenzoperation:

$$\begin{array}{rr} X \subseteq C_{\mathrm{p}}(X) & \text{Reflexivität} \\ X \subseteq Y \Rightarrow C_{\mathrm{p}}(X) \subseteq C_{\mathrm{p}}(Y) & \text{Monotonie} \\ C_{\mathrm{p}}(C_{\mathrm{p}}(X)) \subseteq C_{\mathrm{p}}(X) & \text{Transitivität} \end{array}$$

Was die Eigenschaft der Kompaktheit betrifft (wenn $X \subseteq C_{\mathrm{p}}(Y)$, dann gibt es eine endliche Teilmenge $Y' \subseteq Y$ mit $X \subseteq C_{\mathrm{p}}(Y')$), so ist diese trivial erfüllt. Da wir in endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen arbeiten, so ist die Addition von Wahrscheinlichkeiten nur für eine endliche Anzahl von Summanden definiert. Also kann $\models_{\mathrm{p}}$ nur für endliche Prämissenmengen definiert sein.

Es wird nun Zeit, indikativische Konditionale wieder ins Bild zu bringen. Solche Konditionale können nicht Terme der logischen Folgerungsrelation

$$A_1, \ldots, A_n \models B \text{ gdw } \forall I : \min(I(A_1), \ldots, I(A_n) \leq I(B))$$

sein, denn sie sind keine zulässigen Argumente für Wahrheitswertverteilungen I. Aber da sie wahrscheinlichkeitsbewertet werden können, so können wir danach fragen, wie sie in der p-Folgerungsrelation,

$$A_1, \ldots, A_n \models_{\mathrm{p}} B \text{ gdw } \forall \overline{\mathrm{p}} : \overline{\mathrm{p}}(B) \leq \overline{\mathrm{p}}(A_1) + \cdots + \overline{\mathrm{p}}(A_n)$$

zueinander stehen.

Wir betrachten jetzt eine Sprache, in der die wahrheitsfunktionalen Zusammensetzungen um einen zweistelligen Junktor $\succ$ ergänzt sind. Von einem solchen Junktor erwarten wir normalerweise, daß er zur Bildung von Formeln so beiträgt, daß Formeln wie

$$(1)\ (A \succ B) \wedge C \quad \text{und} \quad (2)\ (A \succ B) \succ C$$

entstehen. Dabei müssen wir jedoch bedenken, daß die Formeln der Sprache als Terme der Relation $\models_{\mathrm{p}}$ verwendet werden sollen. Nach Def. $\models_{\mathrm{p}}$ steht die Relation zwischen Wahrscheinlichkeitsausdrücken. Die Formationsregeln einer Sprache mit $\succ$ sollten also so sein, daß nur legitime Argumente für Wahrscheinlichkeitsfunktionen p als Formeln erzeugt werden können. Sind (1) und (2) solche Argumente?

Wir erinnern uns: Als Argumente einer Funktion p beschreiben Formeln Klassen von konkreten Ereignissen, Ereignistypen, wie wir gesagt haben. (In den klassischen Darstellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie sind das die Ergebnisse, unter die Zufallsexperimente subsumiert werden können.) So beschreibt $A \wedge B$ die Klasse der Ereignisse, welche unter die Beschreibung A als auch unter die Beschreibung B fallen. Aber $A \succ B$ beschreibt gar keine Ereignisklasse, sondern allenfalls (so die Idee) das Verhältnis zweier solcher Klassen. Ein Ausdruck wie $\mathrm{p}(A \succ B)$ ist daher sinnlos solange wir nicht festlegen, wie wir ihn verstehen wollen. Genau das tut AT: $\mathrm{p}(A \succ B)$ ist eine andere Art, sich auf den Wert $\mathrm{p}_A(B)$ zu beziehen. Aber dieser Weg, den Ausdruck $\mathrm{p}(A \succ B)$ zu eliminieren, ist nur gangbar wenn das Konditional als Argument von p allein steht – auf $\mathrm{p}((A \succ B) \wedge C)$ ist AT nicht anwendbar. Die Formel (1) beschreibt also nichts und daher ist p darauf nicht anwendbar.

Wie steht es mit dem iterierten Konditional (2)? Sicher beschreibt auch diese Formel kein Ereignis; aber können wir den fragwürdigen Ausdruck $\mathrm{p}((A \succ B) \succ C)$ nicht mit Hilfe von AT zugunsten von $\mathrm{p}_{A \succ B}(C)$ eliminieren? Nach Def. p_A hätten wir dann aber

$$\mathrm{p}_{A \succ B} C = \frac{\mathrm{p}((A \succ B) \wedge C)}{\mathrm{p}(A \succ B)}$$

und somit im Zähler das gleiche Problem wie im Falle von (1).

Funktioniert die Elimination nicht zumindest im Falle von links iterierten Konditionalen wie

$$(3)\ A \succ (B \succ C),$$

in denen A, B, und C nicht selbst Konditionale enthalten? Das sieht zunächst besser aus, denn in diesem Fall ist

$$(*) \qquad \mathrm{p}(A \succ (B \succ C)) = \mathrm{p}_A(B \succ C) = (\mathrm{p}_A)_B(C).$$

Wir erinnern uns jedoch an dieser Stelle, daß die zweite dieser Gleichungen direkt verantwortlich ist für das Trivialitätsresultat von Lewis; vgl. $(*)$ auf p. 231. Wenn wir dem Resultat entgehen wollen, dürfen wir es zu dieser Gleichung nicht kommen lassen. Es gibt ein weiteres Argument gegen die

Gleichung, welches unabhängig ist von der Trivialitätsdrohung. Dazu stellen wir zunächst fest, daß

$$(\mathrm{p}_A)_B(C) = \mathrm{p}_{A\wedge B}(C) = \mathrm{p}(A \wedge B \succ C).$$

Es folgt, daß unter der Relation der p-Folgerung die Äquivalenz

$$A \succ (B \succ C) \equiv_{\mathrm{p}} A \wedge B \in C$$

gelten muß. Die Folgerungsrichtung von rechts nach links nennt man *Exportation* (eines Konjunkts in eine Antezedensposition). Nun wünschen wir uns für $\succ$ unter p-Folgerung Modus Ponens:

$$A \succ B, A \models_{\mathrm{p}} B.$$

(Man erinnere sich daran, daß Konditionale die Funktion von Folgerungsfahrscheinen haben sollen!) Aber dann können wir so argumentieren:

(1)	$\models A \wedge B \to A$	Logik
(2)	$\models_{\mathrm{p}} A \wedge B \succ A$	(1), Beob. 9.1
(3)	$\models_{\mathrm{p}} A \succ (B \succ A)$	(2), Exportation
(4)	$A \succ (B \succ A), A \models_{\mathrm{p}} B \succ A$	Modus Ponens
(5)	$A \models_{\mathrm{p}} B \succ A$	(3),(4)

In (5) haben wir eine Sequenz hergeleitet, von der wir schon mehrfach festgestellt haben, daß sie keine gültige Folgerung für indikativische Konditionale ist. Die zu meidende Konklusion ist letzten Endes auf $(*)$ zurückführbar.

Diese Überlegungen schließen nicht aus, daß wir besondere Vereinbarungen für Formeln wie (1–3) als Argumente von p treffen, wie wir das ja auch schon durch AT für alleinstehende Konditionale getan haben. Aber ohne solche Vereinbarungen sind wir gut beraten, die Regeln für Formelbildung so zu gestalten, daß sie ohne weiteres legitime Argumente für Wahrscheinlichkeitsfunktionen produzieren.

In dieser Absicht, beginnen wir mit dem Abschluß einer Menge von Atomen unter einer funktional vollständigen Menge Boole'scher Junktoren. Diese Menge nennen wir die *faktischen Formeln* der aus den Atomen generierten Sprache. Die Menge $\mathrm{FML}^{\succ}$ der *Formeln* ist dann so definiert:

> Jede faktische Formel ist in $\mathrm{FML}^{\succ}$;
> wenn A und B faktisch sind, dann ist $A \succ B$ in $\mathrm{FML}^{\succ}$;
> $\mathrm{FML}^{\succ}$ sei die kleinste Menge, welche diese Bedingungen erfüllt.

Nach dieser Definition enthält die Sprache keine Formeln mit irgendwie eingebetteten Konditionalen. Soweit ein Konditional als Term der $\models_{\mathrm{p}}$-Relation vorkommen kann, ist es "flach", d.h. mit faktischem Antezedens und Konsequens.

Nun ist die Relation der p-Folgerung für Sprachen mit indikativischen Konditionalen definiert. Welche Folgerung sind gültig und welche sind es nicht? Im folgenden stellen wir drei Verfahren vor, Antworten auf diese Frage zu finden.

Ersatzwahrheitstafeln. Konditionale haben keine Wahrheitswerte. Aber wir können so tun, also ob sie welche hätten. Eine einfache Weise, einige ungültigen Instanzen der Relation $\models_{\mathrm{p}}$ zu identifizieren besteht darin, ihre Terme in wahrheitswertige Formeln umzuwandeln und dann auf logische Folgerung zu prüfen. Dazu definieren wir das materiale Gegenstück A^m einer Formel A so:

1. Wenn A faktisch ist, dann ist $A^m = A$;
2. wenn A ein Konditional $B \succ C$ ist, dann ist $A^m = B \to C$;
3. wenn $X = \{A_1, ..., A_n\}$, dann $X^m = \{A_1^m, ..., A_n^m\}$.

Beobachtung 10. *Wenn $X \models_{\mathrm{p}} A$, dann $X^m \models A^m$.*

Beweis. Unmittelbar aus Satz 9. ∎

Das jetzt zu beschreibende Verfahren bedient sich ebenfalls der Simulation von Konditionalen durch ihre materialen Gegenstücke und erweist sich als richtiger und vollständiger Test auf Gültigkeit.

Es seien $A_1, ..., A_n, B$ Sätze der oben beschriebenen Sprache.

1. Konstruiere eine *Ersatzwahrheitstafel* für $A_1, ..., A_n, B$. Die Zeilen der Tafel wollen wir Bewertungen (v) nennen. Für faktische Formeln sind die Bewertungen klassisch, d.h. $v(\neg A) = 1$ gdw $v(A) = 0$ und $v(A \wedge B) = 1$ gdw $v(A) = v(B) = 1$. Für $A \succ B$ gilt

$$v(A \succ B) = \begin{cases} v(A \to B), & \text{wenn } v(A) \neq 0; \\ \text{undefiniert anderenfalls.} \end{cases}$$

2. Eine Bewertung v *bestätigt* eine Menge X von Sätzen genau dann, wenn (a) $\exists A \in X : v(A) = 1$ und (b) $\neg \exists A \in X : v(A) = 0$.

Satz 11. [2, p. 171] *$X \models_{\mathrm{p}} B$ genau dann, wenn $\exists Y \subseteq X$:*
(a) $Y^m \models B^m$, und
(b) $\forall v$: wenn v alle Sätze in Y bestätigt, dann $v(B) = 1$.

Beispiel. Wir wollen die folgenden Sequenzen prüfen:

$$B \models_{\mathrm{p}} A \succ B \tag{1}$$

$$A, B \models_{\mathrm{p}} A \succ B \tag{2}$$

$$A \succ B \models_{\mathrm{p}} A \to B \tag{3}$$

$$A \to B \models_{\mathrm{p}} A \succ B \tag{4}$$

$$A \succ B \models_{\mathrm{p}} \neg B \succ \neg A \tag{5}$$

Hier ist die Ersatzwahrheitstafel, die dem Zweck dienen wird:

A	B	$A \to B$	$A \succ B$	$\neg B \succ \neg A$
1	1	1	1	–
1	0	0	0	0
0	1	1	–	–
0	0	1	–	1

Alle Sequenzen bestehen offensichtlich den Test (a) des Satzes. Wir müssen also nur (b) untersuchen.

Ad (1). v_1 und v_3 bestätigen B aber $v_3(A \succ B) \neq 1$. Nicht gültig.

Ad (2). Nur v_1 bestätigt $\{A, B\}$ und $v_1(A \succ B) = 1$. Gültig.

Ad (3). v_1 bestätigt $A \succ B$ und $v_1(A \to B) = 1$. Gültig.

Ad (4). Drei Bewertungen bestätigen $A \to B$ aber in den letzten beiden Zeilen hat $A \succ B$ nicht den Wert 1. Nicht gültig.

Ad (5). Wie in (3) bestätigt v_1 $A \succ B$, jedoch $v_1(\neg B \succ \neg A) \neq 1$. Nicht gültig.

Größengeordnete Euler-Diagramme. Das gerade beschriebene Verfahren ist sehr einfach und effizient, gibt aber keine Information darüber, wie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen aussehen können, die dazu führen, daß eine Sequenz ungültig ist. Das ist aber eine wesentlich Information, um konkrete Gegenbeispiele zu Sequenzen zu konstruieren und auf ihre Plausibilität zu prüfen. Adams beschreibt daher ein weiteres Verfahren, das für P-Folgerung richtig und vollständig ist. Eine präzise Beschreibung dieses Verfahrens ist deutlich komplizierter als im Falle der Ersatzwahrheitstafeln. Wir wollen uns hier mit einer Skizze begnügen.

Euler-Diagramme stellen rein qualitative Verhältnisse zwischen Mengen dar.[37] Da wir Aussagen als Punktmengen auffassen können (Mengen von Wahrheitswertverteilungen, Zustandsbeschreibungen, möglicher Welten, etc.) finden Euler-Diagramme auch ihre offensichtliche Verwendung in der Aussagenlogik. Die Diagramme 1 und 2 stellen beide dasselbe dar: A und $\neg A$ schließen einander aus und erschöpfen zusammen den Bereich aller Möglichkeiten. Das Paar von Diagrammen macht deutlich, daß in Euler-Diagrammen eine bildhafte Information nicht genutzt wird: die *Größe* der Flächen. In Diagramm 1 ist A nicht "wahrer" als in Diagr. 2.

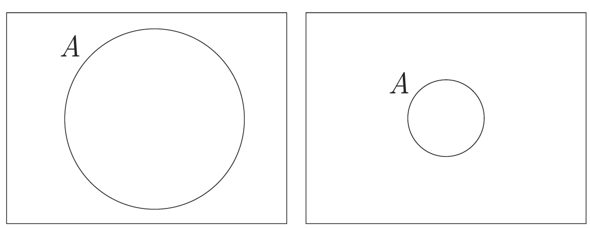


DIAGRAMME 1 und 2

Da die Relation $\models_{\mathrm{P}}$ auf einem Vergleich nicht zwischen Wahrheitswerten, sondern zwischen Wahrscheinlichkeitswerten beruht, bietet es sich an, die Größeninformation in Diagrammen zu nutzen, um Wahrscheinlichkeitsgrössen darzustellen. Wenn wir uns so die Kreisinhalte als proportional zu Wahrscheinlichkeiten vorstellen, dann geben die Diagramme 1 und 2 sehr verschiedene Situation wieder: Im einen Diagramm ist A wahrscheinlicher

[37] Das tun auch Venn-Diagramme. Venn-Diagramme sind Euler-Diagramme, die eine zusätzliche Bedingung erfüllen. Adams' Diagramme erfüllen diese Bedingung nicht allgemein. Adams verwendet also Euler-Diagramme, die in einigen Fällen zugleich Venn-Diagramme sind.

als $\neg A$, im anderen ist es umgekehrt. Es ist klar, daß in jedem Diagramm alle nicht überlappenden Flächeninhalte sich zum Flächeninhalt des Rechtecks summieren müssen. Jede Aufteilung des Rechtecks stellt also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung dar.

In den beiden Diagrammen oben zeigt der A-Kreis den Anteil von A am gesamten Bereich an. ($|A|$ bezeichne den Teil eines Rechtecks, der die Aussage A darstellt.) Eine konditionale Wahrscheinlichkeit $\mathrm{p}_A(B)$ gibt die Wahrscheinlichkeit von B an unter der Annahme, daß wir uns im A-Bereich befinden. Im Diagramm sehen wir uns dazu zunächst den Teil von $|B|$, der in $|A|$ liegt, d.h. $|A \wedge B|$ an. Dieser Teil kann beispielsweise wie in Diagr. 3 oder wie in Diagr. 4 ausfallen.

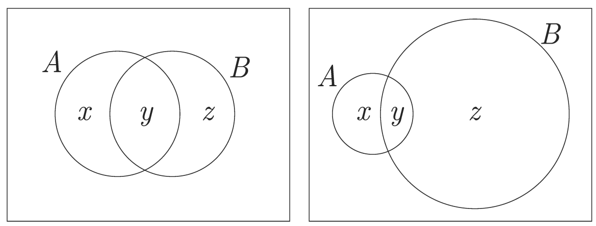


DIAGRAMME 3 und 4

Dann fragen wir, welchen Anteil $y = |A \wedge B|$ an $x + y = |A|$ hat, d.h. wir dividieren y durch $x + y$ (wie es die Definition konditionaler Wahrscheinlichkeit vorsieht). Je größer y im Verhältnis zu x ist, umso höher ist $\mathrm{p}_A(B)$; Diagr. 3 zeigt offenbar einen kleineren Wert von $\mathrm{p}_A(B)$ an als Diagr. 4. Anders als die Wahrscheinlichkeit einer faktischen Formel wird die eines Konditionals also nicht durch eine abgezirkelte Fläche im Rechteck dargestellt. Es ist vielmehr ein Verhältnis solcher Flächen, welches die Wahrscheinlichkeit eines Konditionals festlegt. Das ist ein bildhafter Ausdruck der These, daß Konditionale nichts beschreiben und daher ihre Wahrscheinlichkeit nicht die Wahrscheinlichkeit sein kann, daß eine Beschreibung zutrifft.

Aus der diagrammatischen Methode läßt sich eine Definition von Folgerung entwickeln die mit der Relation der p-Folgerung koinzidiert; Details sind in [1] und [2] dargestellt. Wir betrachten die Methode hier nur, um Gegenbeispiele zu Folgerungsbehauptungen zu finden und als Heuristik, um für die Gültigkeit von Folgerungen zu argumentieren. Beides wollen wir anhand einiger Sequenzen illustrieren.

Für die Widerlegungen einiger Folgerungsbehauptungen, wird die Betrachtung von Diagr. 4 genügen. Hier ist (wie auch in Diagr. 3) $|A| = x + y$, $|B| = y + z$, und $|A \wedge B| = y$. Danach ist

$$\mathrm{p}_A(B) = \frac{y}{x+y} \quad \text{und} \quad \mathrm{p}_B(A) = \frac{y}{y+z}.$$

Nun ist in Diagramm 4 der Anteil von y an $y + z$, der $\mathrm{p}_A(B)$ wiedergibt, deutlich kleiner als $|B| = y + z$. Damit gibt das Diagramm ein Rezept ab für Gegenbeispiele zur Behauptung

(1) $$A \models_{\mathrm{p}} B \succ A.$$

Ein solches Gegenbeispiel ist die Verteilung mit

$$x = 0,2, \ y = 0,1, \ \text{und } z = 0,5.$$

Dann ist

$$\mathrm{p}(B) = y + z = 0,6 \quad \text{und} \quad \mathrm{p}_A(B) = \frac{y}{y+x} = \frac{0,1}{0,3} = 0,\overline{3}.$$

Das abstrakte Gegenbeispiel läßt sich leicht in ein konkretes ummünzen, indem wir plausible Einsetzungen für A und B finden. Beispiel:

A: Die Eintracht spielt in Unterzahl.
B: Die Eintracht gewinnt.

Aus einer guten Chance, daß die Eintracht gewinnt, folgt keine mindestens ebenso gute Chance, daß sie gewinnt, wenn sie in Unterzahl spielt.

Auch Kontraposition,

$$(5) \qquad \neg A \succ B \models_{\mathrm{p}} \neg B \succ A,$$

wird durch Diagr. 4 und die Werteverteilung widerlegt. Wir rechnen:

$$\mathrm{p}_{\neg A}B = \frac{|\neg A \wedge B|}{|\neg A|} = \frac{z}{1-(x+y)} = \frac{0,5}{0,7} \approx 0,71$$
$$\mathrm{p}_{\neg B}A = \frac{A \wedge \neg B}{\neg B} = \frac{x}{1-(y+z)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

(An diesem Beispiel sieht man, daß es mit dem heuristischen Wert der Diagramme nicht immer weit her ist. In vielen Fällen wird es einfacher sein, sich zuerst eine widerlegenden Werteverteilung zu überlegen, um danach ein dieser Verteilung mehr oder weniger entsprechendes Diagramm zu konstruieren.) Die Einsetzung für A und B illustrieren das in plausibler Weise. Die Aussage

$\neg A \succ B$: Wenn die Eintracht in voller Stärke spielt, dann gewinnt sie.

ist deutlich wahrscheinlicher als die vermeintliche Konklusion:

$\neg B \succ A$: Wenn die Eintracht nicht gewinnt, dann spielt sie in Unterzahl.

Diagramm 4 zeigt ebenfalls wie

$$(4) \qquad A \to B \models_{\mathrm{p}} A \succ B$$

falsch sein kann. Die Wahrscheinlichkeit von $A \to B$ ist mindestens so hoch wie die von B, welche, wie das Bild zeigt, höher ist als die von $A \succ B$. Mit den oben festgesetzten Werten ist $\mathrm{p}(A \succ B) = 0,\overline{3}$ und $\mathrm{p}(A \to B) = \mathrm{p}(\neg A \vee B) = (1 - x + y) + y = 1 - x = 0,8$. Als konkretes Gegenbeispiel zur Kontraposition mag wieder das Eintracht-Beispiel dienen. Man betrachte

$A \to B$: Die Eintracht spielt in voller Stärke oder gewinnt.
$A \succ B$: Wenn die Eintracht in Unterzahl spielt, dann gewinnt sie.

Das materiale Konditonal mag eine hohe Wahrscheinlichkeit haben, weil B (oder $\neg A$) für sehr wahrscheinlich gehalten wird. Jemand, der die Dinge so sieht, verpflichtet sich nicht dazu unter der Annahme der Unterzahl den Gewinn für mindestens ebenso wahrscheinlich zu halten.

Dagegen ist die umgekehrte Sequenz

$$A \succ B \models_{\mathrm{p}} A \rightarrow B \tag{3}$$

(Modus Ponens für $\succ$) gültig. Wir betrachten das Diagramm 3, das wir nun aber so verstehen wollen, daß es für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen noch offen sein soll. (Daß die beiden Kreise gleich groß sind und sich überlappen, soll jetzt also nicht heißen, daß wir nur Verteilungen über A und B betrachten, unter denen die Aussagen gleich wahrscheinlich sind und ihre Konjunktion nicht gleich Null ist.) Die Größen der Kreise sind gewissermaßen nur provisorisch angezeigt und wir fragen jetzt danach, ob sie so festgelegt werden können, daß ein Gegenbeispiel zur Sequenz entsteht. Wie zuvor ist

$$\mathrm{p}(A \succ B) = \frac{y}{x+y} \quad \text{und} \quad \mathrm{p}(A \rightarrow B) = (1 - x + y) + y = 1 - x.$$

Es ist nun einfach zu zeigen, daß für alle x, y, z $(x + y > 0)$,

$$\frac{y}{x+y} \leq 1 - x.$$

Dazu erinnern wir uns, daß $\mathrm{p}_A(B) = 1 - \mathrm{p}(\neg B)$. Für die Werte in unserm Diagramm bedeutet das:

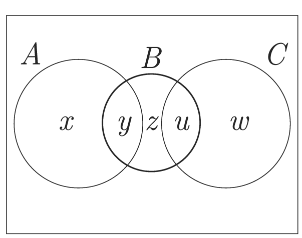
$$x/(x + y) = 1 - y/(x + y).$$

Da $x+y \leq 1$, so ist $x \leq x/(x+y)$. Also $x \leq 1-y/(x+y)$ und somit $y/(x+y) \leq 1 - x$ wie gewünscht. Es kann also kein Festlegung der Kreisgrößen geben so, daß ein Gegenbeispiel zur Modus Ponens-Sequenz angezeigt wird.

Schließlich wollen wir noch eine Sequenz in drei Variablen diagrammatisch widerlegen:

$$A \succ B, B \succ C \models_{\mathrm{p}} A \succ C. \tag{6}$$

Die folgenden zwei Diagramme zeigen zwei verschiedene Weisen, wie indikativische Konditionale nicht transitiv verkettet sein können.



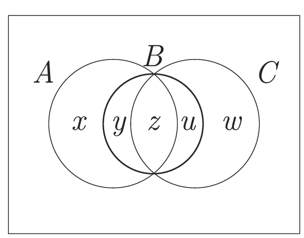


Diagramme 5 und 6.

Diagr. 5 zeigt einen positiven Anteil von B an A (d.h. von y an $x + y$) und von C an B (d.h. von u an $y+z+u$); beide Prämisse haben also eine positive Wahrscheinlichkeit. Aber C hat gar keinen Anteil an A, d.h. $\mathrm{p}_A(C) = 0$. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die dieser Beschreibung entspricht, ist schnell gefunden; z.B. $x = w = 0,2$ und $y = z = u = 0,1$. Für eine konkrete Instantiierung von A, B und C benötigen wir $\mathrm{p}(A \succ B) \neq 0$, $\mathrm{p}(B \succ C) \neq 0$ und $A \wedge C \leftrightarrow \bot$. Hier ist ein Beispiel:[38]

A: Die Eintracht schießt genau drei Tore.
B: Die Eintracht schießt höchstens drei Tore.
C: Die Eintracht schießt weniger als drei Tore.

$A \succ B$ ist zwar keine logische Wahrheit (denn indikativische Konditionale beschreiben auch keine logischen Tatsachen) aber genauso wahrscheinlich wie eine logische Wahrheit. Die meisten Spiele der Eintracht enden mit höchstens zwei Toren. Wenn ich das weiß und daher C eine hohe Wahrscheinlichkeit zubillige, dann gibt die Annahme B keinen Anlaß, von diesem Wert abzuweichen. Also hat $B \succ C$ ebenfalls eine hohe Wahrscheinlichkeit. Aber $A \succ C$ ist völlig unwahrscheinlich.

Das aus Diagr. 5 abgeleitete Gegenbeispiel ist etwas ungewöhnlich, da es von einer maximal wahrscheinlichen Prämisse und einer maximal unwahrscheinlichen Konklusion ausgeht. Eine bei weitem gewöhnlichere Situation, in der Transitivität fehlgeht, zeigt Diagr. 6. Hier hat B einen großen Anteil an A, nämlich $y+z$; C hat einen ebenso großen Anteil an B, nämlich $z+u$; jedoch hat C nur einen relativ kleinen Anteil an A, nämlich z ($< y+z$ und $< z + u$). Das klassische Beispiel, auf das diese Beschreibung zutrifft ist dieses:

A: Es gehen Lawinen ab.
B: Der Boden ist mit Schnee bedeckt.
C. Ich fahre Ski.

Es ist klar, was den Schluß von $A \succ B$ und $B \succ C$ auf $A \succ C$ vereitelt. Während $B \succ C$ für sich betrachtet hochwahrscheinlich sein mag, so würden wir nicht auf C schließen wollen, wenn das Antezedens B durch Ablösung von A gewonnen wurde; anders gesagt: $A \wedge B \succ C$ hat eine dramatisch geringere Wahrscheinlichkeit als $B \succ C$. Zum einen erklärt das, warum Gegenbeispiele zu Transitivität immer auch solche gegen Prämissenverstärkung,

$$B \succ C \models_{\mathrm{p}} A \wedge B \succ C, \tag{7}$$

sind – wie der Leser anhand der Beispiele nachprüfen sollte.[39] Zum anderen deutet es darauf hin, daß die folgende Sequenz (Vorsichtige Transitivität) gültig ist:

$$A \succ B, A \wedge B \succ C \models_{\mathrm{p}} A \succ C. \tag{8}$$

[38] Nach [2, p. 127]. Vgl. auch [30, p, 48]: “Wenn ich gewinne, bin ich Kandidat”, “Wenn ich kandidiere, verliere ich”.
[39] Es ist klar, daß Transitivität mit Prämissenverstärkung fallen muß. Denn da $A \wedge B \succ A$ gültig ist, wäre der Schluß von $A \succ C$ auf $A \wedge B \succ C$ zulässig, wenn $\succ$ transitiv wäre.

Die Adams-Logik AL. Neben den zwei bisher vorgestellten Beschreibungen der Menge gültiger $\mathfrak{p}$-Folgerungen, gibt Adams [2, Kap. 7] noch eine rein syntaktische Beschreibung der $\mathfrak{p}$-gültigen Folgerungen an. Wir präsentieren dieses System hier etwas anders als in [3], nämlich als als Sequenzenkalkül. (Die Buchstabenetiketten stammen von Adams, die Kurzbeschreibungen sind der neueren Literatur angeglichen.)

Das System **AL** von Adams

A, B, C seien faktische Formeln, $\vdash_0$ sei Ableitbarkeit in der klassischen Logik. X, Y seien endliche Mengen von Formeln und das Komma links von $\Vdash$ deute Vereinigung an (so, daß $X, Y = Y, X$ und $X, X = X$).

Verdünnung $\dfrac{X \Vdash A}{X, Y \Vdash A}$ Schnitt $\dfrac{X \Vdash A \quad \forall B \in X : Y \Vdash B}{Y \Vdash A}$

G. Reflexivität	$A \Vdash A$
LC. Logische Konsequenz	$\dfrac{A \vdash_0 B}{X \Vdash A \succ B}$
CF. $\top$-Ein/-Aus	$\dfrac{X \Vdash A}{X \Vdash \top \succ A} \quad \dfrac{X \Vdash \top \succ A}{X \Vdash A}$
EA. Äquiv. im Antezed.	$\dfrac{A \equiv_0 B \quad X \Vdash A \succ C}{X \Vdash B \succ C}$
RT. Kumulative Trans.	$\dfrac{X \Vdash A \succ B \quad Y \Vdash A \wedge B \succ C}{X, Y \Vdash A \succ C}$
DA. Disj. im Antezed.	$\dfrac{X \Vdash A \succ C \quad Y \Vdash B \succ C}{X, Y \Vdash A \vee B \succ C}$
AR. Vorsichtige Monot.	$\dfrac{X \Vdash A \succ B \quad Y \Vdash A \succ C}{X, Y \Vdash A \wedge B \succ C}$

Der Beweis des folgenden Satzes ist in [3, §7.6] skizziert.

SATZ 12. *Die ableitbaren Sequenzen sind genau die $\mathfrak{p}$-gültigen Folgerungen:* $\models_{\mathfrak{p}} = \Vdash$.

Es folgen einige beispielhafte Herleitungen von Sequenzen und Regeln. Zunächst die "starke Zentrierungs-Sequenz" $A, B \Vdash A \succ B$:

(1)	$A \Vdash A$	G
(2)	$B \Vdash B$	G
(3)	$A \Vdash \top \succ A$	1, CF
(4)	$B \Vdash \top \succ B$	2, CF
(5)	$A, B \Vdash A \wedge \top \succ B$	3,4, AR
(6)	$A, B \Vdash A \succ B$	5, EA

Die Modus Ponens-Regel $\dfrac{X \Vdash A \quad Y \Vdash A \succ B}{X, Y \Vdash B}$:

(1)	$X \Vdash A$	
(2)	$Y \Vdash A \succ B$	
(3)	$X \Vdash \top \succ A$	1, CF
(4)	$Y \Vdash A \wedge \top \succ B$	2, EA
(5)	$X, Y \Vdash \top \succ B$	3,4, RT
(6)	$X, Y \Vdash B$	5, CF

Wenn wir in der Ableitung A für X und $A \succ B$ für Y einsetzen, dann generiert diese die Modus Ponens-Sequenz $A, A \succ B \Vdash B$. Ebenfalls eine Art Modus Ponens drückt die Sequenz $A \succ B \Vdash A \to B$ aus:

(1)	$A \succ B \vdash A \succ B$	G
(2)	$\Vdash A \wedge B \succ (A \to B)$	LC: $A \wedge B \vdash_0 A \to B$
(3)	$A \succ B \Vdash A \succ (A \to B)$	1,2, RT
(4)	$\Vdash \neg A \succ (A \to B)$	LC: $\neg A \vdash_0 A \to B$
(5)	$A \succ B \Vdash A \vee \neg A \succ (A \to B)$	3,4, DA
(6)	$A \succ B \Vdash A \to B$	5, EA: $\top \equiv_0 A \vee \neg A$, CF

Konditionale sind transitiv *via* $\vdash_0$, $\dfrac{X \Vdash A \succ B \quad B \vdash_0 C}{X \Vdash A \succ C}$:

(1)	$X \Vdash A \succ B$	
(2)	$B \vdash_0 C$	
(3)	$A \wedge B \vdash_0 C$	2
(4)	$\Vdash A \wedge B \succ C$	3, LC
(5)	$X \vdash A \succ C$	1,3, RT

Schließlich noch die zu DA "duale" Regel $\dfrac{X \Vdash A \succ B \quad Y \Vdash A \succ C}{X, Y \Vdash A \succ B \wedge C}$:

(1)	$X \Vdash A \succ B$	
(2)	$Y \Vdash A \succ C$	
(3)	$\Vdash B \wedge C \succ B \wedge C$	LC
(4)	$X \Vdash A \wedge C \succ B \wedge C$	1,3, RT
(5)	$X, Y \Vdash A \wedge A \succ B \wedge C$	2,4, RT
(6)	$X, Y \Vdash A \succ B \wedge C$	5, EA

Die entsprechende Sequenz $A \succ B, A \succ C \Vdash A \succ A \wedge B$ wird mit $X = A \succ B$ und $Y = A \succ C$ genauso hergeleitet.

All diese logischen Prinzipien sind uns, wenn auch in etwas anderer Form, aus der Logik der kontrafaktischen Konditionale bekannt. So entsprechen beispielsweise die Sequenzen $A \succ B \Vdash A \to B$ und $A \wedge B \Vdash A \succ B$ in offensichtlicher Weise den Schemata der schwachen bzw. starken Zentrierung, (CW) $A \sqsupset B \to (A \to B)$ und (CS) $A \wedge B \to (A \sqsupset B)$. Die starke Zentrierung, CS, ist das charakteristische Schema für die Logik (VC) der Sphärensysteme. Für Schemata wie (K) $(A \sqsupset (B \to C)) \to ((A \sqsupset B) \to (A \sqsupset C))$ dagegen können wir keine entsprechende Sequenz erwarten, denn $\sqsupset$-Formeln simulierende $\succ$-Formeln können ja nicht Teil komplexerer Formeln sein. Mit dieser Einschränkung stellen wir so eine weitgehende

Übereinstimmung in den logischen Prinzipien für kontrafaktische und indikativische Konditionale fest. Tatsächlich ist die Übereinstimmung vollkommen, wie der nächste Satz zeigt.

Es sei $\models_S$ sie Relation gültiger Folgerung in Sphärenmodellen (oder den entsprechenden variabel relationalen Modellen).

> $X \models_S A$ gdw in beliebigen Sphärenmodellen gilt: An jedem Punkt, der alle Formeln in X wahr macht, ist auch A wahr.

Es sei $\mathrm{FML}^{\sqsupset}$ die Menge der Formeln einer Sprache mit kontrafaktischen Konditionalen; $\mathrm{FML}^{\succ}$ ist, wie auf p. 238 definiert, die Formelmenge einer Sprache mit indikativischen Konditionalen. Die Formeln in $\mathrm{FML}^{\sqsupset}$ können verschachtelte Konditionale enthalten; die in $\mathrm{FML}^{\succ}$ sind allesamt "flach", d.h. rein faktisch oder von der Form $A \succ B$ mit A und B faktisch. Um hier auf einen gemeinsamen Nenner zu kommen, betrachten wir das flache Fragment von $\mathrm{FML}^{\sqsupset}$, bestehend aus rein wahrheitsfunktionalen Formeln oder solchen der Form $A \sqsupset B$ mit A und B wahrheitsfunktional. Das flache Fragment von $\mathrm{FML}^{\sqsupset}$ unterscheidet sich von $\mathrm{FML}^{\succ}$ nur noch in der Bezeichnung des Konditionals – hier $\succ$, dort $\sqsupset$. Diesen typographischen Unterschied wollen wir vernachlässigen und einfach von "flachen Formeln" sprechen.

Satz 13. (Stalnaker [45].) *Es sei X eine Menge flacher Formeln und A eine flache Formel. Dann $X \models_S A$ gdw $X \models_{\mathrm{P}} A$, und $X \vdash_{\mathbf{VC}} A$ gdw $X \Vdash A$.*

10. Rückblick: Die Logik der Konditionale

Der letzte Satz hält ein erstaunliches Resultat fest. Haben wir nicht gesagt, daß sich kontrafaktische und indikativische Konditionale semantisch grundlegend unterscheiden? Die einen sind mögliche Welten-Konditionale, die anderen sind es nicht. Folgerung wurde für die einen über Sphären (oder variabel relationale Modelle) definiert, für die anderen über Wahrscheinlichkeitsfunktionen. Die Modellierungen könnten kaum weiter auseinanderliegen – und doch koinzidieren sie am Ende im Hinblick auf die als gültig ausgezeichneten Folgerungen (im flachen Fragment der Sprache).

Warum sind die logischen Prinzipien für kontrafaktische und indikativische Konditionale einander so ähnlich, ja stimmen vielleicht sogar völlig überein? Sicher gibt es Unterschiede zwischen Wahrscheinlichkeitschließen einerseits und Schlüssen andererseits, die sich aus der Betrachtung einander ähnelnder Welten ergeben. Aber offenbar gibt es eine Stufe der Abstraktion, bei der diese Unterschiede verschwinden und nur noch Gemeinsames im Blick bleibt. Einen erster Hinweis auf eine enge struturelle Ähnlichkeit geben die Bedingungen für Wahrheit bzw. hohe Wahrscheinlichkeit der Konditionale.

$\sqsupset$: An einem Punkt a ist $A \sqsupset B$ wahr, wenn B wahr ist in einem Bereich minimal von a abweichenden Punkte, an denen die Annahme A gilt:
$I(A \sqsupset B, a) = 1$ gdw $R_{[\![A]\!]}(a) \subseteq [\![B]\!]$.

$\succ$: Unter einer Funktion p ist $A \succ B$ hochwahrscheinlich (h), wenn B hochwahrscheinlich ist unter einer minimal von p abweichenden Funktion, die unter der Annahme A steht:
$\mathrm{p}(A \succ B) \approx h$ gdw $\mathrm{p}_A(B) \approx h$.

Das gemeinsame Schlüsselelement ist offenbar die *minimal Abweichung* von einem Ausgangspunkt so, daß das Antezedens des Konditionals wahr bzw. den Maximalwert 1 hat. Zwar sind die Ausgangspunkte sehr verschieden – hier Wahrheitswertverteilungen, dort Wahrscheinlichkeitsverteilungen – aber der Effekt ist schließlich derselbe: Dadurch, daß nicht jede, sondern nur bevorzugte Alternativen betrachtet werden, werden bestimmte Annahmen konstant gehalten, die nun gemeinsam mit dem Antezedens – im Erfolgsfall – das Konsequens erzwingen (d.h.seine Wahrheit bzw. hohe Wahrscheinlichkeit). Ohne diese Zusatzannahmen wäre das Antezedens nicht hinreichend für das Konsequens. Dabei kann eine Verstärkung des Antezedens dazu führen, daß die für das Konsequens nötigen Zusatzannahmen außer Kraft gesetzt werden. Das erklärt die Nichtmonotonie im Antezedens, d.h. die Ungültigkeit des Schlusses von $A \sqsupset B$ auf $A \wedge C \to B$ bzw. von $A \succ B$ auf $A \wedge C \succ B$, sowie die von weiteren Schlußfiguren.

Soweit die allgemeine Erklärung, warum kontrafaktischen und indikativische Konditionale auf der Ebene ihrer logischen Eigenschaften einander sehr ähnlich sind. Obwohl die Erklärung einfach ist, stellen sich genauere Nachweise der engen Beziehung zwischen den beiden Arten von Konditionalen – d.h. Repräsentationsresultate für verschiedene Modellierungen – als recht aufwendig dar. Das gilt auch für den Beweis von Satz 13. Oft laufen solcher Abbildungen über die Theorie der Theorienrevision, die wir in einem späteren Kapitel behandeln werden. Das liegt daran, daß die Operation der Revision (einer Theorie) im wesentlichen die Operation eines minimalen Eingriff ist. So thematisiert die Theorie der Theorienrevision das wichtigste Modellierungselement der Konditionallogik.[40] Das gilt ebenso – wie wir sehen werden – für eine weitere logische Theorie, die eng mit der Konditionallogik verwandt ist: die Theorie anfechbaren (oder nicht-monotonen) Schließens.

Literatur

[1] ADAMS, E. *The Logic of Conditionals.* Reidel, Dordrecht, 1975.

[2] ADAMS, E. Four probability-preserving properties of inferences. *Journal of Philosophical Logic 25* (1996), 1–24.

[40] Hinter der Rede von einer "minimalen Abweichung" versteckt sich tatsächlich eine ganze Familie von Relationen; vgl dazu insbesondere [40].

[3] Adams, E. *A Primer of Probabilistic Logic.* CSLI Publications, Stanford, 1998.

[4] Appiah, A. *Assertion and Conditionals.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[5] Arló-Costa, H. L. The logic of conditionals. In Zalta [49].

[6] Bennett, J. *A Philosophical Guide to Conditionals.* Clarendon Press, Oxford, 2003.

[7] Blackburn, P., Rijke, M. d., and Venema, Y. *Modal logic, 3rd reprint. with corr.*, vol. 53 of *Cambridge tracts in theoretical computer science.* Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[8] Brogaard, B., and Salerno, J. Remarks on counterpossibles. *Synthese* (2013), 639–660.

[9] Burgess, J. P. *Philosophical Logic.* Princeton University Press, Princeton–Oxford, 2009.

[10] Chagrov, A., and Zakharyaschev, M. *Modal Logic*, vol. 35 of *Oxford Logic Guides.* Oxford University Press, Oxford, 1997.

[11] Chellas, B. F. Basic conditional logic. *Journal of Philosophical Logic 4* (1975), 133–153.

[12] Chellas, B. F. *Modal Logic: An Introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[13] Davis, W. Implicature. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, Ed., spring 2013 ed. 2013.

[14] Edgington, D. On conditionals. *Mind 104* (1995), 235–329.

[15] Edgington, D. Conditionals. In Goble [20], pp. 385–414.

[16] Edgington, D. Indicative conditionals. In Zalta [49].

[17] Ellis, B. Two theories of indicative conditionals. *Australasian Journal of Philosophy 62* (1984), 50–66.

[18] Fuhrmann, A., and Mares, E. D. A relevant theory of conditionals. *Journal of Philosophical Logic 24* (1995), 645–665.

[19] Gibbard, A. Two recent theories of conditionals. In Harper et al. [23].

[20] Goble, L., Ed. *The Blackwell Guide to Philosophical Logic.* Blackwell, Oxford, 2001.

[21] Grice, P. Logic and conversation. In *Syntax and semantics. Vol. 3: Speech Acts*, P. Cole and J. Morgan, Eds. Academic Press, New York, 1975, pp. 41–58.

[22] Grice, P. *Studies in the Ways of Words.* Harvard University Press, Harvard, 1989.

[23] Harper, W., Stalnaker, R., and Pearce, G., Eds. *Ifs: Conditionals, Belief, Decision, Chance, and Time.* Reidel, Dordrecht, 1981.

[24] Hájek, A. Probabilities of conditionals revisited. *Journal of Philosophical Logic 18* (1989), 423–428.

[25] Hájek, A. Probability, Logic, and Probability Logic. In Goble [20].

[26] Hájek, A. The Fall of Adams Thesis? *Journal of Logic, Language and Information 21*, 2 (2012), 145–161.

[27] Humberstone, L. *The Connectives.* MIT Press, Cambridge Mass., 2011.

[28] Jackson, F. On assertion and indicative conditionals. *Philosophical Review 88* (1979), 565–589; also in [32].

[29] Jackson, F. Conditionals and Possibilia. *Proceedings of the Aristotelian Society 81* (1980), pp. 125–137.

[30] Jackson, F. *Conditionals.* Blackwell, Oxford, 1987.

[31] Jackson, F., Ed. *Conditionals.* Oxford University Press, Oxford, 1991.

[32] Jackson, F. *Mind, Matter and Conditionals.* Routledge, London, 1998.

[33] Jackson, F. Postscript on truth conditions and assertability. In *Mind, Matter and Conditionals* [32], pp. 51 – 54.

[34] Kyburg, H. E. Probability, rationality, and the rule of detachment. In *Proceedings of the 1964 International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science*, Y. Bar-Hillel, Ed. North-Holland, Amsterdam, 1965, pp. 301–310.

[35] Lewis, D. K. *Counterfactuals.* Blackwell, Oxford, 1973.

[36] Lewis, D. K. Probabilities of conditionals and conditional probabilities. *The Philosophical Review 85* (1976), 297–315.

[37] Lewis, D. K. Attitudes de dicto and de se. *The Philosophical Review 88* (1979).

[38] Lewis, D. K. Postsript to "Probabilities of conditionals and conditional probabilities". In *Philosophical Papers II.* Oxford University Press, Oxford, 1986, pp. 152–156.

[39] Lewis, D. K. Probabilities of conditionals and conditional probabilities II. *The Philosophical Review 95* (1986), 581–589.

[40] Makinson, D. Five faces of minimality. *Studia Logica 52* (1993), 339–379.

[41] Quine, W. *Methods of Logic.* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1950.

[42] Ramsey, F. P. *The Foundations of Mathematics.* Routledge and Kegan Paul, Oxford, 1931.

[43] Read, S. L. *Thinking About Logic.* Oxford University Press, Oxford, 1994.

[44] Segerberg, K. Notes on conditional logic. *Studia Logica 48* (1989), 157–168.

[45] Stalnaker, R. Probability and conditionals. *Philosophy of Science 37* (1970), 64–80.

[46] Stalnaker, R. A defense of Conditional Excluded Middle. In Harper et al. [23], pp. 87–104.

[47] Stalnaker, R. Nonmonotonic consequence relations. *Fundamenta Informaticae 21* (1994), 7–21.

[48] Stalnaker, R. C. A theory of conditionals. In Harper et al. [23], pp. 41–55.

[49] Zalta, E. N., Ed. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Metaphysics Research Lab, Stanford University, Stanford.