3.5. Themenblock „Nichtlineare Dynamik I - Chaotisches Verhalten einfacher physikalischer Systeme“

	Schritte	Materialien
1.	**Charakteristika laminarer und turbulenter Strömungen** • Eine Zusammenfassung der ersten vier Themenblöcke	***Ergänzungen:*** ***Film „Characteristics of laminar and turbulent flow“*** (25 Min, Ton), leihbar beim Institut für den wissenschaftlichen Film IWF, Nonnenstieg 72, 37075 Göttingen, Bestellnr. W 1071 ***Film „Turbulence“*** (28 Min., Ton) leihbar bei IWF, Bestellnr. W 1135 ***Film „Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung“*** (11 Min.), leihbar bei IWF, Bestellnr. W 1135
2.	**Der „Laplacesche Dämon” - Die Grenzen der absoluten Vorhersagbarkeit der Newtonschen Mechanik** • Newtonsche Mechanik - Ist eine absolute Vorhersage möglich? • Die starke und schwache Kausalität • Die sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen am Beispiel des Magnetpendels.	***Demonstration „Ball“:*** Ball ***Versuch“ Magnetpendel“:*** 3 Magnete, kleine Eisenkugel (je schwächer die Magnete, desto kleiner sollte die Kugel sein), Stativmaterial, Sekundenkleber, 2 Glasplatten, Eisenfeilspäne, evtl. Material für Startvorrichtungen
3.	**Lineare und nichtlineare Kraftgesetze. Welche Folgen hat die Nichtlinearität der Bewegungsgleichung für das Verhalten des Systems?** Das ebene Schwerependel für kleine und große Auslenkwinkel Der „Chaosmann“, das Mehrfachpendel Charakteristika linearer und nichtlinearer Systeme	***Versuch „Chaosmann”:*** Mehrfachpendel, z.B. der „Chaosmann” (erhältlich bei der Physikboutique, Stark Verlag, Pf: 1852, 85318 Freising, 42,90 DM)

	Schritte	Materialien
4.	**Welche Gemeinsamkeiten bestehen zwischen den einfachen nichtlinearen Systemen und der turbulenten Flüssigkeitsbewegung?** Gemeinsame Eigenschaften einer turbulenten Strömung und des Magnetpendels. Wo ist die Grundgleichung der Strömungsdynamik nichtlinear?	

Ergänzende Literatur zum deterministischen Chaos: *ARGYRIS 1994, KUHN 1992, DEKER 1983, SCHUSTER 1994.*

3.5.1. Charakteristika laminarer und turbulenter Strömungen

VORBEMERKUNGEN

Die ersten vier Themenblöcke des Inhaltsbereichs „Strömungen” befassen sich vor allem mit Themen der traditionellen Strömungsdynamik, wie der Entstehung von Wirbeln, den Helmholtzschen Wirbelsätzen und der eindimensionalen Eulergleichung. Der in verschiedenen Blöcken thematisierte Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung stellt ein Grenzthema zwischen der traditionellen Strömungsphysik und der nichtlinearen Dynamik dar. Letztere ist eines der aktuellsten Arbeitsgebiete der Physik, das u.a. nach Erklärungskonzepten für bisher ungelöste strömungsdynamische Probleme, wie z.B. Musterbildungsprozessen in Flüssigkeiten sucht.

Bevor die nichtlineare Dynamik im Mittelpunkt stehen wird, soll im ersten Teil dieses Themenblocks zunächst durch eine Gegenüberstellung von laminarer und turbulenter Strömung ein Resümee der bisherigen Themen gezogen werden.

LEHR-UND LERNZIELE

Die Schülerinnen, Schüler und Studierenden sollen

- die Resultate der letzten Themenblöcke zusammenfassen und ihre Beobachtungen der laminaren oder turbulenten Strömungsform zuordnen können.

AUSFÜHRUNG

Charakteristika	**Laminare Strömung**	**Turbulente Strömung**
Bewegungsverlauf	Glatt. Wenn Wirbel vorhanden sind, sind diese stationär oder lösen sich periodisch ab.	Ungeordnet. Bewegung nicht mehr stationär. Flüssigkeitsteilchen wirbeln wild durcheinander.
Mischverhalten	Flüssigkeit strömt in parallelen Schichten, die sich nicht vermischen. **Molekulare Diffusion**, d.h. Transport von Impuls, Energie usw. quer zur Hauptströmungsrichtung nur durch die mikroskopische Bewegung der Teilchen => ineffektiv.	Bewegungen quer zur Hauptströmungsrichtung. Dadurch rascher Ausgleich von Temperatur- oder Konzentrationsunterschieden usw. **Turbulente Diffusion**, d.h. ganze Flüssigkeitsvolumina werden bewegt. => um Faktor 10^4 effektiver als molekulare Diffusion.
Geschwindigkeitsprofil bei der Durchströmung eines Rohrs	Profil hat die Form eines Paraboloids.	Profil wird wegen des Transports von Impuls quer zur Hauptströmungsrichtung flacher.
Druckverhältnisse bei der Umströmung eines Körpers	Bei symmetrischer Umströmung: gleicher Druck vor und hinter dem Körper. Sobald sich Wirbel ausbilden: Vor dem Körper ist der Druck größer als hinter ihm.	
Strömungswiderstand	Wird durch die Reibung zwischen den einzelnen Flüssigkeitsschichten verursacht. Nach dem Stokesschen Gesetz gilt: $F \sim v$. Bei Wirbelbildung vergrößert sich der Widerstand.	Steigt mit wachsender Reynoldszahl an, da sich die Anzahl der sich ablösenden Wirbel und die Breite des Totwassergebiet vergrößert. Es gilt $F \sim v^2$. Der Widerstandsbeiwert c_w fällt bei sehr hohen Reynoldszahlen (Re ca. 10^6) plötzlich ab, weil das Totwassergebiet schlanker wird und die Grenzschicht länger am Körper haftet. Danach steigt er langsam wieder an.
Berechenbarkeit	Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens ist vorhersagbar. Die Strömung läßt sich für jeden zukünftigen Zeitpunkt berechnen.	Bewegung eines Teilchens ist nicht vorhersagbar, scheinbar willkürlich. Die Bewegung ist weder räumlich noch zeitlich stationär.
Übergang von laminar zu turbulent	Abhängig von der Geometrie und von den Eigenschaften des Fluids und der Strömung: Rohrdurchströmung: $Re_{krit} = 2300$ Umströmter Zylinder: $Re_{krit} = 10^4$	

Tabelle 5.1: Vergleich einer laminaren mit einer turbulenten Strömung

3.5.2 Der „Laplacesche Dämon” - Die Grenzen der absoluten Vorhersagbarkeit der Newtonschen Mechanik

VORBEMERKUNGEN

Bei vielen physikalischen Systemen ist die Linearisierung ein wichtiges mathematisches Handwerkszeug, um diese Systeme überhaupt berechnen zu können. Die Tatsache, daß Linearisierungen nur unter bestimmten Voraussetzungen anwendbar sind, fällt oft unter den Tisch. Bei den Lernenden entsteht so der Eindruck, als ob alle physikalischen Systeme berechenbar und damit auch vorhersagbar seien.

Ist eine absolute Vorhersagbarkeit des Verhaltens physikalischer Systeme überhaupt möglich? Diese Frage, die in der Physikgeschichte in der Schaffung des allwissenden „Laplaceschen Dämons” gipfelte, steht am Anfang dieses Unterrichtsteils. Er hat zum Ziel, das lineare Weltbild der Lernenden zu erweitern und Schlüsselbegriffe der nichtlinearen Dynamik, wie „starke und schwache Kausalität” und die „sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen” einzuführen. Dafür wenden wir uns für ein paar Stunden von den Flüssigkeitssystemen ab und beschäftigen uns mit einfacheren Systemen, die weniger Freiheitsgrade besitzen. Für eine Einführung ist das Magnetpendel vorgesehen, das mit seinen unvorhersagbaren Bewegungen Anlaß zum Staunen gibt und den Schülerinnen, Schülern und Studierenden zeigt, daß Systeme nicht so hochkomplex wie Flüssigkeitssysteme sein müssen, um unvorhersagbares Verhalten zu zeigen. Auch schon bei einfachen Systemen können unter bestimmten Bedingungen langfristige Vorhersagen über das Systemverhalten nicht mehr gemacht werden.

Es hinterläßt den stärksten Eindruck bei Lernenden, wenn sie das Magnetpendel in Gruppen selbst bauen (mit Büromagneten und kleinen Eisenkügelchen ist das preiswert möglich). Sollte dies im Unterricht zu viel Zeit beanspruchen, kann das Pendelverhalten gemeinsam mit der ganzen Klasse am Overhead-Projektor untersucht werden. Die Trennungslinien zwischen den Anziehungsbereichen der Magnete können in beiden Versuchsanordnungen durch aufgestreute Eisenfeilspäne visualisiert werden.

Am IPN in Kiel entwickelte eine Arbeitsgruppe um R. Duit und M. Komorek eine Unterrichtseinheit zum Magnetpendel für die Sekundarstufe I. Dabei verwendeten sie verschiedene Lernhilfen wie die sog. „Berggratanalogie”, eine selbst entwickelte „Chaosschüssel” und das Computerprogramm „Magpen“, das beim IPN bestellt werden kann. Erfahrungen mit der Unterrichtseinheit wurden mehrfach veröffentlicht (z.B. KOMOREK et al. 1993, DUIT et al. 1995).

LEHR- UND LERNZIELE

Die Schülerinnen, Schüler und Studierenden sollen

- sich anhand einfacher physikalischer Systeme den Begriff des „Determinismus“ vergegenwärtigen.
- den „Laplaceschen Dämon“ als Zuspitzung des mechanistischen Weltbilds Newtons, als Symbol für die Vorhersagbarkeit allen Geschehens in der Welt und dessen Relativierung im Lauf der Physikgeschichte kennenlernen.
- die „starke“ und die „schwache Kausalität“ und deren Bedeutung in der Physik diskutieren können.
- das Magnetpendel als ein Beispiel, bei dem die starke Kausalität nicht mehr in allen Bereichen gilt, kennenlernen.
- die sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen erkennen.
- erkennen, daß Unvorhersagbarkeit nicht nur bei komplexen Systemen auftritt, die aus vielen wechselwirkenden Teilchen bestehen, sondern auch bei einfachen nichtlinearen Systemen.

AUSFÜHRUNG

Im Vergleich zur laminaren Strömung erscheint die turbulente Bewegung willkürlich, denn es ist nicht vorhersagbar, wie sich ein Flüssigkeitsteilchen im nächsten Augenblick bewegen wird. Schon Galileo Galilei (1564-1642) bemerkte über die Bewegung des Wassers:

„Ich habe weniger Schwierigkeiten in der Bewegung der Himmelskörper gefunden, ungeachtet ihrer erstaunlichen Entfernung, als in den Untersuchungen über die Bewegung des fließenden Wassers, die doch unter unseren Augen vor sich geht.“

Tatsächlich gilt die Turbulenz auch heute noch als eines der schwierigsten Gebiete in der Physik. Viele große Physiker, wie Heisenberg, von Weizsäcker oder Landau beschäftigten sich mit der Entstehung und der mathematischen Beschreibung der Turbulenz. Die allgemeinen Grundgleichungen für laminare und turbulente Flüssigkeitsbewegungen wurden schon 1822 bzw. 1845 von L. Navier und G. Stokes aufgestellt und nach ihren Entdeckern „Navier-Stokes-Gleichungen“ genannt. Obwohl inzwischen 150 Jahre vergangen sind, ist bis heute keine allgemeingültige analytische Lösung der Bewegungsgleichungen bekannt. Lediglich Spezialfälle, wie die Teilchenbewegung in laminaren Strömungen, lassen sich analytisch lösen.

Die Bewegung der Teilchen in der turbulenten Strömung ist besonders kompliziert, da sie sich sowohl zeitlich, als auch räumlich auf unvorhersagbare Weise ändert. D.h., es ist weder vorherzusagen, wo sich ein Teilchen im nächsten Moment befindet, noch wie sich die Teilchen an einem festen Ort im Laufe der Zeit verhalten. Man spricht im Fall der Turbulenz von einem „raum-zeitlichen Chaos“.

Unvorhersagbares Verhalten zeigen nicht nur solche hochkomplexen Systeme mit sehr vielen beteiligten Teilchen, sondern auch wesentlich einfachere dynamische Systeme.

Newtonsche Mechanik - Ist eine absolute Vorhersagbarkeit möglich?

Isaac Newton veröffentlichte 1687 in seiner Abhandlung „Philosophiae naturalis principia mathematica“, die nach ihm benannten universellen Gesetze, die die Grundlagen der klassischen Mechanik bilden. Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen der Kraft, die auf einen Körper wirkt, und dessen Beschleunigung.

Lange Zeit war man der Meinung, daß mit Hilfe dieses Werkzeugs alles Geschehen in der Welt, zumindest im Prinzip, berechenbar sei. Nach Newton lassen sich alle Prozesse in der Natur in Bewegungsgleichungen fassen. Es handelt sich dabei um Differentialgleichungen, die Variable mit ihren zeitlichen Veränderungen verknüpfen.

Ein Beispiel ist die Bewegungsgleichung eines reibungsfreien Federpendels:

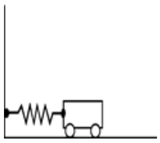

Abb. 5.1: Federpendel

$$\boxed{F = ma = Dx}$$

Hookesches Gesetz

a = Beschleunigung
m = Masse
D = Federkonstante
x = Auslenkung

Es handelt sich hier um ein **lineares Kraftgesetz,** denn die Kraft ist direkt proportional zur Auslenkung.

Mit $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ und $\varpi = \sqrt{\frac{D}{m}}$ erhält man die Bewegungsgleichung des Pendels:

$$\ddot{x} + \varpi_0^2 x = 0 \qquad \varpi = \text{Kreisfrequenz}$$

Differentialgleichungen können durch Integration gelöst werden, in schwierigen Fällen durch numerische Integration, d.h. durch schrittweises Herantasten an die Lösung. In unserem Fall ist die Lösung einfach zu finden:

Auslenkung:	$x(t) = A\cos\varpi t$	harmonische Schwingung
Geschwindigkeit:	$\dot{x}(t) = -A\varpi\sin\varpi t$	
Beschleunigung:	$\ddot{x}(t) = -\varpi^2(A\cos\varpi t) = -\varpi^2 x(t)$	

Wenn der Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt t_0 gegeben ist, d.h. wenn der Ort $x(t_0)$ und die Geschwindigkeit $\dot{x}(t_0)$ bekannt sind, kann die Bewegung des Pendels für jeden anderen beliebigen Zeitpunkt bestimmt werden. Ein solches System, dessen Zukunft durch die genaue Kenntnis seines Zustandes zu einem beliebigen Augenblick t_0 vorausbestimmt werden kann, nennt man „deterministisch”.

Determinismus: Die zeitliche Entwicklung eines Systems läßt sich bei genauer Kenntnis des Systemzustands zu einem bestimmten Zeitpunkt vorhersagen.

Beim Federpendel gilt die lineare Beziehung zwischen der Kraft und der Auslenkung allerdings nur für einen kleinen Bereich der Auslenkung. Die Feder zeigt bei Überdehnung oder starker Stauchung kein lineares Verhalten mehr. Im mittleren Bereich der Ausdehnung allerdings beschreiben die Lösungen der Bewegungsgleichung das Pendelverhalten sehr genau.

Der Grund für den großen Erfolg der Newtonschen Mechanik ist ihre universelle Anwendbarkeit. Sie beschreibt sowohl Planetenbewegungen, als auch den Fall des sprichwörtlichen newtonschen Apfels. Das schürte bei den Physikern den Glauben, daß jeder Prozess für alle Zeit prinzipiell berechenbar sei, wenn nur der Systemzustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt ist. Das heißt, auch bisher nicht vorhersagbare Systeme, wie das Wetter, wären im Prinzip berechenbar, wenn genügend Informationen zur Verfügung stünden.

Der französische Mathematiker Pierre Simon de Laplace dachte diese Idee Newtons zu Ende und schuf den sog. **„Laplaceschen Dämon“;** eine Art Überwesen, das nur den Zustand aller Materieteilchen des Universums zu einer bestimmten Zeit wissen muß, um die Zukunft und die Vergangenheit des gesamten Universums bestimmen zu können: *„Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennte, durch welche die Natur belebt wird, und die entsprechende Lage aller Teile, aus denen sie zusammengesetzt ist, und die darüber hinaus breit genug wäre, um alle diese Daten einer Analyse zu unterziehen, würde in derselben Form die Bewegung der größten Körper des Universums und die des kleinsten Atoms umfassen. Für sie wäre nichts ungewiß, und die Zukunft ebenso wie die Vergangenheit wäre in ihren Augen gegenwärtig.” (LAPLACE 1841)*

Dieses mechanistische Weltbild Newtons wurde in diesem Jahrhundert durch zwei grundlegende, neue physikalische Theorien eingeschränkt, durch die Quantentheorie und die nichtlineare Dynamik:

a. <u>Erschütterung des mechanistischen Weltbilds durch die Quantenmechanik</u>

1927 formulierte Werner Heisenberg die sog. „Unbestimmtheitsrelation“, die besagt, daß nur der Ort oder der Impuls eines Teilchens zur gleichen Zeit genau bestimmt werden kann.

Die Unbestimmtheitsrelation legt durch das Plancksche Wirkungsquantum die grundsätzliche Grenze der Meßgenauigkeit fest. In makroskopischen Systemen ist dieser Effekt vernachlässigbar, aber im mikroskopischen Bereich spielt er eine wichtige Rolle: Die Kenntnis von Ort und Impuls eines Teilchens reichen aus, um seine Bahn vollständig zu bestimmen. Wenn diese Größen jedoch nicht gleichzeitig genau bestimmt werden können, ist es auch nicht möglich, die Teilchenbahn genau vorherzusagen.

Viele Physiker, unter ihnen auch Einstein, empfanden diese prinzipielle Indeterminiertheit als eine Unkenntnis des Zustandes und konnten sich mit diesem Prinzip nicht abfinden. Es hat ihr gesamtes Weltbild, das auf der klassischen Physik beruhte, durcheinandergeworfen. Von Einstein stammt in diesem Zusammenhang der berühmte Satz: *„Gott würfelt nicht“.* Lange

Zeit waren Physiker der Meinung, daß sich diese Indeterminiertheit durch das Prinzip der Unbestimmtheit nur auf die atomare Welt auswirkt, für die makroskopische Welt aber alles beim Alten bleibt.

b. Erschütterung des mechanistischen Weltbilds durch die nichtlineare Dynamik

Die Gesetze der Newtonschen Mechanik verknüpfen Ursache und Wirkung miteinander. Diese Verknüpfung nennt man einen „kausalen Zusammenhang".

Kausalität: Stellt einen Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung her.

Bei mechanischen Systemen beschreiben die Newtonschen Gesetze diesen Zusammenhang.

Demonstration: Ball gegenseitig zuwerfen. Dabei soll versucht werden, zweimal das gleiche Ziel zu treffen.

Die Bahn eines Balls läßt sich mit Hilfe der Newtonschen Mechanik berechnen, wenn die Anfangsbedingungen und die Kräfte, die auf diesen Ball wirken, bekannt sind. Werden immer wieder dieselben Anfangsbedingungen gewählt und wirken immer dieselben Kräfte auf den Ball, muß er sich nach der Newtonschen Dynamik immer auf dieselbe Art und Weise bewegen und dasselbe Ziel treffen. Die Tatsache, daß die gleiche Ursache auch immer die gleiche Wirkung hervorruft, nennt man die „schwache Kausalität" oder „gleiche Kausalität".

Prinzip der schwachen (gleichen) Kausalität: Gleiche Ursachen rufen gleiche Wirkungen hervor.

In der Praxis verlangt die Physik nicht nach absolut genauen Versuchsbedingungen, vielmehr lehrt uns die Erfahrung, daß wir exakt gleiche Anfangsbedingungen nie mehrfach nacheinander herstellen können. Trotzdem erhalten wir meist Versuchsergebnisse mit einer guten Reproduzierbarkeit. Trotz der Abweichungen kann dann aufgrund der Ergebnisse auf eine allgemeine Gesetzmäßigkeit geschlossen werden. Für den geworfenen Ball bedeutet das: Ihn zweimal auf die genau gleiche Weise zu werfen, ist nicht möglich. Die einwirkenden Kräfte, ebenso Ort und Geschwindigkeit am Anfang der Bewegung werden ein wenig variieren. Obwohl sich die Bedingungen für den zweiten Wurf von den Bedingungen des ersten etwas unterscheiden, wird der Ball sein Ziel nur um ein kleines Stück verfehlen. Das Prinzip dieses Verhaltens nennt man „starke Kausalität" oder „ähnliche Kausalität". Es besagt, daß ähnliche Ursachen auch ähnliche Wirkungen hervorrufen. Kleine Veränderungen im Anfangszustand des Systems haben auch nur kleine Veränderungen im Endzustand zur Folge. Ohne dieses Prinzip der starken Kausalität wären viele alltägliche Handgriffe, wie z.B. das Autofahren, nicht möglich. Der geworfene Ball erfüllt sowohl das Prinzip der schwachen, wie auch das Prinzip der starken Kausalität. Die schwache Kausalität stellt, mit der Forderung nach den exakt gleichen Anfangsbedingungen wie auch schon der Name sagt, eine schwächere Bedingung an das System als die starke Kausalität.

Prinzip der starken (ähnlichen) Kausalität: Ähnliche Ursachen rufen auch ähnliche Wirkungen hervor.

Das Magnetpendel - Eine Ausnahme, um die Regel zu bestätigen?

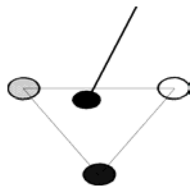

Abb. 5.2: Magnetpendel

Versuch Magnetpendel: Drei Magnete werden jeweils an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks auf eine Platte, einen stabilen Karton oder einfach auf den Tisch geklebt. Die Magnete zeigen mit demselben Pol nach oben. Der Versuch kann am Overhead-Projektor, unter Verwendung einer Glasplatte, vorgeführt werden. Eine kleine Eisenkugel, die umso kleiner sein sollte, je schwächer die Magnete sind, wird genau über der Mitte des Dreiecks aufgehängt.

Läßt man das Pendel nun im Feld der drei Magnete schwingen, wird es einerseits durch die Schwerkraft, andererseits durch die Kraftwirkung der Magnete beeinflußt. Am Anfang zeigt das Pendel durchaus periodische Bewegungsmuster. Wenn wir uns aber gerade an die Regelmäßigkeit gewöhnt haben und nichts Neues mehr erwarten, verändert sich das Pendelverhalten: Es schwingt plötzlich in eine neue Richtung um. Immer wieder verändert es im Lauf der Pendelbewegung sein Bewegungsmuster willkürlich. In der Bewegung ist keine Regelmäßigkeit zu erkennen. Erst wenn die Schwingung aufgrund der Luftreibung kleinräumiger geworden ist, wird das Pendel von einem der drei Magnete eingefangen.

Nach dem Prinzip der starken Kausalität sollte das Pendel auch dann ähnliche Bewegungen zeigen, wenn es von dicht benachbarten Startpunkten losgelassen wird. Aber selbst unter Zuhilfenahme von Startvorrichtungen, wie z.B. einem Elektromagneten, können die Anfangsbedingungen nicht so genau präpariert werden, daß das Pendel mehrfach hintereinander die gleiche Bahn zieht und dann auch immer am gleichen Magneten endet. Weder die Bahn des Pendels, noch sein Zielmagnet ist vorhersagbar.

Wie ist das Verhalten des Pendels zu erklären?

Das Pendel schwingt im Feld der drei Magnete und wird von allen angezogen. Während der Schwingung verliert es aufgrund von Reibung Energie und kommt nach einiger Zeit über einem der Magneten zur Ruhe. Jeder dieser Magnete ist also eine sog. „Ruhelage“ des Pendels.

Ruhelagen sind dadurch charakterisiert, dass sich der Zustand des Systems (im Fall des Pendels Ort und Geschwindigkeit) nicht verändert.

Genau auf einer Linie zwischen jeweils zwei Magneten heben sich deren anziehende Kräfte auf. Die Linien laufen in der Mitte des Dreiecks zusammen, hier heben sich die Kräfte aller drei Magneten auf. Diese Linien können - auch am Overhead-Projektor - ausgezeichnet mit Hilfe von Eisenfeilspänen sichtbar gemacht werden.

Es wäre also auch möglich, daß das Pendel in der Mitte zur Ruhe kommt und einfach senkrecht nach unten hängt. Dies ist die vierte Ruhelage des Pendels.

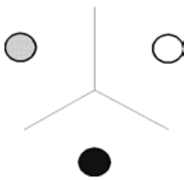

Abb. 5.3: Auf den Linien zwischen den Magneten heben sich deren Kräfte auf

Das Pendel besitzt vier Ruhelagen: Über jedem der drei Magnete und genau über dem Mittelpunkt zwischen den Magneten.

Beim Experimentieren sieht man sofort, daß die Ruhelagen sich in ihrer Qualität unterscheiden: Kommt das Pendel über einem der Magneten zur Ruhe, wird es auch bei kleinen Störungen dort verharren. Schwebt es aber über der Ruhelage in der Mitte, reicht eine winzige Störung aus, um es abzulenken und seine Bewegung endet schließlich über einem der drei Magnete. Aus diesem Grund nennt man die drei Ruhelagen über den Magneten „stabil" und die Ruhelage in der Mitte „instabil".

Stabile Ruhelage:	Auch bei kleinen Störungen bleibt das Pendel in dieser Ruhelage.
Instabile Ruhelage:	Kleinste Störungen bewirken, daß das Pendel sich aus der Ruhelage entfernt.

Läßt man das Pendel genau über einer der Linien zwischen zwei Magneten schwingen, heben sich deren magnetische Kräfte auf, nur der dritte Magnet zieht den Pendelkörper an. Aus diesem Grund müßte das Pendel ganz gleichmäßig periodisch schwingen.

Anfangs verhält sich das Pendel wie erwartet. Nach kurzer Zeit aber beginnt es von der vorgegebenen Bahn abzuweichen. Schon kleinste Störungen genügen, um das Pendel zu der einen oder anderen Seite jenseits der Linie auszulenken. Hat sich das Pendel erst einmal von der Linie wegbewegt, wird es von einem Magneten stärker angezogen als von dem anderen, schwingt von ihm wieder weg und wird von einem anderen Magneten angezogen, usw. Aus der vorhersagbaren Bahn wird eine nicht mehr vorhersagbare.

Auf den Grenzlinien zwischen Anziehungsbereichen der Magnete entscheiden zufällige Schwankungen, auf welche Seite der Pendelkörper abgelenkt wird, wie sich seine zukünftige Bahn entwickelt und letztendlich an welchem Magneten die Bahn endet.

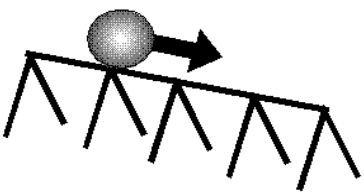

Abb 5.4. Berggrat-Analogie

Folgende Analogie kann helfen, das Pendelverhalten besser zu verstehen: Eine Kugel rollt entlang eines sehr schmalen geraden Berggrats, der zwei Täler trennt. Die Täler symbolisieren die Anziehungsbereiche der Magnete. Die Kugel wird auf dem Grat zwischen den Tälern weiterrollen, solange sie nicht gestört wird. Eine minimale Störung kann bewirken, daß die Kugel in eines der Täler rollt.

In diesem Bild entspricht dem Magnetpendel eine Landschaft aus drei Tälern, die jeweils durch Berggrate getrennt sind. Die Grate laufen in der Mitte zusammen. Besitzt die rollende Kugel genügend Energie, kann sie auch, nachdem sie in eines der Täler gerollt ist, dieses wieder verlassen und über einen zweiten Grat in ein anderes Tal rollen. Sie bewegt sich von einer Mulde in die nächste, bis ihre Energie durch Reibung aufgebraucht ist und sie in einer Mulde zur Ruhe kommt (DUIT et al. 1995).

Daß nicht nur Störungen für die Abweichung des Pendels von seiner geregelten Bahn verantwortlich sind, zeigt sich bei dem Versuch, den Pendelkörper immer wieder von der gleichen Stelle zu starten. Trotz großer Bemühungen um die exakte Anfangsposition weicht das Pendel schon nach kürzester Zeit von seiner vorherigen Bahn ab. Die Anfangsposition ist nicht genau reproduzierbar. Eine kleine Störung beim Start verstärkt sich im Lauf der Bewegung und es ist nicht mehr vorher bestimmbar, an welchem der drei Magneten die Bewegung enden wird.

Um eine Übersicht über das Pendelverhalten zu bekommen, kann eine Art „Landkarte“ berechnet werden: Dazu wird jeder Magnet mit einer Farbe markiert. Nun startet man das Pendel an verschiedenen Orten und markiert diese Startpunkte in der Farbe des Magneten, bei dem das Pendel zur Ruhe kommt. Wird so Punkt für Punkt aufgenommen, erhält man eine Darstellung, in der jede Startposition mit der Farbe des Endmagneten gekennzeichnet ist.

Abbildung 5.5 zeigt eine solche Darstellung. Sie wurde nicht experimentell erstellt, sondern mit Hilfe eines Simulationsprogramms berechnet. Zuerst fällt die exakte Symmetrie ins Auge: Selbst in kleineren Details wiederholt sich das Muster dreimal (SCHULZ et. al. 1994).

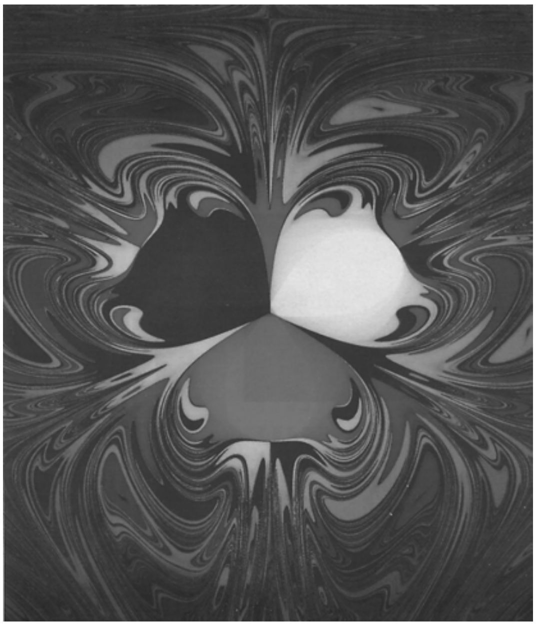

Abb. 5.5: Jeder Startpunkt des Pendels wurde mit der Farbe des Magneten, an dem die Bewegung endet, markiert (SCHULZ et. al. 1994).

Einheitlich einfarbige Bereiche markieren die Umgebung der Magnete. Startet das Pendel dort, verläßt es den Anziehungsbereich des Magneten nicht.

Außerhalb dieser großen Bereiche sind immer wieder kleinere zusammenhängende, ebenfalls einfarbige Gebiete zu erkennen. Bewegungen, die an benachbarten Startpunkten in diesen Bereichen beginnen, kommen über dem gleichen Magneten zur Ruhe.

Der größte Teil wird aber von nebeneinanderliegenden Punkten aller drei Farben eingenommen, die dicht an dicht beieinandersitzen.

Hier entscheiden kleinste Unterschiede in den Anfangsbedingungen über den Magneten, an dem das Pendel seine Bewegung beenden wird. Diese minimalen Unterschiede in den Anfangsbedingungen verstärken sich im Lauf der Bewegung, so daß das Pendel an einem anderen Magneten endet, als wenn es vom direkt benachbarten Punkt gestartet wäre. Das heißt, es sind nicht unbedingt Störungen im Laufe der Pendelbewegung nötig, um unvorhersagbares Verhalten zu erzeugen. Die Empfindlichkeit oder „Sensibilität" des Systems für die Wahl der Anfangsbedingungen bewirkt, daß direkt benachbarte Startpunkte zu völlig verschiedenen Bahnen und auch Endpositionen führen.

Trotzdem ist das Verhalten des Systems prinzipiell vorhersagbar: Wenn man in der Lage ist, das Pendel exakt an einem dieser Punkte immer wieder zu starten, wird es auch immer wieder am gleichen Magnet zur Ruhe kommen. In der Praxis ist dies nur in den einheitlich gefärbten Bereichen möglich oder durch Simulation am Computer.

- Das Verhalten des Pendels ist prinzipiell determiniert. Kennt man die exakten Anfangsbedingungen, ist sein Verhalten vorhersagbar.
- Winzig kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen können jedoch zu völlig verschiedenem Verhalten führen. Dies bedeutet im Fall des Magnetpendels, daß die Endpunkte der Bewegung bei verschiedenen Magneten liegen. Dieses Systemverhalten nennt man die **„sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen"**.
- Das trotz deterministischer Gesetze unvorhersagbare Verhalten von Systemen wird **„deterministisches Chaos“** genannt.

3.5.3 Lineare und nichtlineare Kraftgesetze - Welche Folgen hat die Nichtlinearität der Bewegungsgleichung für das Verhalten des Systems?

VORBEMERKUNGEN

Im hessischen Kursstrukturplan ist die Chaosphysik als mögliches Thema im Inhaltsbereich „Schwingungen und Wellen" für die gymnasiale Oberstufe vorgesehen. Dieser Unterrichtsteil bietet eine Anbindung an diesen Bereich, indem sie eine Brücke zu bekannten Beispielen aus der Mechanik schlägt.

In diesem dritten Teil wird das Schwerependel als weiteres nichtlineares System vorgestellt. Es ist den Schülerinnen und Schülern wohlbekannt, allerdings wird seine Bewegungsgleichung zur einfacheren mathematischen Beschreibung im Unterricht linearisiert und ist deshalb nur für kleine Winkel zulässig. Analog zum Magnetpendel werden die Ruhelagen des Schwerependels charakterisiert und ihre Rolle für das Pendelverhalten diskutiert.

Dieser Unterrichtsteil wurde anhand eines einfachen physikalischen Spielzeugs, dem sog. „Chaosmann", konzipiert. Es handelt sich dabei um ein Stecksystem aus Plastik. Aus verschiedenen Einzelteilen können Mehrfachpendel zusammengesetzt werden. Diese zeigen dann, aufgrund der vielen instabilen Ruhelagen und des Energieaustauschs zwischen den einzelnen Teilen, auch ohne äußeren Antrieb unvorhersagbares Verhalten. Das Experiment besticht durch seine Einfachheit, denn es ist ersichtlich, daß die Unvorhersagbarkeit nicht von einer Elektronik oder dem Motor erzeugt wird, sondern tatsächlich eine Systemeigenschaft des Pendels ist. Mehrfachpendel können natürlich auch, wahrscheinlich viel schöner, selbst gebaut werden.

Wer das getriebene Chaospendel im Unterricht zusätzlich thematisieren möchte und kein Pendel zur Verfügung hat, kann auf unterschiedlich luxuriöse Simulationsprogramme zurückgreifen, stellvertretend sind in der Literaturliste drei genannt (WORG 1993, BOUTHONG 1995, KINZEL et al. 1996).

LEHR- UND LERNZIELE

Die Schülerinnen, Schüler und Studierenden sollen

- den eingeschränkten Geltungsbereich der linearisierten Bewegungsgleichung des Schwerependels erkennen.
- die stabilen und instabilen Ruhelagen erkennen.
- die Nichtlinearität in der allgemeinen Bewegungsgleichung des Schwerependels erkennen.
- den Begriff des Freiheitsgrads auf verschiedene Mehrfachpendel anwenden können.
- sich im Klaren darüber sein, daß das irreguläre Verhalten eine Folge der Nichtlinearität der Bewegungsgleichung und der Existenz instabiler Ruhelagen ist.

AUSFÜHRUNG

Das ebene Schwerependel

Abbildung 5.6 zeigt ein Schwerependel, das aus einem Pendelkörper, der an einer Stange befestigt ist, besteht. Es bewegt sich nur in einer Ebene. Zunächst suchen wir, wie beim Magnetpendel, die Ruhelagen des Pendels. D.h. die Zustände, an denen sich Ort und Geschwindigkeit nicht ändern.

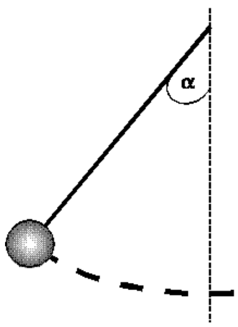

Abb. 5.6: Ebenes Schwerependel

Das Schwerependel besitzt zwei Ruhelagen:

Untere Ruhelage: Das Pendel hängt senkrecht nach unten ($\alpha = 0$).

Obere Ruhelage: Das Pendel steht auf dem Kopf ($\alpha = \pi$).

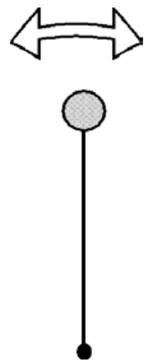

Abb. 5.7: Instabile Ruhelage $\alpha = \pi$

Wird das Pendel aus der unteren Ruhelage ein wenig ausgelenkt, beginnt es zu pendeln, verläßt aber die direkte Umgebung der Ruhelage nicht. Die untere Ruhelage ist stabil.

Völlig anders verhält sich das Pendel, wenn es nur minimal aus seiner oberen Ruhelage ausgelenkt wird: Es entfernt sich sofort aus der Umgebung dieser Ruhelage. Sie ist instabil. Winzige Auslenkungen um den Winkel $\alpha = \pi$ entscheiden über die Richtung der Pendelbewegung und damit über deren weiteren Verlauf. Wie beim Magnetpendel werden auch hier kleine Abweichungen verstärkt.

Besitzt das Pendel ausreichend Energie, um die Instabilitätsstelle am Überschlagspunkt im Verlauf seiner Bewegung immer wieder zu erreichen, können kleine Störungen immer wieder die Bewegung des Pendels in die eine oder andere Richtung beeinflussen. Die Pendelbewegung wird dadurch unvorhersagbar.

Theoretischer Hintergrund zum ebenen Schwerependel (Reibung vernachlässigt)

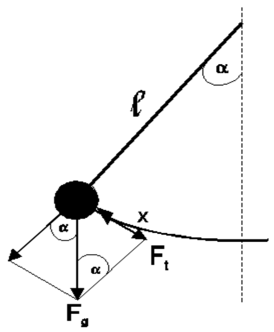

Abb. 5.8: Kräfteparallelogramm Schwerependel

F_t = Tangentialkomponente der Schwerkraft
F_g = Schwerkraft
x = Bogenlänge
l = Pendellänge
α = Winkel im Bogenmaß

Die Bewegungsgleichung: $F_t = m\ddot{x} = -mg\sin\alpha$.

mit $x = l\alpha$: $\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha$

Bei der Bewegungsgleichung des Pendels handelt es sich um ein nichtlineares Kraftgesetz.

Lineares System:	Zwischen den Größen, die einen Systemzustand beschreiben, besteht ein linearer Zusammenhang, d.h. eine direkte Proportionalität (z.B. lineares Kraftgesetz F~x).
Nichtlineares System:	Keine direkte Proportionalität zwischen den Größen, die einen Systemzustand beschreiben (z.B. nichtlineare Kraftgesetze F~sinx, $F \sim x^2$, $F \sim \frac{1}{x}$ usw.).

a. Lösung der Bewegungsgleichung für kleine Auslenkwinkel ($\alpha < 10°$):

- $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - ... \approx \alpha$ => Reihe kann nach dem 1. Glied abgebrochen werden.
  Damit kann der Sinus-Term für kleine Winkel genähert werden: $\sin\alpha \approx \alpha$.
- Für kleine Winkel ($\alpha < 10°$) gilt also ein **lineares Kraftgesetz:** $m\ddot{\alpha} = -\frac{mg}{l}\alpha$**.** Die rücktreibende Kraft ist proportional zur Auslenkung α.
- Nur für kleine Winkel ist die Bewegungsgleichung des Pendels analytisch lösbar, d.h. sie kann exakt integriert werden:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\alpha = -\varpi^2\alpha$$

Lösung: $\alpha(t) = \alpha_0 \cos\varpi t$ **harmonische Schwingung**

α_0 = Auslenkungswinkel zur Zeit $t = t_0$

Eigenfrequenz: $\varpi = \sqrt{\frac{g}{l}}$

b. Lösung der Bewegungsgleichung für große Auslenkwinkel:

- Der nichtlineare Term $\sin\alpha$ kann nicht mehr durch α genähert werden.
- Das **Kraftgesetz bleibt nichtlinear:** $\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha$
- Die rücktreibende Kraft ist nicht mehr proportional zum Auslenkwinkel α, sondern proportional zu $\sin\alpha$. Sie wächst an bis $\pi/2$ und sinkt dann, je mehr sich α dem Wert π nähert. D.h. im nichtlinearen Fall ist die Rückstellkraft geringer als in der linearen Näherung.
- Die nichtlineare Bewegungsgleichung läßt sich nicht mehr wie im linearen Fall analytisch lösen, sondern nur durch numerische Integration, d.h. eine schrittweise Annäherung an die Lösung. Die Lösungen der nichtlinearen Pendelgleichung sind keine Sinusschwingungen mehr, sie werden als **„anharmonische Schwingungen”** bezeichnet.

Die Ruhelagen des ebenen Schwerependels

Die Ruhelagen eines Pendels sind dadurch definiert, daß sich seine Zustandsvariablen in dieser Lage nicht mehr ändern.

Allgemein wird ein System durch Zustandsgleichungen beschrieben, deren allgemeine Form lautet: $\dot{x} = f(x_1,...,x_n)$.

Das System befindet sich in einer Ruhelage, wenn $\dot{x} = f(x_1,...,x_n) = 0$ ist.

Die Zustandsgleichungen des Pendels lauten: $v = \dot{\alpha}$ und

$$\dot{v} = \ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha .$$

Die Ruhelagen des Pendels liegen also bei $v = 0$ und $\sin\alpha = 0$, d.h. bei $\alpha = 0$ und $\alpha = 2n\pi$, da sich der Pendelkörper auf einer Kreisbahn bewegt.
Es existieren allerdings nur zwei physikalische Ruhelagen: $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$.

Die obere Ruhelage des Pendels ist instabil. Im Experiment verursacht ihre Instabilität allein keine chaotische Bewegung. Die Reibung verhindert, daß das Pendel den Überschlagspunkt wieder erreicht. Das Pendel verliert nach und nach seine Energie und kommt schließlich in der unteren, stabilen Ruhelage zum Stillstand. Um eine chaotische Bewegung zu erreichen, muß dem Pendel die Energie zugeführt werden, die es durch Reibung verliert. Es muß ständig von außen angeregt werden. Diese Bedingung macht den Aufbau allerdings aufwendig.

Um einen komplizierten Aufbau zu vermeiden, existiert noch eine andere Möglichkeit, chaotische Schwingungen zu erzeugen: Durch aneinandergehängte Pendel. Diese Mehrfachpendel haben eine größere Zahl an Freiheitsgraden (Anzahl der voneinander unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten, die ein Körper besitzt) und mehr Instabilitätsstellen, an denen das Pendel jeweils zwischen zwei Richtungen wählen kann.

Versuch „Chaosmann": Der Chaosmann besteht aus fünf Pendeln, die mit Hilfe einer Steckverbindung kombiniert werden können. Neben zwei Einfachpendeln unterschiedlicher Länge sind zwei identische Doppelpendel mit geraden Enden und ein Doppelpendel mit V-förmigem Ende vorhanden. Laut der beigelegten Anleitung lassen sich diese Pendel in 68 unterschiedliche Varianten kombinieren.

Das einfache Doppelpendel besitzt zwei voneinander unabhängige Bewegungsmöglichkeiten,

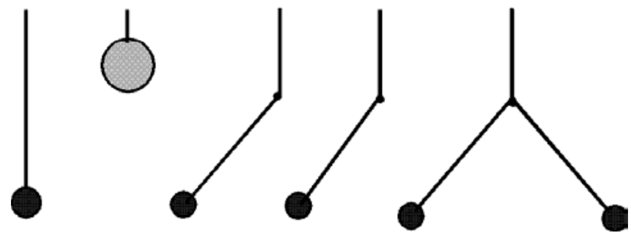

Abb. 5.9: Einzelteile des „Chaosmanns": Zwei Einfachpendel, drei Doppelpendel

also zwei Freiheitsgrade. Für kleine Auslenkungen schwingt dieses Pendel noch periodisch und damit regelmäßig. D.h. unter bestimmten Anfangsbedingungen ist das Doppelpendel genauso berechen- und vorhersagbar wie das Einfachpendel. Vergrößert man jedoch die Amplitude, zappelt das Doppelpendel wild. Beide Pendel erreichen mehrfach ihre instabile Lage. Diese Pendelbewegung ist schon nicht mehr vorhersagbar und ihre Bewegungsgleichungen lassen sich nicht mehr analytisch lösen.

Auch das Doppelpendel mit V-förmigem Ende besitzt zwei Freiheitsgrade. Wie das einfache Doppelpendel zeigt es unter bestimmten Anfangsbedingungen periodische Schwingungsformen (die Startpositionen sind in der Anleitung angegeben), bei höheren Schwingungsenergien aber ist es nahezu unmöglich, zweimal dieselbe Bewegung zu erzeugen. Immer wenn ein Pendel den Umschlagspunkt erreicht, können kleine Schwankungen über die Bewegungsrichtung entscheiden und die Vorhersagbarkeit sinkt.

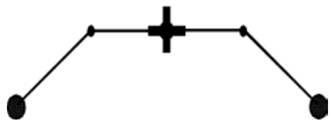

Abb. 5.10: Kombination aus zwei Doppelpendeln

Die Kombination zweier Doppelpendel (Abbildung 5.10) erhöht die Zahl der Freiheitsgrade auf drei und damit auch die Zahl der instabilen Lagen. Zusätzlich können die Einzelpendel untereinander Energie austauschen, was die Komplexität des Systems erhöht.

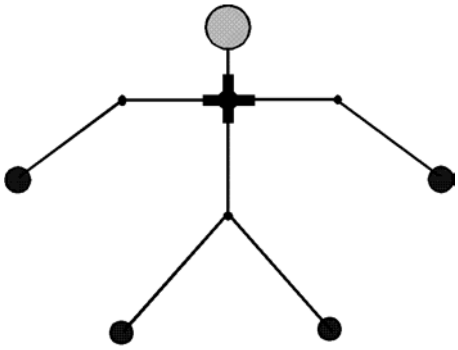

Abb. 5.11: Chaosmännchen

Das Chaosmännchen (Abbildung 5.11) letztendlich besteht aus drei Doppel- und einem Einfachpendel und besitzt damit vier voneinander unabhängige Bewegungsmöglichkeiten bzw. Freiheitsgrade. Das Einfachpendel als „Kopf” erhöht zwar die Zahl der Freiheitsgrade nicht, ermöglicht aber, die Geschwindigkeit der Bewegung zu regulieren.

Achtung: Es ist besonders wichtig herauszuarbeiten, daß das irreguläre, chaotische Verhalten eine Folge der Nichtlinearität der Bewegungsgleichung und der Existenz instabiler Ruhelagen ist und nicht durch die Vielzahl der Freiheitsgrade verursacht wird! Eine größere Zahl der Freiheitsgrade erhöht lediglich die Komplexität des Systems.

3.5.4. Welche Gemeinsamkeiten bestehen zwischen den einfachen nichtlinearen Systemen und der turbulenten Flüssigkeitsbewegung?

VORBEMERKUNGEN

Zunächst werden die Gemeinsamkeiten eines einfachen nichtlinearen Systems (exemplarisch am Magnetpendel) und der Turbulenz in Form einer Tabelle zusammengefaßt. Im vorherigen Unterrichtsteil haben die Schülerinnen und Schüler die Nichtlinearität der Bewegungsgleichung und die Existenz von Instabilitätsstellen als Ursache für unvorhersagbares Systemverhalten kennengelernt.

Die Grundgleichungen der Hydrodynamik, die sog. „Navier-Stokes-Gleichungen“, sind partielle Differentialgleichungen und sprengen deshalb den Rahmen der Schulphysik bei weitem. Aus diesem Grund wird lediglich der nichtlineare Teil dieser Gleichungen, der für das chaotische Verhalten der turbulenten Strömung verantwortlich ist, schlaglichtartig beleuchtet. Dafür werden alle Kräfte bilanziert, die auf ein Flüssigkeitsvolumen wirken, ähnlich wie es schon im 3. Themenblock dieser Unterrichtsreihe zur Herleitung des Hagen-Poiseuille-Gesetzes praktiziert wurde. Danach steht nur noch der nichtlineare Trägheitsterm im Mittelpunkt.

LEHR- UND LERNZIELE

Die Schülerinnen, Schüler und Studierenden sollen erkennen, daß

- verschiedene nichtlineare Systeme gemeinsame Eigenschaften besitzen.
- sowohl laminare als auch turbulente Strömungen durch die gleichen Bewegungsgleichungen beschrieben werden.
- die Näherung einer stationären Strömung für die turbulente Strömung nicht mehr zutrifft und der Trägheitsterm nun nicht mehr verschwindet.
- die Strömungsgeschwindigkeit nun vom Ort und der Zeit abhängt und somit zur Berechnung der Beschleunigung nach allen Variablen abgeleitet werden muß.
- die Beschleunigung sich aus zwei Termen zusammensetzt, von denen die sog. „konvektive Beschleunigung" die Nichtlinearität der Bewegungsgleichung darstellt und für die Unvorhersagbarkeit der turbulenten Strömung verantwortlich ist.

AUSFÜHRUNG

Die folgende Tabelle soll in einer Zusammenfassung die Gemeinsamkeiten dieser zwei völlig unterschiedlichen nichtlinearen Systeme aufzeigen, die auf den ersten Blick wenig Gemeinsames besitzen. Das Magnetpendel vom Anfang dieses Themenblocks steht als Beispiel für ein einfaches physikalisches System.

Gemeinsamkeiten	**Magnetpendel**	**turbulente Strömung**
Sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen	Bahnen benachbarter Startpunkte laufen auseinander und können an verschiedenen Magneten enden.	Bahnen benachbarter Fluidelemente laufen auseinander. Effektive Durchmischung durch turbulente Diffusion.
Prinzip der starken Kausalität verletzt	Ähnliche Ursachen führen zu völlig verschiedenen Wirkungen.	
Nichtvorhersagbarkeit	... der Bahn des Pendelkörpers und des Endmagneten.	... der Bahn des Fluidteilchens.
Instabilität, Verstärkung kleiner Störungen	An der instabilen Ruhelage und auf den Trennungslinien zwischen den Anziehungsbereichen zweier Magnete reicht eine kleine Störung aus, um den Pendelkörper in die eine oder andere Richtung auszulenken.	Oberhalb einer kritischen Re-Zahl wird die Strömung instabil. Kleine Störungen werden verstärkt und die Strömung wird turbulent.

Tabelle 5.2: Gemeinsamkeiten des Magnetpendels als einfaches nichtlineares System und der turbulenten Strömung als komplexes nichtlineares System

Ergänzung: **Wo ist die Grundgleichung der Strömungsdynamik nichtlinear?**

Die auf ein Flüssigkeitsvolumen wirkenden Kräfte - Reibungskräfte F_r, Druckkräfte F_p und äußere Kräfte $F_ä$ - bestimmen dessen Bewegung:

$$\vec{F}_t = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_r + \vec{F}_ä$$

Zur Herleitung der Hagen-Poiseuille-Gleichung im 3. Themenblock und den Betrachtungen der eindimensionalen Eulergleichung im 2. Themenblock wurden einige Annahmen gemacht, die natürlich nicht für jede Strömung zutreffen. So wurde z.B. angenommen, daß die Flüssigkeitselemente nicht beschleunigt werden, also $\vec{F}_t = 0$ wird. Für den allgemeinen Fall einer Strömung wird gerade dieser Trägheitsterm relevant. Jetzt ändert sich die Geschwindigkeit an einem festen Ort mit der Zeit und zusätzlich bleibt das Teilchen nicht mehr in einer Stromlinie, sondern kann an einen Ort geführt werden, an dem die Strömungsgeschwindigkeit eine andere ist. Dies läßt sich auch mathematisch beschreiben.

Die Geschwindigkeit eines Teilchens ist in diesem allgemeinen Fall sowohl vom Ort, als auch von der Zeit abhängig:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

Zur Berechnung der Beschleunigung müssen alle Komponenten des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit abgeleitet werden:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v_x, v_y, v_z)}{dt}$$

Da aber alle Komponenten v_x, v_y und v_z sowohl vom Ort, als auch von der Zeit abhängen, muß nach allen Variablen mit Hilfe der Kettenregel abgeleitet werden. Dieser Schritt wird hier exemplarisch an der x-Komponente des Geschwindigkeitsvektors ausgeführt:

Mit $\frac{\partial x}{\partial t} = v_x, \frac{\partial y}{\partial t} = v_y$ und $\frac{\partial z}{\partial t} = v_z$ gilt

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z})v_x = a_1 + a_2$$

Diese totale Ableitung ist die sog. **„substantielle Beschleunigung“** des Flüssigkeitsteilchens. Sie setzt sich zusammen aus der zeitlichen Änderung der Geschwindigkeit und einem zweiten Anteil, der durch die Verschiebung des Flüssigkeitsvolumens mit der Geschwindigkeit v zustandekommt (GREINER et al. 1984, 15).

Die substantielle Beschleunigung besteht also zwei Teilen:

$$a_1 = \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

a_1 ist die **„lokale Beschleunigung“**. Sie ist von null verschieden, wenn sich die Geschwindigkeit an einem beliebigen, aber festen Ort des Strömungsfelds mit der Zeit ändert.

$$a_2 = (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) v_x$$

a_2 ist die **„konvektive Beschleunigung"**. Sie kommt zustande, wenn sich das Flüssigkeitselement mit der Geschwindigkeit v_x durch ein Strömungsfeld bewegt, in dem an verschiedenen Orten verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten herrschen (SCHADE et. al. 1980, 59).

Mathematische Details sind hier zweitrangig. Bemerkenswert an diesem Ausdruck ist, daß die konvektive Beschleunigung durch ein Produkt aus der Geschwindigkeit und ihrer Ableitung beschrieben wird. Dieses Produkt macht die Bewegungsgleichung der Flüssigkeitsteilchen nichtlinear und ist so verantwortlich für die mögliche Ausbildung einer turbulenten Strömung.

Die konvektive Beschleunigung ist der nichtlineare Anteil der Bewegungsgleichung.

Leitet man alle Komponenten des Geschwindigkeitsvektors ab,

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) v_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) v_y$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) v_z$$

erhält man mit $\mathrm{grad} = (\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k)$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}) \right) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\mathrm{grad})\vec{v} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Als Zeichen, daß es sich hier um eine substantielle Ableitung handelt, werden die d's in Großbuchstaben geschrieben. Wieder erkennt man den Anteil der lokalen und der konvektiven Beschleunigung.

Das Auftreten eines nichtlinearen Terms bedeutet nicht automatisch, daß das System unvorhersagbares Verhalten an den Tag legt. Unter bestimmten Bedingungen kann es sich durchaus vorhersagbar verhalten. Beispiel dafür ist das Schwerependel bei kleinen Amplituden, das Magnetpendel in der direkten Umgebung der einzelnen Magnete oder die laminare Strömung und die Kármánsche Wirbelstraße. Diese Phänomene gehorchen alle ebenfalls den nichtlinearen Gleichungen. Damit das „chaotische" Verhalten auftritt, muß das System instabil werden. Dann reichen kleine Veränderungen der Anfangsbedingungen oder kleine Störungen aus, damit zwei bisher benachbarte Bahnen plötzlich auseinanderlaufen. Ähnlich zweier Luftballons, die nebeneinander gestartet werden und innerhalb kürzester Zeit in völlig verschiedene Richtungen schweben. Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen und sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen verursachen die unvorhersagbare Bewegung.