Goethe-Universität
Frankfurt am Main
Institut für Philosophie

Theorien des Überzeugungswandels

Erster Teil:

Die klassische AGM-Theorie

André Fuhrmann

Übersicht

Erster Teil

Epistemische Rechtfertigung

- Synchronische versus diachronische Rechtfertigung
- Das grundlegende Problem diachronischer Rechtfertigung

AGM klassisch

- Die klassische Theorie der Überzeugungsdynamik: AGM
- Postulate für Kontraktionen und Revisionen
- Der Ramsey Test für kontrafaktische Konditonalsätze
- Meet contractions
- Sphärensysteme

Epistemische Rechtfertigung

Karl sieht wie Peter in einem schwarzen Maserati am Opernplatz hält.
Er glaubt, daß wenn Peter in Frankfurt ein Auto fährt, dann gehört ihm das Auto.
Karl glaubt also (zum Zeitpunkt t),

(m) daß Peter einen schwarzen Maserati besitzt.

Ein (traditionelles) Problem

Sei K der Überzeugungszustand von Karl zum Zeitpunkt t.

- Sind die Überzeugungen in K gerechtfertigt?
- Insbesondere: Ist Karls Überzeugung (m) gerechtfertigt?

Die Überzeugung (m) ist (deduktiv) abhängig von folgenden Überzeugungen:

(a) Peter sitzt in dem Auto, das Karl in Ffm gesehen hat.

(b) Das Auto ist ein schwarzer Maserati.

(c) Wenn Peter in Ffm ein Auto fährt, dann gehört es ihm.

$$\frac{a \qquad b \qquad c\ [= a \wedge b \rightarrow m]}{m}$$

- *Problem*: Sind die Überzeugungen (a-c) gerechtfertigt?
  (Das Problem der Rechtfertigung aktualer Überzeugungen)

  $\hookrightarrow$ **Traditionelle Theorien epistemischer Rechtfertigung.**

Ein anderes Problem

Karl erfährt aus verläßlicher Quelle, daß Peter sicher keinen Maserati besitzt, d.h. $\neg m$. Karl entschließt sich daher, die Überzeugung m aufzugeben (um dann vielleicht $\neg m$ seinen Überzeugungen hinzuzufügen).

- *Aufgabe*: Gehe von K über zu K*-ohne-m*!

Aber m wird von Karls Überzeugungen a, b und c (deduktiv) erzwungen.

- *Also*: Karl muß zumindest eine der Überzeugungen a, b oder c aufgeben. Er kann aber auch noch viel mehr aufgeben, um m abzuschütteln. (ZB könnte Karl jetzt in kartesische Meditationen verfallen.)

$$\begin{aligned} K - m &= \{\cdots a, b \cdots\} \ ? \ \{\cdots a, c \cdots\} \ ? \ \{\cdots b, c \cdots\} \ ? \\ &= \{\cdots a \cdots\} \ ? \ \{\cdots b \cdots\} \ ? \ \{\cdots c \cdots\} \ ? \ \{\cdots\} \ ? \ \{\mathit{cogito}\}?? \end{aligned}$$

- *Problem*: Gegeben die Entscheidung m aufzugeben, welcher Überzeugungszustand $K - m$ ist als Nachfolger von K gerechtfertigt?
  (Das Problem der Rechtfertigung von Überzeugungswandel.)

  $\hookrightarrow$ **“Dynamische” Theorien epistemischer Rechtfertigung.**

Die beiden Probleme näher betrachtet

Das Problem der statischen Rechtfertigung besteht darin, die Leerstelle x in dem folgenden Schema zu füllen:

(S) $$x \,\mathrm{R}\, K.$$

Das Objekt der Rechtfertigung ist ein Überzeugungszustand. Kandidaten für x in S sind bekannt, zB:

- fundamentale Überzeugungen
- kohärente Vernetzungen
- zuverlässige kausale Beziehungen

Im dynamische Fall geht es um das Schema

(D) $$x \,\mathrm{R}\, (K, K').$$

Das Objekt der Rechtfertigung ist ein Paar von Überzeugungszuständen (einen doxastischen Übergang repräsentierend).

Können wir den dynamischen Fall auf den statischen Fall reduzieren?
Etwa so:

1. (K, K') ist gd D-gerechtfertigt, wenn K' S-gerechtfertigt ist.
   — Der Ausgangszustand K taucht rechts nicht auf.

2. (K, K') ist gd D-gerechtfertigt, wenn K zum Zeitpunkt t und K' zum Zeitpunkt der Übergangs, t', S-gerechtfertigt ist.
   — Der Übergang zu K' mag D-gerechtfertigt sein, ohne daß der Ausgangszustand K S-gerechtfertigt war (oder das Ziel K' gerechtfertigt ist; siehe den nächsten Punkt).

3. (K, K') ist gd D-gerechtfertigt, wenn K' S-gerechtfertigter ("besser") als K ist.
   — (a) K könnte S-besser als K' sein, ohne daß der Übergang D-gerechtfertigt ist.
   (b) Der Übergang könnte D-gerechtfertigt sein obwohl K' nicht S-besser als K ist.

Ad 3a) (Schlechter Übergang zu besseren Überzeugungen)
Sei $A \in K$ eine besonders gut gerechtfertigte Überzeugung; K' enthalte genau diejenigen Überzeugungen in K, die mindestens so S-gut wie A sind. (K' repräsentiert einen "skeptischen Rückzug" von K.) Dann ist K sicher S-besser als K'; aber der durch den Rückzug bedingte Informationsverlust ist willkürlich und daher nicht D-gerechtfertigt.

Ad 3b) (Guter Übergang zu schlechteren Überzeugungen)
Der "duale" Fall: Der Übergang von K zu K' ist D-gerechtfertigt. Aber er ist zugleich epistemisch riskant genau in dem Sinne, daß K' unsicherer, S-schlechter, als K ist.

Können wir den statischen Fall auf den dynamischen Fall reduzieren?
Etwa so:

- Ein Überzeugungszustand ist S-gerechtfertigt, wenn er als Endpunkt einer Reihe D-gerechtfertigter Überzeugungsänderungen, vom Urkorpus (Levi) ausgehend, darstellbar ist. (Kartesische Rechtfertigung.)

Vielleicht ...

Eine starke These (Isaac Levi)

- ◦ Wissensprozeß (*Inquiry*): Der Prozeß der "Fixierung" (Peirce) und Änderung von Überzeugungen.
- ◦ Überzeugungen werden durch ihre Rolle im Wissensprozeß bestimmt.

- Damit Überzeugungen diese Rolle spielen können, muß der Handelnde sie im vollen Sinne für wahr anerkennen. Die Rechtfertigungsfrage—soweit sie ernsthaften Zweifel voraussetzt—kann nicht ernsthaft gestellt werden. Im Wissensprozeß werden die jeweiligen Überzeugungen als **infallibel** vorausgesetzt.
- Aus der Sicht des Handelnden ist epistemische Rechtfertigung aktualer Überzeugungen überflüssig, wenn nicht inkohärent.

- ◦ Der Wissensprozeß setzt jedoch voraus, daß Überzeugungen **korrigierbar** sind.
- ◦ Die Aufgabe einer für infallibel gehaltenen Überzeugung bedarf der Rechtfertigung.
- Aus der Sicht des Handelnden ist epistemische Rechtfertigung von Überzeugungskorrekturen notwendig.

- Isaac Levi: *The Enterprise of Knowledge* (1980)
- : *Decisions and Revisions* (1984)

Wie auch immer es um die starke These Levis bestellt sein mag, ...

- es ist verwunderlich, daß das statische Problem so lange geradezu die Erkenntnistheorie definiert hat.
- Es ist noch merkwürdiger, daß das davon unterschiedene und mindestens ebenso wichtige dynamische Problem so lange (bis ca. 1985) gar nicht wahrgenommen wurde.

Eine mögliche Erklärung:

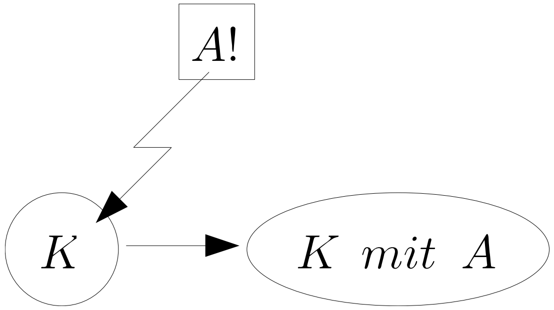
Thomas Kuhn (*The Structure of Scientific Revolutions*, 1970) hat eine Theorie von Überzeugungsänderungen entwickelt, die sich rationaler Steuerung weitgehend entziehen.

- Diese Theorie war jahrzehntelang die wirksamste Quelle relativistischer Neigungen in der Philosophie—Neigungen, die von den meisten Erkenntnistheoretikern nicht geteilt werden.
- Die Entwicklung von Überzeugungen erschien in der Kuhn'schen Betrachtung unvorhersehbar und nicht unter normativen Vorgaben stehend.
- Die Rechtfertigung von Wissensansprüchen schien dagegen sehr wohl normativ beurteilbar zu sein—zumindest innerhalb eines "Paradigmas".
- *Folge*: Das statische Problem verblieb in der Erkenntnistheorie; das dynamische Problem wurde zusammen mit seinen relativistischen Nebenwirkungen in die Wissenschaftsgeschichte exiliert.

Zurück zum Problem

Wir wollen das Problem in seiner einfachsten Form angehen:

- Ein Überzeugungszustand.
- Neue Information.
- Eine Entscheidung, aufgrund der Information eine neue Überzeugung an Bord zu nehmen.
- Wie sollte man das machen?



Drei Operationen

Ausgangszustand K; Übergang zu K'.

Drei Fälle, drei Operationen:

- $K \subset K'$: K' ist das Resultat einer **Expansion** von K.
- $K \supset K'$: K' ist das Resulat einer **Kontraktion** von K.
- Weder $\subset$ noch $\supset$: K' ist das Resulat einer **Revision** von K.

Ein konkreterer Zugang: Zwei Fälle, drei Operationen

Ausgangszustand K; neue Information A!

- *Erster Fall*: A ist mit K konsistent.
  Einfach: K wird um A *erweitert* zu $K + A$.
- *Zweiter Fall*: A ist nicht mit K konsistent, d.h. $\neg A \in K$.
  Schwierig: K wird nach A *revidiert* zu $K * A$.
  - Beobachtung zum zweiten Fall: Erst muß K konsistent mit A gemacht werden: K wird um $\neg A$ *kontrahiert* zu $K - \neg A$; dann wird das Resultat um A erweitert.
  - **Levi-Identität**:

$$K * A = (K - \neg A) + A$$

- Also drei Operationen:
  - **Expansion** (Erweiterung): $K + A$
  - **Kontraktion** (Verkleinerung): $K - A$
  - **Revision**: $K * A$

Überzeugungszustände

- Überzeugungen geben wir in einer aussagenlogischen Sprache wieder.
- Explizite Überzeugungen generieren logisch Verpflichtungen zu weiteren Überzeugungen.
- Der Überzeugungszustand K einer Person enthält alle Überzeugungen, zu denen die Person (logisch) verpflichtet ist:

$$K = \mathrm{Cn}(K)$$

- Die Operation Cn, welche die logischen Konsequenzen einer Menge generiert, ist eine Abschlußoperation. Wir dürfen uns vorstellen, daß sie den Abschluß unter klassischer logischer Konsequenz darstellt. Bis auf ganz wenige Stellen kommt die Theorie jedoch mit den folgenden abstrakten Eigenschaften aus:

$$X \subseteq \mathrm{Cn}(X);$$
$$\text{wenn } X \subseteq Y, \text{ dann } \mathrm{Cn}(X) \subseteq \mathrm{Cn}(Y);$$
$$\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(X)) = \mathrm{Cn}(X);$$
$$\text{wenn } A \in \mathrm{Cn}(X), \text{ dann } \exists X' \subseteq X : X' \text{ ist endlich und } A \in \mathrm{Cn}(X').$$

  Wir schreiben manchmal auch relational

$$X \vdash A \text{ für } A \in \mathrm{Cn}(X) \quad \text{und} \quad A \equiv B \text{ für } \mathrm{Cn}(A) = \mathrm{Cn}(B).$$

- Daß Überzeugungszustände unter logischer Konsequenz abgeschlossen sein sollen, bedeutet also:

$$A \in K \text{ gdw } K \vdash A.$$

Expansion

Angenommen K ist konsistent mit A, d.h.

$$\neg A \notin K$$

Dann können wir ohne Gefahr A zu K hinzunehmen und unter logischer Konsequenz abschließen:

$$K + A := \mathrm{Cn}(K \cup \{A\})$$

Expansionen sind also einfach.

Revisionen und Kontraktionen

Damit Peter glauben kann, daß Karl gar keinen Maserati besitzt, muß er zunächst die Überzeugung m aufgeben: daß Karl einen hat.

Aber Peter kam so zur Überzeugung m:

$$\frac{a \qquad b \qquad a \wedge b \to m}{m}$$

(Es ist jetzt gleichgültig, wofür a und b stehen.)

Wie bei jedem Schluß auf eine ungewollte Konklusion hat Peter die Wahl:

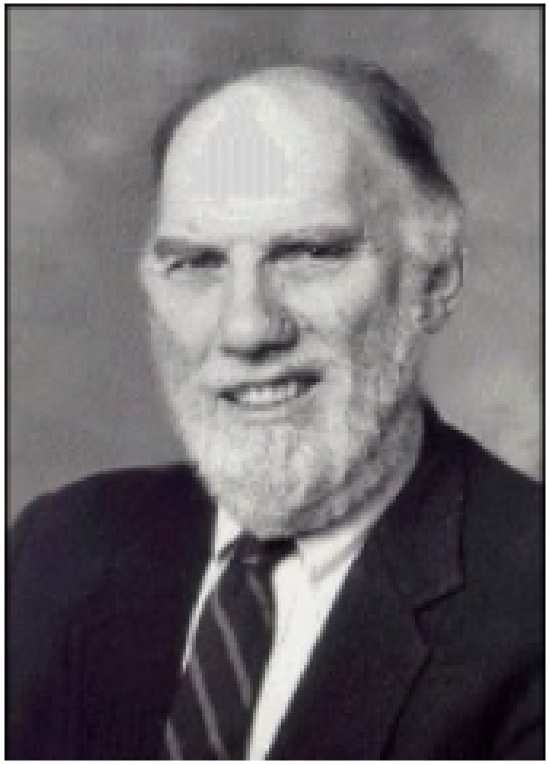
- · Er kann die eine oder die andere oder mehrere der Prämissen ablehnen.
- · Vielleicht war a abhängig von oder kam in einem Paket mit c und d ... ? Dann sollte Peter möglicherweise noch andere Überzeugungen aufgeben.

- Daß Peter hier eine *Wahl* hat, zeigt, daß es sich um kein rein logisches Problem handelt (im Ggs. zu Expansionen).
- Der Kern der Theorie wird also in der Identifizierung der Optionen und Bedingungen für eine vernünftige Wahl liegen—“cognitive decision theory” (Levi).

AGM: Postulate und Konstruktionen

Die Quellen der AGM-Theorie

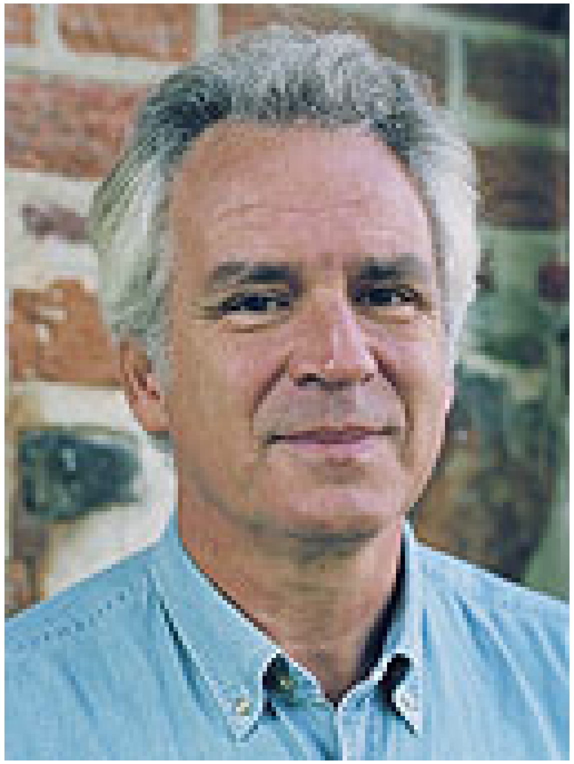
Wissensprozeß als kognitive Entscheidungstheorie:
Isaac Levi (1967ff.)



Epistemische Semantik von Konditionalen:
Peter Gärdenfors (1978ff.)

> If two people are arguing 'If p will q?' and are both in doubt as to p, they are adding p hypothetically to their stock of knowledge and arguing on that basis about q.

(Frank P. Ramsey, General propositions and causality, 1929)



Derogation von Normen:
Carlos Alchourrón und David Makinson (1981ff.)

> Suppose that A is a set of regulations, y is some proposition that is implied by A, and that for some reason a legislative body wants to eliminate y. In such a situation, the body may decide to reject y, with the intention of thereby rejecting implicitly whatever in A implies y, retaining the remainder. This we shall call derogation.

(AM, Hierarchies of regulations and their logic, 1981)

Vorüberlegung

Im Wissensprozeß wollen wir zu *interessanten* und *zuverlässigen* Überzeugungen kommen. Dies sind einander widerstreitende Ziele:

- je interessanter desto unzuverlässiger (riskanter)
- je zuverlässiger desto uninteressanter
  - $Cn(\emptyset)$ ist der zuverlässigste Überzeugungszustand!
- Vernünftiges Gleichgewicht zwischen Interesse und Risiko!

Der Resultat einer Überzeugungsänderung soll ein (neuer) Überzeugungszustand sein.

- Die Operationen sollen Theorien in Theorien abbilden.

Wir gehen davon aus, daß die Überzeugungszustände, die sich vernünftig verändern sollen, selbst schon auf vernünftige Weise zustande gekommen sind.

- Überzeugungen sollen nicht ohne Not aufgegeben werden (Quines *Maxim of Minimal Mutilation*)

Strategie

- Die Vorüberlegungen in eine Reihe von **Bedingungen** überführen, die Kontraktionen und Revisionen erfüllen sollten.
- Zeigen, wie bestimmte **Konstruktionen** geeignet sind, diese Bedingungen zu erfüllen $\hookrightarrow$ **Repäsentationsresultate**.
- Wenn
  - die Bedingungen unabhängig von den Konstruktionen plausibel sind,

und

  - die Konstruktionen unabhängig von den Bedingungen plausibel sind,

dann

  - verleihen den Repräsentationsresultate der Theorie Stabilität.

AGM-Postulate für Kontraktion

(C1) Closure	$K - A = \mathrm{Cn}(K - A)$
(C2) Success	$A \notin K - A$, falls $\not\vdash A$
(C3) Inclusion	$K - A \subseteq K$
(C4) Vacuity	Wenn $A \notin K$, dann $K - A = K$
(C5) Recovery	$K \subseteq (K - A) + A$
(C6) Congruence	Wenn $A \equiv B$, dann $K - A = K - B$

Supplementary

(C7) Conjunction 1	$K - A \cap K - B \subseteq K - (A \wedge B)$
(C8) Conjunction 2	Wenn $A \notin K - (A \wedge B)$, dann $K - (A \wedge B) \subseteq K - A$

AGM-Postulate für Revision

(R1)	Closure	$K * A = \mathrm{Cn}(K - A)$
(R2)	Success	$A \in K * A$
(R3)	Inclusion	$K * A \subseteq K + A$
(R4)	Preservation	Wenn $\neg A \notin K$, dann $K * A = K + A$
(R5)	Consistency	Wenn $\perp \in K * A$, dann $\vdash \neg A$
(R6)	Congruence	Wenn $A \equiv B$, dann $K * A = K * B$

Supplementary

(R7)	Conjunction 1	$K * (A \wedge B) \subseteq (K * A) + B$
(R8)	Conjunction 2	Wenn $\neg B \notin K * A$, dann $K * A) + B \subseteq K * (A \wedge B)$

Von Kontraktionen zu Revisionen und v.v.

Levi Identität (LI):

$$K * A = K - \neg A + A$$

Harper Identität (HI):

$$K - A = K \cap (K * \neg A)$$

Beobachtung. *Die Postulate für Kontraktionen und Revisionen harmonieren* modulo *(LI) bzw. (HI):*

1. *Aus den Kontraktionspostulaten + LI folgen die Revisionspostulate; Recovery ist für die Ableitung nicht nötig.*
2. *Aus den Revisionspostulaten + HI folgen die Kontraktionspostulate.*

Recovery: $K - A + A = K$

- Recovery formuliert die Bedingung, daß Informationsverlust zu vermeiden ist.
  - ZB erfüllt die folgende "withdrawal"-Operation (Makinson) alle C-Postulate ohne Recovery: (für $A \in K$) $K - A = \mathrm{Cn}(\emptyset)$.
- Recovery ist unter bestimmten Bedingungen nicht plausibel (Fuhrmann, Hansson, Nebel).
  - Um A aus K zu entfernen, entfernen wir meist stärkere Elemente in K, die A implizieren (zB $A \wedge B$). Wenn wir das schwächere A dann wieder hinzufügen, warum sollten wir dann die stärkeren Elemente zurückerhalten? (Stimmt für "Basen".)
- Recovery beruht im Kern auf der Tatsache, daß K und $K - A$ unter (klassischer!) logischer Konsequenz abgeschlossen sind:
  - Für jedes B in K haben wir durch Abschluß $\neg A \vee B \in K$.
  - Es gibt keinen Grund $\neg A \vee B$ auf dem Weg zu $K - A$ zu entfernen (und die Konstruktionen tun das auch nicht); also $\neg A \vee B \in K - A$.
  - Wenn wir dann A zu $K - A$ hinzufügen, dann ist B wieder in $K - A + A$ durch logischen Abschluß (Disjunktiver Syllogismus!).

Ramsey Test für Konditionale

Gärdenfors' Idee: Eine epistemische Semantik für kontrafaktische Konditionalsätze aufgrund dynamischer Akzeptanzregeln.

Sei $>$ ein kontrafaktisches Konditional.

Lies $A > B$: Wenn A der Fall wäre, dann würde B der Fall sein.
(ZB: Käme Peter heute zur Party, dann würde Karl wieder gehen.)

Ramsey-Test:

$$A > B \in K \text{ gdw } B \in K * A$$

Beobachtung. *Ramsey impliziert Montonie für Revisionen:*

$$\textit{Wenn } K \subseteq H, \textit{ dann } K * A \subseteq H * A.$$

Beobachtung. *(Gärdenfors) Monotonie, Preservation und Consistency sind nur trivial miteinander vereinbar.*

Reflektive Modalitäten

Konditionale nach dem Ramsey-Test reflektieren *auf der Ebene von Überzeugungen* Tatsachen *über* Überzeugungsänderungen.

- Vielleicht liegt das Problem in diesem Anspruch generell Metaüberzeugungen und Objektüberzeugungen systematisch (d.h. korrekt und vollständig) zu integrieren. Vergleiche zB den ...

Levi-Test (für ernsthafte Möglichkeit)[1]

$$\Diamond A \in K \text{ gdw } \neg A \notin K.$$

BEOBACHTUNG. *(Fuhrmann) Alle Tests dieser "reflektiven" Art, einschließlich dem Levi-Test, sind inkonsistent.*

- Ein Ausweg (Levi): Separiere faktive von (reflektiv) modalen Überzeugungen. Stratifiziere ggf. Sprachen und Überzeugungszustände à la Tarski.

[1] Nicht wirklich von Levi vorgeschlagen aber "im Geiste" einiger seiner Ausführungen über epistemische Möglichkeit.

Partial Meet Contraction

Kontraktion und Revision enthalten ein Moment der *Wahl*. Diese Einsicht führt unmittelbar zu folgendem Rezept. (Zunächst für Kontraktionen, dann für Revisionen.)

- *Aufgabe*: $K - A$
- *Kandidaten*: Alle maximalen Teilmengen von K, aus denen A nicht folgt.
- *Auswahl* ...
  - *Wahl 1*: Der Schnitt dieser Teilmengen. (Full Meet)
  - *Wahl 2*: Die beste dieser Teilmengen. (Maxichoice)
  - *Wahl 3*: Der Schnitt der besten dieser Teilmengen. (Partial Meet)

C. Alchourron, P. Gärdenfors und D.Makinson, On the logic of theory change: Partial meet functions for contraction and revision, *J. of Symbolic Logic* 50 (1985), 510-530.

Sei K eine Theorie (wie wir im folgenden Überzeugungszustände auch nennen wollen) und A ein Satz. Hier ist die Definition der *Kandidaten*:

Für alle Satzmengen X, $X \in K \perp A$ gdw

1. $X \subseteq K$,
2. $X \nvdash A$, und
3. $\forall Y$: wenn $X \subset Y \subseteq K$, dann $X \vdash A$.

$K \perp A$ ist eine **Restefamilie** (remainder set); deren Elemente sind die A-**Reste** von K (remainders).

Ferner definieren wir für jede Theorie K eine **Auswahlfunktion**

$$s_K : \wp(\wp(K)) \longrightarrow \wp(\wp(K)),$$

so daß für jede Familie $\mathbb{X}$ von Satzmengen gilt:

1. $s_K(\mathbb{X})$ ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{X}$, falls $\mathbb{X} \neq \emptyset$
   [für maxichoice: $s_K(\mathbb{X})$ besteht aus genau einem Element aus $\mathbb{X}$];
2. $s_K(\mathbb{X}) = \{K\}$ anderenfalls.

(Im folgenden unterdrücken wir den Subskript K, wenn die Zugehörigkeit aus dem Kontext hervorgeht—was immer der Fall sein wird.)

Kontraktion durch vollen Schnitt (full meet):

$$K - A = \bigcap (K \perp A)$$

Kontraktion durch eindeutige Wahl (maxichoice):

$$K - A = s(K \perp A)$$

(Für maxichoice enthält $s_K(K \perp A)$ genau ein $X \in K \perp A$ bzw. ist $= \{K\}$.)

Kontraktion durch ausgewählten Schnitt (partial meet, pm):

$$K - A = \bigcap s(K \perp A)$$

- Voller Schnitt ist *zu klein*.
  - ... und ist eh unplausibel, weil er das Moment der Wahl nicht modelliert.
- Eindeutige Wahl ist *zu groß*.
  - ... und ist eh unplausibel, weil er immer ein Maximum in der Präferenzstruktur voraussetzt.
- Ausgewählter Schnitt scheint genau richtig in der Mitte zu liegen.

Repräsentation für C1-6. *(AGM 1985)*

1. Jede pm-Kontraktion erfüllt die Bedingungen C1-6.

2. Jede Kontraktion, welche C1-6 erfüllt, kann durch eine pm-Kontraktion dargestellt werden.

Repräsentation für C1-8. *(AGM 1985) Sei $\leq_K$ eine transitive und reflexive Ordnung auf $\bigcup_A K \perp A$. Die Funktion s wähle die unter $\leq_K$ maximalen Elemente in einer Restefamilie von K, d.h.*

$$s(K \perp A) = \{X \in K \perp A : (\forall Y) \text{ wenn } Y \in K \perp A, \text{ dann } Y \leq_K X\}.$$

Mit s so bestimmt, nennen wir $\bigcap s(K \perp A)$ eine trpm-Kontraktion (transitively relational pm).

1. *Jede trpm-Kontraktion erfüllt die Bedingungen C1-8.*

2. *Jede Kontraktion, welche C1-8 erfüllt, kann durch eine trpm-Kontraktion dargestellt werden.*

Beweis für die Repräsentation von C1-6.

1. *Jede pm-Kontraktion erfüllt C1-6.*

Zum Beispiel *Recovery*: $K = K - A + A$.

$$\text{Z.z. } K \subseteq \mathrm{Cn}(\bigcap s(K \perp A) \cup A)$$

$$\text{d.h. wenn } K \vdash B \text{, dann } \bigcap s(K \perp A), A \vdash B$$

Grenzfall: Wenn $K \nvdash A$, dann $K \perp A = \emptyset$ und so $s(K \perp A) = \{K\}$—fertig. Weiter mit dem Hauptfall $K \vdash A$. Dann gilt:

(AM82) $$\bigcap(K \perp A) = K \cap \mathrm{Cn}(\neg A).$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{K \vdash B}{K \vdash \neg A \vee B} \qquad \neg A \vdash \neg A \vee B}{K \cap \mathrm{Cn}(\neg A) \vdash \neg A \vee B} \qquad \dfrac{\text{(AM82)}}{K \cap \mathrm{Cn}(\neg A) \subseteq \bigcap s(K \perp A)}}{\bigcap s(K \perp A) \vdash \neg A \vee B}}{\bigcap s(K \perp A), A \vdash B}$$

2. *Jede (C1-6)-Kontraktion läßt sich als pm-Kontraktion darstellen.*

Wir nehmen an, $K - (\ )$ sei eine Kontraktion (für eine beliebig gewählte Theorie K), welche C1-6 erfüllt. Wir definieren eine kanonische Auswahlfunktion σ (für K):

$$(\sigma) \qquad \sigma(K \perp A) = \begin{cases} \{X \in K \perp A : K - A \subseteq X\}, & \text{falls } K \perp A \neq \emptyset; \\ \{K\}, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Nun ist zu zeigen, daß σ für K ein Funktion von der zuvor definierten Sorte s_K ist; im einzelnen:

(1) σ ist wohldefiniert, d.h. aus $K \perp A = K \perp B$ folgt $\sigma(K \perp A) = \sigma(K \perp B)$.

(2) $\sigma(K \perp A) = \{K\}$, falls $K \perp A = \emptyset$.

(3) $\sigma(K \perp A) \subseteq K \perp A$, falls $K \perp A \neq \emptyset$.

(4) $\sigma(K \perp A) \neq \emptyset$.

(5) $K - A = \bigcap \sigma(K \perp A)$.

(1) folgt aus *Congruence* (C6). (2) und (3) folgen unmittelbar aus (σ).

Im Grenzfall $K \perp A = \emptyset$, d.h. $\vdash A$, ist (4) nach (σ) erfüllt. Anderenfalls haben wir $\nvdash A$ und so gilt nach *Success* (C2) $K - A \nvdash A$. Dann $\exists X \supseteq K - A$ mit $X \in K \perp A$ und wieder ist (4) erfüllt.

Ad (5). Die Beziehung $K - A \subseteq \bigcap \sigma(K \perp A)$ ergibt sich unmittelbar aus (σ) und *Inclusion* (C3). Es bleibt zu zeigen:

$$(*) \qquad \text{Wenn } B \notin K - A, \text{ dann } B \notin \bigcap \sigma(K \perp A)$$

Fall $A \notin K$. Dann ist nach *Vacuity* (C4) $K - A = K$ und nach (σ) ist $K = \bigcap \sigma(K \perp A)$. Also ist (*) wahr.

Fall $A \in K$. (*) ist trivialerweise wahr, wenn $B \notin K$. Also nehmen wir ferner an, $B \in K$. Es gilt jetzt eine Menge X zu finden so, daß

$$\text{(a) } X \in K \perp A \quad \text{und} \quad \text{(b) } K - A \subseteq X \quad \text{und} \quad \text{(c) } B \notin X.$$

/...

Annahmen: $A \in K,\ B \in K,\ B \notin K - A$. Finde X s.d.

$$\text{(a) } X \in K \perp A \quad \text{und} \quad \text{(b) } K - A \subseteq X \quad \text{und} \quad \text{(c) } B \notin X\ !$$

Lemma (AGM85, 2.4): $\dfrac{X \in K \perp C \quad D \in K \quad X \nvdash D}{X \in K \perp D}$

Ad b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \in K}\text{Ann.}}{K - A, A \vdash B}\textit{Recovery} \qquad \dfrac{}{K - A \nvdash B}\text{Ann.}}{K - A, \neg A \nvdash B}}{K - A \nvdash A \vee B}}{\exists X \in K \perp A \vee B : K - A \subseteq X}$$

Ad c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X \in K \perp A \vee B}\text{b)}}{X \nvdash A \vee B}}{B \notin X}$$

Ad a)

$$\dfrac{\dfrac{}{A \in K}\text{Ann.} \qquad \dfrac{}{X \in K \perp A \vee B}\text{b)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X \in K \perp A \vee B}\text{b)}}{X \nvdash A \vee B}}{X \nvdash A}}{X \in K \perp A}\text{Lemma}$$

■

Wir haben gezeigt:

Repräsentation für C1-6. *Eine Kontraktionsoperation erfüllt gd die Bedingungen (C1-6), wenn es eine pm-Kontraktionsop. ist.*

Für die Definition von pm-Revisionen nehmen wir die Levi-Identität als Anleitung:

$$K * A = K - \neg A + A.$$

Also definieren wir eine **pm-Revision** so:

$$K * A = \mathrm{Cn}(\bigcap s(K \perp \neg A) \cup \{A\}).$$

Dann dürfen wir aus der Harmonie zwischen C- und R-Postulaten schließen:

Repräsentation für R1-6. *Eine Revisionsoperation erfüllt gd die Bedingungen (R1-6), wenn es eine pm-Revisionsop. ist.*

Sphärensysteme

Lewis' Semantik für kontrafaktische Konditionale

Der **Ramsey Test**

$$A > B \in K \text{ gdw } B \in K * A.$$

$K * A$: Die Revision der *Theorie* K so, daß A darin enthalten ist.

Das ist eine epistemische Version des **Stalnaker Tests**:

$$A > B \text{ in } w \text{ gdw } B \text{ in } (w * A).$$

$w * A$: Die w-ähnlichste *Welt* in der A der Fall ist.

Vielleicht gibt es nicht immer genau eine "ähnlichste" Welt. In diesem Fall sollten wir **Lewis' Variante** des Stalnaker Tests vorziehen:

$$A > B \text{ in } w \text{ gdw } B \text{ in allen Welten in } (w * A).$$

$w * A$: Die w-ähnlichsten *Welten* in denen A der Fall ist.

Lewis' Sphärensysteme modellieren diese Idee:

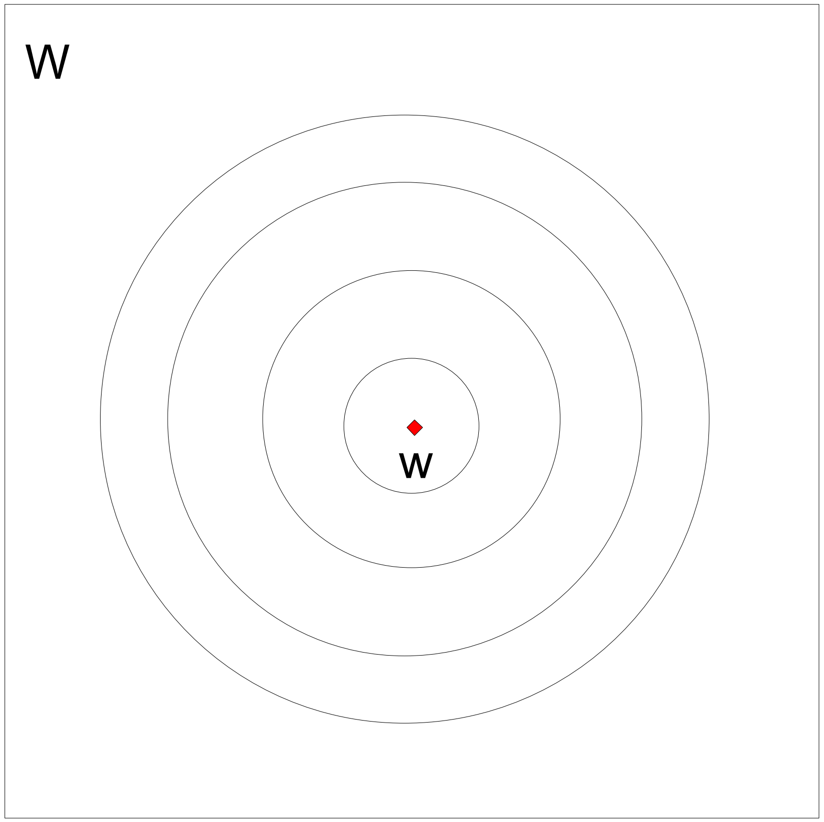
- Ausgehend von einer Welt w werden alle Welten in Sphären der Ähnlichkeit ("Nähe") zu w geordnet.
- Um $A > B$ zu bewerten, betrachten wir die nächste Sphäre, die A-Welten enthält (und fragen, ob dort B der Fall ist) — falls es A-Welten gibt; anderenfalls ist $A > B$ trivial wahr.

Sphärensysteme eignen sich auch um Revisionen (und Kontraktionen) zu modellieren (Grove 1988):

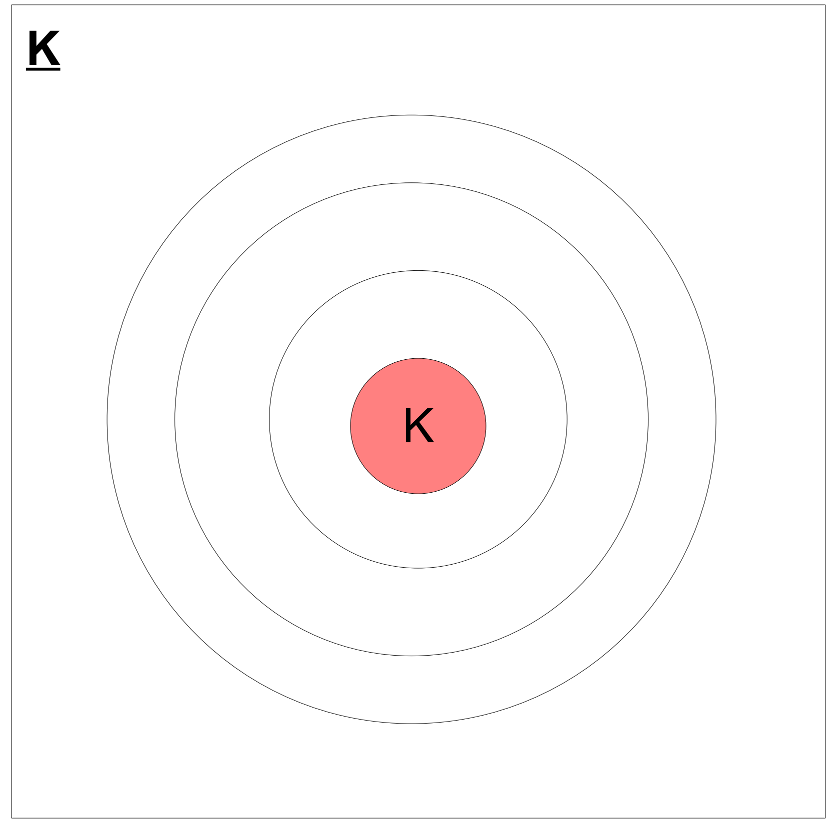
- Eine Theorie wird nicht durch eine einzelne Welt (maximal konsistente Theorie), sondern durch eine Menge von Welten dargestellt: diejenigen Möglichkeiten, welche die Theorie zuläßt.
- Ausgehend von einer Theorie K werden alle *Rückfallpositionen* für K in Sphären der Präferenz ("Nähe") aus K's Sicht geordnet.
- Um $K * A$ zu finden, betrachten wir die nächste Sphäre, in der es Möglichkeiten gibt, A zuzulassen und modellieren $K * A$ als die Menge der A-Welten in dieser Sphäre — falls es A-Welten gibt; anderenfalls ist $K * A$ inkonsistent.

Adam Grove, Two modellings of theory change, *J. of Philos. Logic* 17 (1988), 157-170.

Ähnlichkeit mit w

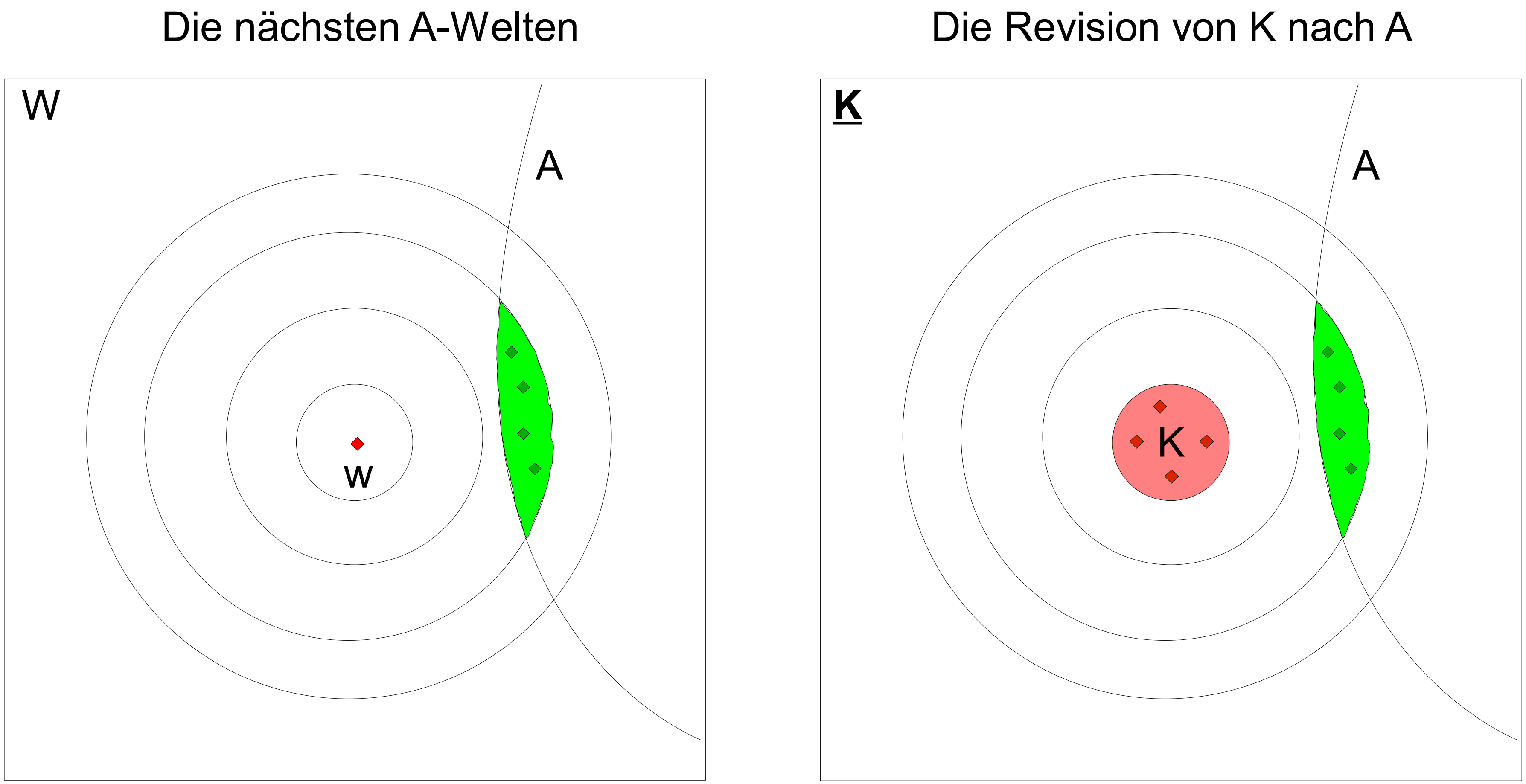


Rückfallpositionen für K



Links: Ein Sphärensystem (Zwiebel) um die Welt w.

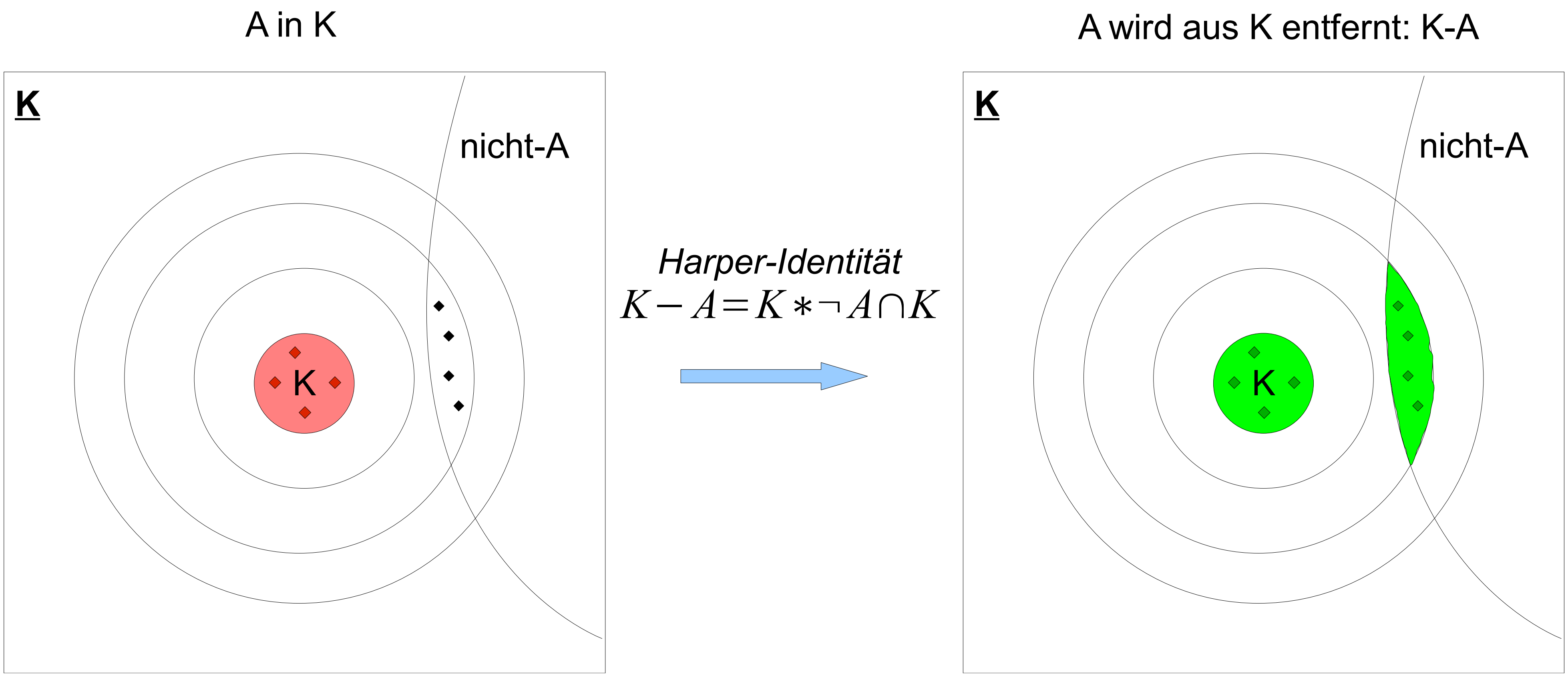
Rechts: Eine Zwiebel um die Theorie K.



Links: $w * A$ (grün) besteht aus den A-Welten, die w am nächsten sind.

Rechts: $K * A$ (grün) ist derjenige Teil der von K bevorzugten Rückfallposition, in der A wahr ist.

Über die Harper-Identität lassen sich so auch Kontraktionen darstellen:



Links: K mit seinen Rückfallpositionen.

Rechts: Mögliche $\neg A$-Welten werden auf die von K bevorzugte Weise zu K hinzugenommen.

Sei K eine Theorie, $[K]$ die Menge der für K "möglichen Welten".

- Etwa genauer gehen wir von der Sprache L aus, in der K formuliert ist. Dann definieren wir W ("mögliche Welten") als die Menge aller maximal konsistenten Mengen in L. $[K]$ ist dann die Menge aller maximal-konsistenten Erweiterungen von K.

Ein **Sphärensystem** (W, K) für K ist eine Mengenfamilie $\mathfrak{S}_K$ so, daß

1. $[K] \in \mathfrak{S}_K$ und $[K] \subseteq X$, $\forall X \in \mathfrak{S}_K$;
2. $W \in \mathfrak{S}_K$;
3. $\mathfrak{S}_K$ ist vollständig geordnet unter $\subseteq$ (d.h. $\forall X, Y \in \mathfrak{S}_K$: entweder $X \subseteq Y$ oder $Y \subseteq X$);
4. $\forall A$: wenn $[A] \neq \emptyset$, dann gibt es eine kleinste Sphäre $S \in \mathfrak{S}_K$ mit $[A] \cap S \neq \emptyset$.

(Ein Sphärensystem für K ist also wie eine Zwiebel (oder russische Puppe): $[K]$ ist der Kern (kleinste Puppe) und W ist die Schale (größte Puppe).)

Um $K * A$ in einem Sphärensystem zu definieren müssen wir jetzt etwas genauer vorgehen, um den Grenzfall $\neg A \in \mathrm{Cn}(\emptyset)$ einzubeziehen. (Die vorhergehenden Bilder bezogen sich nur auf den Hauptfall, daß kontingenterweise $\neg A \in K$.)

- Für jede *nichtleere* Menge $X \subseteq W$ in $\mathfrak{S}_K$ sei $S_X \in \mathfrak{S}_K$ die kleinste Sphäre deren Schnitt mit X nicht leer ist. Dann definieren wir

$$(*) \qquad K * A = \begin{cases} S_{[A]} \cap [A], & \text{falls } A \text{ konsistent ist;} \\ \mathrm{Cn}\,(\bot) & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

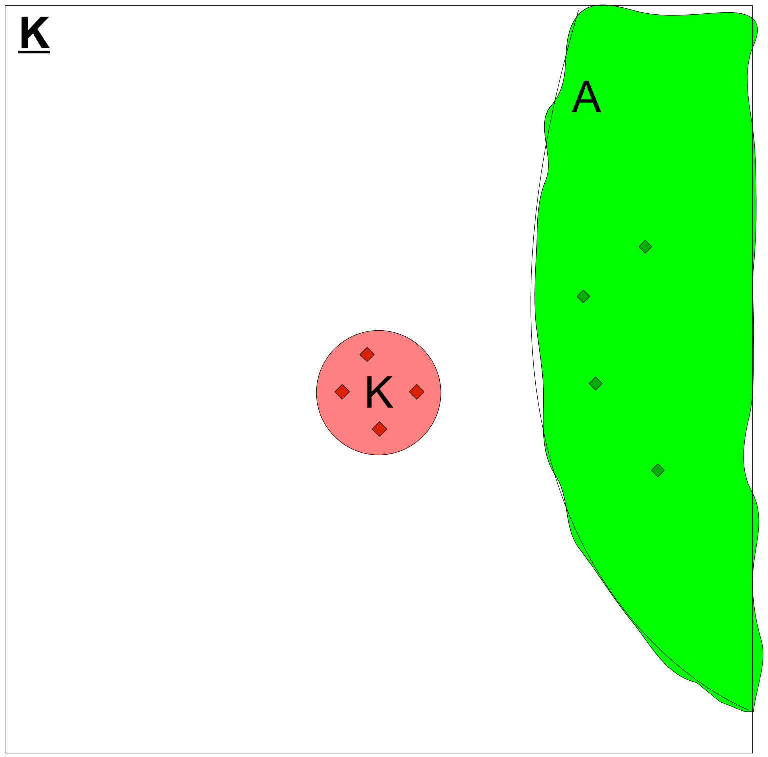
Repräsentation. *(Grove 1988)*

1. *In jedem Sphärensystem für K erfüllen Revisionen von K nach (*) die AGM-Postulate (R1-8), und*
2. *wenn eine Revisionsoperation die AGM-Postulate erfüllt, dann läßt sich jede Revision $K * A$ in einem Sphärensystem für K konstruieren.*

Über die Harper-Identität gibt es dann eine analoge Repräsentation für Kontraktionen.

Full Meet und Maxichoice

Full meet revision

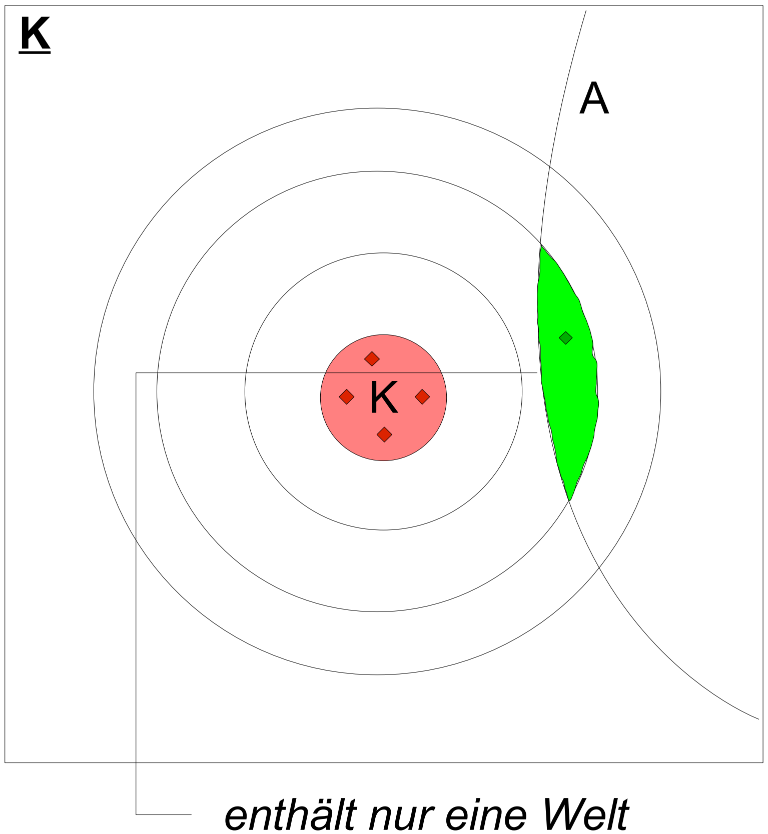


Keine Sphären

Wenn $K * A = \mathrm{Cn}(\bigcap(K \perp \neg A) \cup A)$, dann findet keine Auswahl in $K \perp \neg A$ statt.

Das korrespondierende Sphärensystem ist trivial. $K * A = \mathrm{Cn}(A)$ ist zu klein!

Maxichoice revision



Wenn $s(K \perp \neg A)$ genau eine maximal konsistente Theorie M enthält, dann ist $K * A = M + A$ ebenfalls maximal konsistent, d.h. eine "Welt" und damit zu groß!

Das entspricht der (Stalnaker-)Bedingung, daß jeder X-Schnitt einer Sphäre, $S_X \cap X$, genau ein Element enthält.

Sphären und Reste

Das Repräsentationsresultat zeigt, daß es eine Sphärensysteme undPartial Meet-Konstruktionenen einander "entsprechen". Das kann man sich auch ohne Umweg über die Postulate direkt klarmachen:

- Es gibt eine Bijektion zwischen $[\neg A]$ und $K \perp A$. (Wir betrachten hier nur den interessanten Fall $A \in K$ und A konsistent.)

(Für $X \subseteq W$ sei $|X| = \{A : \forall y \in X : y \models A\}$; $\exists!$ stehe für "es gibt genau ein ...")

- ◦ Von Sphären zu Resten: Für jedes $x \in [\neg A]$ gilt: $|[K] \cup \{x\}| \in K \perp A$.
- ◦ Von Resten zu Sphären: Für jedes $H \in K \perp A$ gilt: $\exists! x \in [\neg A]$ mit $x \in H$.

- Eine Sphäre$_K$ wählt in $[\neg A]$ gd aus, wenn eine Auswahlfunktion$_K$ in $K \perp A$ auswählt.