Goethe-Universität
Frankfurt am Main
Institut für Philosophie

Mai 2016

Was ist so gut an (guter) Logik?

André Fuhrmann

Denken und Folgern

Denken ...

- statisch: Vorstellen / Glauben / “Repräsentieren”. Beispiele:
  - Sich die Zeit als begrenzt oder unendlich denken (vorstellen).
  - Denken (glauben), daß Sokrates ein Mensch war.
  - Peter denkt, daß der Motor anspringt, sobald er den Schlüssel dreht.
- dynamisch: Schließen (Folgern). Beispiele:
  - Wenn die Zeit begrenzt wäre, dann gäbe es einen letzten Zeitpunkt. Ein letzter Zeitpunkt ist aber gar nicht möglich, denn ... Also ist die Zeit nicht begrenzt.
  - Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.
  - Peter weiß, daß der Tank gut gefüllt ist. Er hat das Auto erst vor wenigen Minuten geparkt. Also wird es jetzt wohl einwandfrei wieder anspringen.

Denken im dynamischen Sinne, d.h. als Aktivität / Prozeß beinhaltet oft **Folgern**.

Was ist Folgern?

- Übergang von bestimmten Vorstellungen (Sätzen, **Prämissen**) zu einer bestimmten weiteren Vorstellung (einem Satz, einer **Konklusion**):

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad A_3 \ \ldots \ A_n}{C}$$

- Dabei ist im Erfolgsfall (“richtiges” Folgern) “mehr oder weniger” *garantiert*, daß wenn alle Prämissen wahr sind, dann muß auch die Konklusion wahr sein. (Fehlschlüsse sind eben solche Formen des Schließens, bei denen die Garantie der **Wahrheitsübertragung** nicht besteht.)
- Deduktives (logisches) Schließen: Die Garantie der Wahrheitsübertragung ist absolut; anderenfalls handelt es sich um Fälle nicht-deduktiven Schließens.

Beispiel für einen **nicht-deduktiven Schluß**:

(1) Der Tank ist gut gefüllt.

(2) Das Auto fuhr soeben noch.

---

(3) Das Auto wird jetzt fahren.

- Der Schluß ist ziemlich gut.
  Im Hintergrund wirkt eine *Annahme*, die gewöhnlich richtig ist: Ein Auto mit gefülltem Tank, das soeben noch fuhr, wird gleich wieder anspringen.
- Die Annahme ist nicht zwingend wahr, aber sie ist "genügend wahr".
  (Wäre das nicht der Fall, würde sich niemand mit Autos abgeben wollen.)

Wir bleiben hier beim deduktiven, d.h. logischen Schließen.

Ein typischer guter, **logischer (deduktiver) Schluß**:

(1) Wenn (A :) Sokrates ein Mensch ist, dann (B :) ist Sokrates sterblich.

(2) (A :) Sokrates ist ein Mensch.

---

(3) (B :) Sokrates ist sterblich.

Der Schluß ist von der Form des *Modus Ponens* (MP):

$$\frac{\text{wenn } A, \text{ dann } B \qquad A}{B}$$

Dagegen ein typischer **Fehlschluß**:

(1) Wenn ein Auto grau lackiert ist,
dann kann es im Verkehr leicht übersehen werden.

(2) Das Auto ist nicht grau lackiert.

---

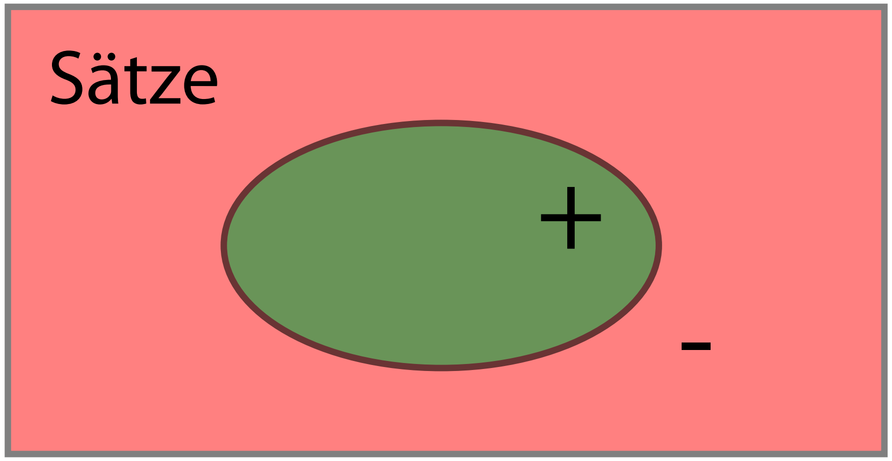
(3) Das Auto kann im Verkehr nicht leicht übersehen werden.

Dieser Schluß ist von der Form:

$$\frac{\text{wenn } A,\ \text{dann } B \qquad \text{nicht } A}{\text{nicht } B}$$

(Das Auto könnte zB nicht grau lackiert sein, sondern einen Tarnanstrich haben! Da diese Verwechslung von hinreichenden mit notwendigen Bedingungen gar nicht so selten vorkommt, hat sie einen gelehrten Namen: *affirmatio consequentiæ*.)

Die Aufgabe der Logik ist es, eine **vollständige Theorie** aller **guten** logischen Sätze und Schlüsse aufzustellen. Indem die Theorie vollständig ist, identifiziert sie so auch indirekt alle logisch schlechten Sätze und Schlüsse (Fehlschlüsse): Das sind einfach diejenigen, die *nicht* Teil der logischen Theorie sind.



Offensichtliche Fragen:

- Was heißt **Theorie**?
- Was heißt **gut**?
- Was heißt **vollständig**?

Logische Theorie

Was ist eine **Theorie**?

– Zumindest dies: Eine **Menge von Thesen** über einen bestimmten Gegenstandsbereich.

Beipiel: **Theorie der (einfachen) Zahlzeichen.**

Gegenstandsbereich: Ausdrücke einer Sprache.
Ziel: Zahlzeichen “herausfischen”.

Erste Möglichkeit: als *Liste*

0 ist ein Zahlzeichen
1 ist ein Zahlzeichen
2 ist ein Zahlzeichen
...

Für jedes Zahlzeichen ein Lexikoneintrag!?

Bessere Möglichkeit (und Teil der Grammatik vieler natürlicher Sprachen) ...

Vokabular:

- Grundzeichen (Ziffern): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Verknüfungsoperation ("Nebeneinanderschreiben"), zB:

$$\frac{1 \qquad 0}{10}$$

(Grammatische) Regeln:

- Jede Ziffer ist ein Zahlzeichen.
- Jede Verknüpfung von Zahlzeichen ist ein Zahlzeichen.
- (Das ist alles.)
- Konvention: Anfängliche 0 dürfen wir (meist) weglassen (zB 01 wird 1).

Statt in Form einer unendlichen Liste, präsentieren so wir die Theorie der Zahlzeichen in *axiomatischer* Form:

Axiome

(A1) 0 ist ein Zahlzeichen

(A2) 1 ist ein Zahlzeichen

...

(A10) 9 ist ein Zahlzeichen

Regel

$$\frac{x \text{ ist ein Zahlzeichen} \qquad y \text{ ist ein Zahlzeichen}}{xy \text{ ist ein Zahlzeichen}}$$

Definition

These der Theorie der Zahlzeichen ist genau das, was sich in endlich vielen Schritten aus den Axiomen mit Hilfe der Regel ableiten läßt.

Resultat

Endliche (und übersichtliche) Präsentation einer *unendlichen* Menge von Aussagen (Theorie).

Logik als axiomatische Theorie

Schema einer axiomatischen Theorie:

Axiom(e) ...

Ableitungsregel(n)

$$\frac{\ldots \quad \ldots}{\ldots}$$

Definitionen

1. **These** ("Theorem") der Theorie ist genau das, was sich in endlich vielen Schritten aus den Axiomen (manchmal: *dem* Axiom) mit Hilfe der Regel(n) *ableiten* läßt.
2. Wenn Sie die Sätze $A_1 \ldots A_n$ als wahr annehmen (d.h. als Axiome der Theorie hinzufügen) und daraufhin den Satz B ableiten können, dann haben Sie gezeigt, daß der Übergang
$$A_1 \ldots A_n \Rightarrow B$$
ein **zulässiger Schluß** (in dem betreffenden ax. Sys.) ist.

Frage:

Wie können wir die "logisch guten" Sätze vollständig in einer axiomatischen Theorie erfassen ("axiomatisieren")?

Antwort:

1. Alle Axiome sollten gut sein.
2. Die Regeln sollten von guten Prämissen immer nur zu guten Konklusionen führen.
3. Wenn ein Satz logisch gut ist, dann sollte er auch in der Theorie enthalten (= ableitbar) sein — d.h.: Wenn er nicht "drin" ist, dann ist er auch nicht gut.

Wenn diese drei Bedingungen erfüllt sind, dann hat die Theorie die logisch guten Sätzen **richtig** (1 und 2) und **vollständig** (3) erfaßt.

Ad 1 („gute Axiome“): Logisch gute Sätze

Man vergleiche:

1. Die Mannschaft hat gewonnen **und** kehrt mit einem Pokal zurück.

Wahr oder falsch? Es kommt darauf an ...

2. **Wenn** (die Mannschaft gewonnen hat **oder** sie mit einem Pokal zurückkehrt), **dann** hat die Mannschaft gewonnen.

Wahr oder falsch? Es kommt darauf an ... (Die Mannschaft könnte mit einem Pokal zurückkehren ohne gewonnen zu haben.)

3. **Wenn** (die Mannschaft gewonnen hat **und** sie mit einem Pokal zurückkehrt), **dann** hat die Mannschaft gewonnen.

Wahr oder falsch? Worauf kommt es hier noch an? — Nur noch auf die Bedeutung der Ausdrücke **Wenn...dann...** und **und** – und auf sonst nichts!

Gleichgültig, welchen Wahrheitswert die Teilsätze von (3) oder andere Sätze haben, der Satz (3) ist *immer* wahr.

- **Logisch wahr** ("gut") ist ein Satz, wenn er wahr sein muß, gleichgültig, was wir über die Wahrheit seiner (echten) Teilsätze annehmen.
  - tautologisch wahr, Tautologie.
  - Es kommt nicht darauf an, was in der Welt zufällig der Fall ist.
  - Wahrheit nur aufgrund der *Bedeutung* bestimmter Teilsausdrücke. (↗ semantische Theorie des Folgerns).
  - Wahrheit aufgrund der *Form* eines Satzes (↗ syntaktische Theorie des Folgerns).

Ad 2 ("gute Regeln"): Logisch gute (zulässige/gültige) Schlüsse

Man vergleiche:

$$(*) \qquad \frac{\text{Wenn } A \text{ dann } B \qquad \text{nicht } A}{\text{nicht } B}$$

Gut oder schlecht? – Es kommt darauf an:

A: *Die Mannschaft gewinnt* $\qquad$ B: *Sie bringt einen Pokal mit.*

Die Prämissen können wahr sein während die Konklusion falsch ist! (Vielleicht gibt es einen Pokal als Trostpreis.) — Sehr schlecht!

(*) *garantiert* also nicht den Übergang von wahren Prämissen zu wahren Konklusionen.

- Fehlschlüsse erlauben **Gegenbeispiele**: Sie geben nicht in allen Fällen die Wahrheit der Prämissen an die Konklusion weiter.

Modus Ponens

(MP) $$\frac{\text{Wenn } A \text{ dann } B \qquad A}{B}$$

Gut oder schlecht? – **Zuverlässiger** Übergang von wahren Prämissen zu einer wahren Konklusion. Sehr gut! (*Gültiger Schluß.*)

- Logisch **gültig** ("gut") ist ein Schluß, wenn die Konklusion wahr sein muß unter der Voraussetzung, daß die Prämissen wahr sind. (Man braucht nicht in der Welt nachzuschauen, ob die Konklusion auch wirklich wahr ist.)
  - Gültige Schlüsse sind *wahrheitsübertragend*: Sie geben die Wahrheit der Prämissen immer an die Konklusion weiter.

Ad 3 ("alles drin"): Richtige und vollständige Theorien

Wir sagten:

> Ein Satz soll logisch gut sein, wenn er wahr sein muß, gleichgültig, was wir über die Wahrheit der darin vorkommenden Teilsätze annehmen.

- Solche Annahmen sind Teile von Beschreibungen, wie die Welt sein könnte (**Modelle**). Wenn wir solche Annahmen machen, dann fassen wir bestimmte Modelle ins Auge und schließen andere aus.
- **Logisch wahr** ("gut", Tautologien) sind also solche Sätze, die **in allen Modellen** ("immer") wahr sind. **Nicht logisch wahr** ("logisch schlecht") sind dagegen solche Sätze, die **manchmal** (d.h. in mindestens einem Modell) falsch sind.
(Und "logisch ganz schlecht" (Kontradiktionen) sind solche Sätze, die immer (in allen Modellen) falsch sind.)

Wann ist nun eine axiomatische Theorie der Logik richtig und vollständig?

- **Richtig**: Wenn ein Satz sich in der Theorie ableiten läßt, dann ist er immer (= in allen Modellen) wahr:

  Ableitbar $\Longrightarrow$ in allen Modellen wahr.

- **Vollständig**: Wenn ein Satz immer wahr ist, dann läßt er sich auch in der Theorie ableiten. (Oder, anders gesagt: Unter der Annahme, daß der Satz sich *nicht* ableiten läßt, können wir zeigen, daß er manchmal falsch sein muß (Gegenmodell).)

  In allen Modellen wahr $\Longrightarrow$ ableitbar.

- **Richtig & vollständig**: Die Theorie greift mit ihrem Begriff der Ableitbarkeit *genau* auf die Sätze zu, die in allen Modellen wahr sind.

In der **Formalen ("Mathematischen") Logik**

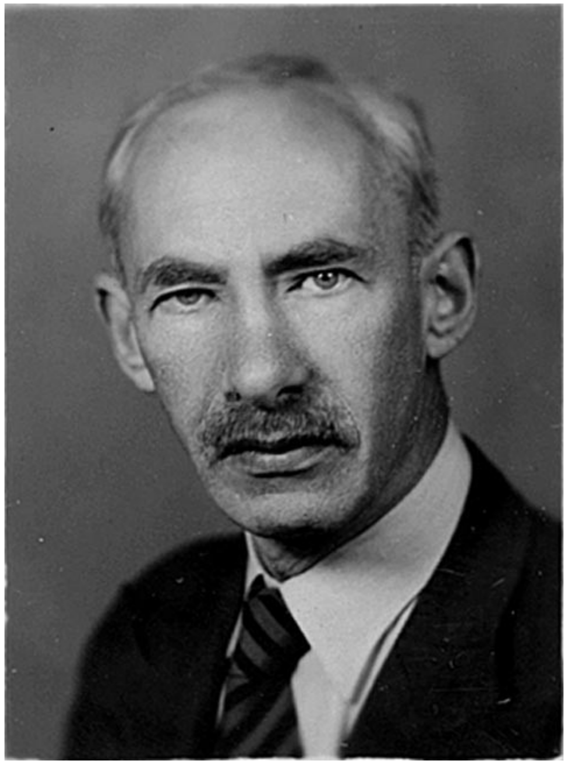
- beschreiben wir den logisch-grammatischen *Aufbau* von Sprachen,
- betrachten wir bestimmte *axiomatische Theorien* in solchen Sprachen,
- definieren wir genau, was wir unter einem *Modell* für eine solche Sprache verstehen wollen,
- und beweisen dann, daß bestimmte axiomatische Theorien *richtig & vollständig* (bezüglich der beschriebenen Klasse von Modellen) die logischen Sätze identifizieren.

(*N.B.* Dies alles (und mehr) in der Vorlesung "Logik", die in Ffm im Rahmen des Philosophiestudiums gelehrt wird und für alle Studenten der Philosophie Pflicht ist.)

Beispiel: Eine (richtige und vollständige)

Axiomatisierung der klassischen Aussagenlogik

(mit $\neg$ (**nicht**), $\wedge$ (**und**), $\vee$ (**oder**), $\rightarrow$ (**wenn-dann**)).
Nach David Hilbert (1862–1943) und Paul Bernays (1888–1977).

Grundlagen der Mathematik, Berlin 1934 (Bd. 1) und 1939 (Bd. 2).

$$A \to (B \to A)$$

$$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$$

$$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$$

$$A \wedge B \to A \qquad A \wedge B \to B$$

$$(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$$

$$A \to A \vee B \qquad B \to A \vee B$$

$$A \to C \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

$$A \to \neg\neg A \qquad \neg\neg A \to A$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\ \mathrm{MP}$$

Was ist eigentlich so gut daran, “logisch gut” zu sein?

Logik spielt eine wichtige Rolle bei der Hervorbringung von **Wissen**.

Die Bemühung um Wissen ist im allgemeinen mühselig und riskant.

- **Mühselig**: Wir müssen uns in der Welt umsehen und relevante Information sammeln.
- **Riskant**: Es warten viele Fallen darauf, zuzuschnappen: Die Möglichkeiten sich zu irren, sind im allgemeinen unüberschaubar.

Dagegen bietet Logik risikoloses Wissen gratis an:

- **Gratis**: Wir müssen uns in der Welt nicht nach relevanter Information umsehen. Alle relevante Information ist schon in unserem Besitz. (“Logisches Wissen ist a priori.”)
- **Risikolos**: Durch logisches Schließen aus wahren Prämissen gewinnen Sie Information, die unmöglich falsch sein kann.

Genauer:

- Ist A ein logischer *Satz* dann können Sie **sicher wissen**, daß A wahr ist (gleichgültig, "worüber A redet").
- Ist $A_1 \ldots A_n \Rightarrow B$ ein logischer *Schluß*, dann können Sie **sicher wissen**, daß unter der Voraussetzung, daß $A_1 \ldots A_n$ wahr sind, B wahr sein muß (gleichgültig, für welchen Aussagen diese Buchstaben stehen).

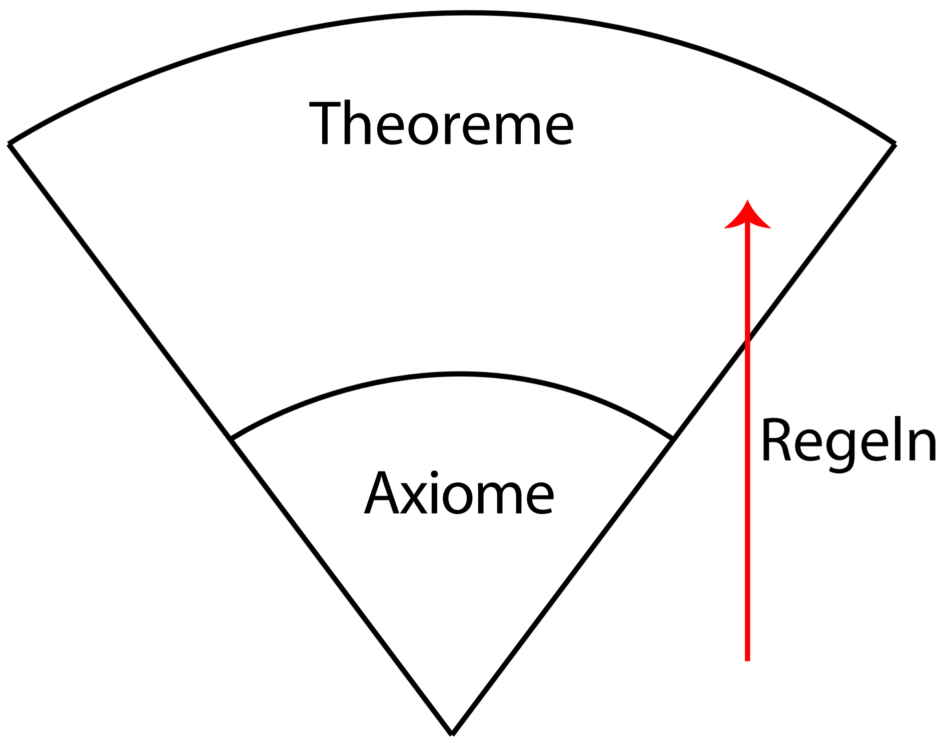
Die Logik im Gefüge der Theorien

Bild: Wir sammeln Information über einen bestimmten Gegenstandsbereich, zB:

– U-Bahn-Verkehr
– die Verwandschaft mütterlicherseits
– natürliche Zahlen
– Verhalten von Individuen unter Gruppendruck
– Merkmale des deutschen Kriminalfilms 1972–1989
– Blutkreislauf
– offizielle Verlautbarungen eines Gesetzgebers
– ...

Dann “werfen wir die Logik-Maschine an”:

- wir schließen die gesammelte Information (als Axiome aufbereitet) unter logischer Konsequenz ab (= wir wenden die Regeln an).



Drei Funktionen der Logik-Maschine:

Die expansive Funktion.

Der logische Abschluß des anfänglichen Datenmaterials expandiert den Bereich unseres Wissens. Das Vertrauen, daß wir in das anfängliche Datenmaterial setzen, *dürfen* wir auch in das logisch daraus erzeugte Material setzen.

Die kontraktive (kritische) Funktion.

Das Vertrauen, daß wir in das anfängliche Datenmaterial setzen, *müssen* wir auch in das logisch daraus erzeugte Material setzen. D.h. wenn sich durch logischen Abschluß ein Widerspruch nachweisen läßt, dann müssen wir kritisch in die Theorie eingreifen und bestimmte Überzeugungen aufgeben.

Die rechtfertigende Funktion.

Logische Herleitung ist eine (die stärkste?) Form epistemischer Rechtfertigung.
Wer aufgefordert wird, eine Behauptung zu begründen und diese aus Prämissen logisch herleiten kann, die der kritisch Nachfragende zugesteht, der ist seiner Begründungspflicht in bestmöglicher Weise nachgekommen. Die Logik-Maschine ist zugleich eine Begründungsmaschine.
(↗ Teil II.)

Die Logik-Maschine ist universal.

- Jede Theorie (über jeden Gegenstandsbereich) *kann* unter logischer Konsequenz abgeschlossen werden und so Wissen expandieren und rechtfertigen.
- Jede Theorie *muß* unter logischer Konsequenz abgeschlossen werden, sofern uns an einer Begrenzung des Irrtumsrisikos liegt (die kritische Funktion).

Deshalb:

Jede Theorie ist eine Erweiterung der logischen Theorie.

Jede Theorie können wir uns im Prinzip so denken: Sie *erweitert* die logischen Axiome und Regeln um Axiome (und Regeln?), die sich auf den spezifischen nicht-logischen Gegenstandsbereich der Theorie beziehen: auf Fahrplaninformationen, Elementares über Verwandtschaftsverhältnisse, Zahlen, Individuen und Gruppen, oder auch Gesetzestexte, etc.). Insofern ist Logik Bestandteil *jeder* Theorie.

Einige Literaturhinweise

- Smullyan, Raymond, *Logik-Ritter und andere Schurken*, Frankfurt/M. (Fischer TB) 1991.
- Strobach, Niko, *Einführung in die Logik*, Darmstadt (Wiss. Buchges.) 2011.
- Beckermann, Ansgar, *Einführung in die Logik*, Berlin (De Gruyter), 2011.
- von Kutschera, Franz und Alfred Breitkopf, *Einführung in die moderne Logik*, Freiburg (Karl Alber), 2007.
- Crossley, John N. et al., *What is Mathematical Logic?*, New York (Dover), 1972.
- Ebbinghaus, H.-D., J. Flum und W. Thomas, *Einführung in die Mathematische Logik*, Mannheim etc. (B.I. Wissenschaftsverlag) 1992.
- Rautenberg, Wolfgang, *Einführung in die Mathematische Logik*, Wiesbaden (Vieweg u. Teubner), 2008.

Viele klassische Lehrbücher in englischer Sprache von Kleene, Mendelson, Shoenfield, Smullyan u.a.

(Ende des ersten Teils)

Wenn Logik rechtfertigt, was rechtfertigt dann die Logik?

Wie funktioniert logische Rechtfertigung?

Ein logischer Schluß:

A Sokrates ist ein Mensch.

B Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist er sterblich.

— Also:

Z Sokrates ist sterblich.

Unsere Idee (Hoffnung?): Logische Schlüsse übertragen **epistemische Rechtfertigung** von den Prämissen auf die Konklusion. In diesem Fall also:

$$\frac{A \text{ gerechtf.} \qquad B \text{ gerechtf.}}{Z \text{ gerechtf.}}\ (C)$$

Jedoch gibt es da vielleicht ein kleines Problem ...

Schildkrötenlogik

Lewis Carroll
(Charles Lutwidge Dodgson)
1832–1898

Was die Schildkröte dem Achilles sagte
Mind 4 (1895):

[...] “Wollen Sie gern etwas über eine Rennbahn erfahren, von der die meisten Menschen glauben, daß man sie in zwei oder drei Schritten durchmessen kann, während sie *in Wirklichkeit* aus einer unendlichen Anzahl von Abständen besteht, von denen jeder länger als der vorhergehende ist?”

“Aber sehr gern!”, sagte der griechische Held.
[...]

"Jener schöne erste Satz von Euklid", murmelte die Schildkröte verträumt. [...]*

A Sind zwei Dinge einem dritten gleich, so sind sie einander gleich.

B Die zwei Seiten dieses Dreiecks sind einer weiteren gleich.

Z Die zwei Seiten dieses Dreiecks sind einander gleich.

Wer Euklid gelesen hat, wird wohl zugeben, daß Z logisch aus A und B folgt, so daß jeder, der A und B akzeptiert, Z als wahr akzeptieren muss?"

"Ohne Zweifel."

"[K]önnte es nicht einen Leser geben, der sagen würde: Ich akzeptiere A und B als wahr, aber ich akzeptiere *nicht* die Schlußfolgerung?"

"Gewiss."

"Also gut. Ich möchte, daß Sie *mich* als einen Leser [dieser] Sorte betrachten und mich mit Mitteln der Logik dazu zwingen, Z als wahr zu akzeptieren."

* Auslassungen im weiteren nicht markiert.

“Ich soll Sie also zwingen, Z zu akzeptieren”, sagte Achilles nachdenklich. “Und Ihre gegenwärtige Position ist die, daß Sie A und B akzeptieren, *nicht aber* die Folgerung ...”

“Nennen wir sie C”, sagte die Schildkröte.

C: Wenn A und B wahr sind, muß Z wahr sein.”

“Dann muß ich Sie bitten, C zu akzeptieren,” sagte Achilles.

“Ich werde das tun”, sagte die Schildkröte, “sobald Sie es in Ihrem Notizbuch niedergeschrieben haben. Schreiben Sie auf, was ich Ihnen diktiere:”

A Sind zwei Dinge einem dritten gleich, so sind sie einander gleich.

B Die zwei Seiten dieses Dreiecks sind einer dritten gleich.

C Wenn A und B wahr sind, dann muß auch Z wahr sein.

Z Die zwei Seiten dieses Dreiecks sind einander gleich.”

“Sie sollten es D nennen, nicht Z”, sagte Achilles. “*es folgt* unmittelbar den drei andern. Wenn Sie A und B und C akzeptieren, *müssen* Sie Z akzeptieren.”

“Und warum muß ich das?”

“Weil es *logisch* daraus folgt. Wenn A und B und C wahr sind, *muss* Z wahr sein. *das* können Sie wohl nicht bestreiten?”

“Wenn A und B und C wahr sind, *muss* Z wahr sein”, wiederholte die Schildkröte nachdenklich. “Das ist *wieder* eine Behauptung, nicht wahr? Und wenn ich ihre Wahrheit nicht einsähe, könnte ich A und B und C annehmen, und Z *immer* noch nicht akzeptieren, nicht wahr?”

“Ja gewiß”, gab der aufrichtige Held zu, “Ich muß Sie also bitten, mir *eine* weitere Behauptung zu gewähren.”

“Schön, ich gewähre sie Ihnen, sobald Sie sie notiert haben. Wir wollen sie D nennen.

D Wenn A und B und C wahr sind, muß Z wahr sein.

Haben Sie das notiert?”

“*Gewiss*”, rief Achilles freudig aus, während er den Bleistift wegsteckte. “Endlich sind wir am Ende dieser gedanklichen Rennbahn. Da Sie nun A und B und C und D akzeptiert haben, akzeptieren Sie *natürlich* auch Z.”

"So?", fragte die Schildkröte unschuldig. "Und wenn ich mich *noch immer* weigere, Z zu akzeptieren?"

"Dann würde die Logik Sie an der Gurgel packen und Sie *zwingen*, das zu tun", antwortete Achilles triumphierend. "Die Logik würde Ihnen sagen: Sie können gar nicht anders. Da Sie A und B und C und D akzeptiert haben, *müssen* Sie Z akzeptieren! Sie haben gar keine andere Wahl."

"Was immer die *Logik* mir freundlicherweise sagt, verdient es, *aufgeschrieben* zu werden", sagte die Schildkröte. "Tragen Sie es also bitte in Ihr Buch ein. Wir nennen es:

E Wenn A und B und C und D wahr sind, muß Z wahr sein.

"Ich verstehe", sagte Achilles, und in seiner Stimme lag ein bißchen Traurigkeit.

...

Schematisch können wir *Carrolls Regreß* so darstellen:

$$\frac{A \quad A \to Z}{Z}\; C$$

$$\frac{A \quad A \to Z \quad C}{Z}\; D$$

$$\frac{A \quad A \to Z \quad C \quad D}{Z}\; E$$

$$\frac{A \quad A \to Z \quad C \quad D \quad E}{Z}\; F$$

$$\vdots$$

Wenn wir Z jemals behaupten wollen, dann brauchen wir unendlich viele Prämissen!
Das ist **Schildkrötenlogik**: viel zu langsam! (Wir werden nie bei Z ankommen.)

Rechtfertigung

Gesucht wird eine **Rechtfertigung** für *Modus Ponens*, die erklärt, warum wir *ohne weiteres* von A und $A \rightarrow B$ auf B schließen dürfen.

Ein Versuch

- Der Übergang von A und $A \rightarrow B$ auf B wäre ohne weiteres gerechtfertigt, wenn wir uns davon überzeugen könnten, daß die Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion garantiert (d.h. MP ein gültiger Schluß ist).

Versuchen wir einmal, das zu zeigen ...

Angenommen

(1) A ist wahr, und

(2) $A \to B$ ist wahr.

(Zu zeigen: B ist wahr). Aus (2) — so wollen wir annehmen — dürfen wir folgern:

(3) Wenn A wahr ist, dann ist B wahr.

Jetzt würden wir gern aus (1) und (3) schließen auf

(4) B ist wahr.

Gegen den Schluß aus (1) und (3) auf (4) ist auch normalerweise gar nichts einzuwenden — aber *hier* schon: Denn er ist ein Fall von *Modus Ponens*:

$$\frac{A \text{ ist wahr} \qquad A \text{ ist wahr } \to B \text{ ist wahr}}{B \text{ ist wahr}}$$

Dieser Rechtfertigungsversuch wäre also *zirkulär*. (Man versucht etwas zu rechtfertigen, MP, und bedient sich dabei des zu Rechtfertigenden — keine gute Idee.)

Logische Regeln als Bedeutungsregeln

Der nun folgende Punkt ist im Wesentlichen in einer kurzen Bemerkung in Peter Geachs Aufsatz “Assertion” (1965) enthalten. Hier mit seiner Frau Elizabeth Anscombe (ebenfalls eine bedeutende Philosophin):

Pyke

Peter: “Hans ist ein verheirateter *Junggeselle*.”

Was geht hier schief? — Zwei Hypothesen:

H1: Peter versteht die Bedeutung von “Junggeselle” (und “verheiratet”), meint aber, daß Junggesellen auch unverheiratet sein können.

H2: Peter versteht die Bedeutung von “Junggeselle” (oder von “verheiratet”) nicht.

H1 — ??

H2 ist die viel bessere Hypothese: Jemand, der die Bedeutung von “Junggeselle” und “verheiratet” versteht, muß die Möglichkeit unverheirater Junggesellen ohne weitere Annahmen ausschließen.

Peter: “Es regnet *und* schneit, aber es ist nicht wahr, daß es regnet.”
(P und Q, und nicht P.)

Was geht hier schief? — Zwei Hypothesen:

H1: Peter versteht die Bedeutung von “und” (und die der anderen Wörter), lehnt aber die logische Regel *aus* P *und* Q *folgt* P ab.

H2: Peter versteht die Bedeutung von “und” (oder die eines der anderen Wörter) nicht.

H1 ist sehr unplausibel: H1 müßte ergänzt werden um eine Theorie der Bedeutung von “und”, nach der P und Q wahr sein kann, ohne daß P wahr ist — ??

H2 ist die viel bessere Hypothese: Jemand, der die Bedeutung von “und” versteht, weiß, daß die Wahrheit von P *und* Q hinreichend ist für die Wahrheit von P — keine weiteren Annahmen werden benötigt.

Schildkröte: "*Wenn* P, *dann* Q, und auch P. Aber Q ist nicht wahr."

Wieder zwei Hypothesen:

H1: Die Schildkröte versteht die Bedeutung von "wenn ... dann ... " (und die der anderen Wörter), lehnt aber die logische Regel MP ab.

H2: Die Schildkröte versteht die Bedeutung von "wenn ... dann ... " (oder die eines der anderen Wörter) nicht.

Wieder ist H1 unplausibel. (Wenn H1 im Falle von *Wenn-dann* plausibel wäre, dann müßte H1 auch für den *Und*-Fall plausibel sein.)

H2 ist viel besser: Jemand, der die Bedeutung von "wenn ... dann ... " versteht, weiß, daß die Wahrheit von $P \rightarrow Q$ und P hinreichend ist für die Wahrheit von Q — keine weiteren Annahmen werden benötigt.

- Achilles hätte so antworten sollen: "Du lehnst den Schluß ab? Dann weiß ich nicht, was Du unter *Wenn-dann* verstehst. Erkläre mir das bitte einmal .... "

- Logik ist eine Theorie der **Bedeutungen** bestimmter Ausdrücke.

Die in der Logik typischerweise behandelten Ausdrücke nennt man **logische Partikel**). Dazu gehören:

> nicht, und, oder, wenn-dann, falls, alle, einige, notwendig, möglich, immer, manchmal, geboten, erlaubt, ...

Die Bedeutungen logischer Ausdrücke können in zweierlei Form angegeben werden:

- In einem *axiomatischen System*. Die Axiome und Regeln beschreiben indirekt die Bedeutungen der Ausdrücke.
- In einer *Klasse von Modellen*. Die Bedeutungen werden direkt durch Wahrheitsbedingungen für Sätze festgelegt, in denen diese Ausdrücke vorkommen. Wir betrachten nur solche Modelle, in denen diese Bedingungen gelten. Z.B.

$$P \textit{ und } Q \quad \text{ist genau dann wahr, wenn} \quad P \text{ wahr ist und } Q \text{ wahr ist.}$$

Am Ende müssen axiomatische Systeme und Klassen von Modellen zueinander "passen". Aber das ist eine andere Geschichte ...