

Numerische Modelle über den Einfluß partieller Schmelze auf
elastische, anelastische und elektrische Eigenschaften von
Gesteinen mit Anwendung auf Labordaten und die Asthenosphäre

INAUGURAL - DISSERTATION

zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Geowissenschaften
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

von
Harro Schmeling
aus Hamburg

Frankfurt am Main
1983

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	1
Abstract	3
1. EINLEITUNG	4
2. PARTIELLE SCHMELZE	5
2.1. Das Auftreten partieller Schmelze	5
2.2. Die geometrische Verteilung der partiellen Schmelze	8
2.3. Zusammenfassung von Kapitel 2.	12
3. ELASTIZITÄT UND DÄMPFUNG BEI PARTIELLER SCHMELZE	13
3.1. Rheologische Grundlagen	13
3.1.1. Allgemeine Beziehungen	13
3.1.2. Elastizität und Q^{-1} für einfache Verteilungen der Relaxationszeiten	18
3.1.3. Ausbreitung seismischer Wellen im dissipativen Medium	22
3.1.4. Zusammenfassung von Kapitel 3.1.	23
3.2. Übersicht über die Schmelzmodelle in der Literatur	25
3.2.1. Elastizität in einem Zweiphasensystem	25
3.2.2. Dämpfung in einem flüssig-festen Zweiphasensystem	43
3.2.3. Zusammenfassung der Kapitel 3.2.1. und 3.2.2.	57
3.3. Moduli und Relaxationsstärken bei ellipsoidförmigen Inklusionen	59
Zusammenfassung von Kapitel 3.3.	86
3.4. Berücksichtigung von nur teilweise verbundenen Inklusionen	89
Zusammenfassung von Kapitel 3.4.	99
3.5. Zusammenstellung der Schmelzmodelle	101
3.5.1. Aufstellung eines umfassenden Gleichungssatzes	101
3.5.2. Berücksichtigung eines herabgesetzten Verbundenheitsgrades	105
3.5.2.1. Allgemeine Auswirkungen eines herabgesetzten Verbundenheitsgrades auf die Moduli und Relaxationsstärken	105
3.5.2.2. Anwendung des statistischen Modells über den Verbundenheitsgrad sphäroidförmiger Inklusionen auf die Relaxationsstärke	107
3.5.3. Überlagerung verschiedener Schmelzgeometrien	112
3.5.4. Zusammenfassung von Kapitel 3.5.	123
3.6. Überlagerung von Hochtemperatur-Relaxationsmechanismen im Festkörper mit solchen durch Schmelze	125

4.	DIE ELEKTRISCHE LEITFÄHIGKEIT BEI PARTIELLER SCHMELZE	130
4.1.	Modelle aus der Literatur	130
4.1.1.	Eingrenzungen der Leitfähigkeit, Filme, Kanäle, Ellipsoide	130
4.1.2.	Die elektrische Leitfähigkeit für Systeme mit variablen Leitfähigkeiten der Elemente, Archie's Gesetz	132
4.2.	Einfaches Modell für die Leitfähigkeit bei teilweise verbundenen Schmelzfilmen und Ellipsoiden	139
4.3.	Leitfähigkeitsmodelle für Schmelzsysteme mit unterschiedlichen Inklusionen	148
4.4.	Interpretationen elektrischer Leitfähigkeiten von Gesteinen bei hohen Temperaturen	152
4.4.1.	Zusammenstellung von Leitfähigkeitsdaten aus Labor-messungen	153
4.4.2.	Numerische Leitfähigkeitsmodelle zur Interpretation von Beobachtungsdaten	155
4.5.	Zusammenfassung von Kapitel 4.	173
5.	EINFLUSS DER DICHTEN, VERGLEICH MIT EINER EMPIRISCHEN GESCHWINDIGKEITS-DICHTE-BEZIEHUNG	176
6.	ANWENDUNG DER SCHMELZMODELLE AUF EINEN LABORDATENSATZ	183
7.	ANWENDUNG DER SCHMELZMODELLE AUF IN SITU-DATEN	199
7.1.	Interpretation von Asthenosphärendaten	199
7.1.1.	Zusammenstellung von seismischen und elektrischen Daten für eine ozeanische Asthenosphäre	200
7.1.2.	Interpretation der Asthenosphärendaten durch Schmelzmodelle	208
7.1.3.	Zusammenfassung und Vergleich der Interpretationsansätze, Schlußfolgerungen für die ozeanische Asthenosphäre	224
7.2.	Interpretation des anomalen Mantels unter Island im Hinblick auf mögliche partielle Schmelze	227
7.2.1.	Zusammenstellung eines zur Interpretation geeigneten Satzes seismischer und geoelektrischer Daten	227
7.2.2.	Anwendung der Schmelzmodelle auf den Datensatz für Island	234
7.2.3.	Zusammenfassung von Kapitel 7.2.	246
8.	ALLGEMEINE DISKUSSION, SCHLUSSFOLGERUNGEN UND AUSBLICKE	248
	Liste der Variablen	252
	Anhang	255
	Literatur	260
	Danksagung	269
	Lebenslauf	270

Zusammenfassung

Die elastischen, anelastischen und elektrischen Eigenschaften von Mantelgesteinen werden in starkem Maße vom Auftreten partieller Schmelze beeinflusst. Um Aufschlüsse über das physikalische Verhalten partiell geschmolzenen Gesteins sowie über den Grad und die Verteilung von partieller Schmelze in der Asthenosphäre und thermisch anomalen Mantelregionen zu erhalten, wird ein umfassender numerischer Satz von Schmelzmodellen aufgestellt, der die Elastizität, die Anelastizität und die elektrische Leitfähigkeit miteinander verknüpft. Als Schmelzgeometrien können Kanäle, Filme oder ellipsoid- bis kugelförmige Inklusionen sowie Überlagerungen derselben angenommen werden, ein möglicherweise herabgesetzter Verbundenheitsgrad im Schmelzsystem wird berücksichtigt.

Es wird gezeigt, bis zu welchen Filmdicken (oder Querverhältnissen) das Filmmodell von O'Connell und Budiansky (1977) anwendbar ist. Für Film- und Ellipsoidinklusionen ergibt sich aus einem statistischen Ansatz, daß ein vom Schmelzanteil abhängiger, herabgesetzter Verbundenheitsgrad bei moderaten Modulabfällen einen deutlichen Einfluß auf die Relaxationsstärke und die elektrische Leitfähigkeit haben kann. Eine mögliche Interpretation des Archie-Gesetzes durch einen herabgesetzten Verbundenheitsgrad wird gegeben. Werden verschiedene Schmelzgeometrien überlagert, so kann unter bestimmten Bedingungen volumetrische Dissipation die Größenordnung derjenigen für Scherung erreichen.

Der vollständige Satz von Schmelzmodellen wird zur Interpretation von Labordaten für partiell geschmolzenen Dunit herangezogen und seine Anwendbarkeit diskutiert. Aus den Modellen ergeben sich Schmelzgeometrien und -konzentrationen, die im Einklang mit den Beobachtungen stehen.

Die Schmelzmodelle werden dann auf in situ-Daten für eine ozeanische Asthenosphäre angewendet. Unter der Annahme, daß die Absorption in der Asthenosphäre hauptsächlich durch Festkörpermechanismen hervorgerufen wird, resultiert als wahrscheinlichste Geometrie Schmelze in Kanälen längs Kornkanten. Kompakte Inklusionen oder nicht zu dünne Schmelzfilme mit Querverhältnissen zwischen 0.03 und 1, die auch verteilt sein können, und eventuell herabgesetztem Verbundenheitsgrad, sind ebenfalls nicht auszuschließen. Die Schmelzkonzentration

dürfte zwischen 2% und 4% liegen, möglicherweise aber auch 6% oder 8% erreichen.

Schließlich wird für den anomalen Mantel Islands eine kombinierte seismische und elektrische Interpretation hinsichtlich partieller Schmelze durchgeführt. Für den Krusten-Mantel-Übergangsbereich resultieren Schmelzkonzentrationen zwischen 10% und 20%, für den anomalen Mantel ergeben sich dünne Schmelzfilme mit möglicherweise verteilten Querverhältnissen und herabgesetztem Verbundenheitsgrad mit Schmelzkonzentrationen $< 5\%$.

Es sei auf die ausführlicheren Zusammenfassungen jeweils am Ende der Kapitel hingewiesen.

Abstract

Elasticity, anelasticity and electrical conductivity are quantities strongly dependent on partial melting. In order to gain insight into the physical behaviour of partially molten material and to obtain some constraints on the distribution and amount of melt in the asthenosphere or in thermal regions a comprehensive set of numerical models is established combining elasticity, anelasticity and electrical conductivity. In these models melt can be assumed to occur in form of tubes, films, ellipsoidal or spherical inclusions or as combinations of these. Eventually the degree of interconnection can be reduced as a function of melt fraction.

It is shown up to which aspect ratio the film model of O'Connell and Budiansky (1977) is applicable. Considering films or ellipsoidal inclusions a reduced degree of interconnection may have a significant influence on relaxation and conductivity at melt fractions corresponding to a moderate modulus decrease. A possible explanation of Archie's law is given in terms of a reduced degree of interconnection. If different melt geometries are superimposed, under certain conditions the bulk dissipation may reach the order of that for shear.

The full set of melt models is used in order to explain laboratory data of partially molten dunite. The applicability is discussed. The predictions from the models agree well with the observations.

The melt models are further applied to data for the oceanic asthenosphere. Assuming that in the asthenosphere absorption of seismic waves is mainly due to solid state relaxation, tubes along grain edges turn out to be the most likely melt geometry. However melt pockets or films of considerable thickness (aspect ratios between 0.03 and 1, possibly distributed) and perhaps with a reduced degree of interconnection cannot be ruled out. The resulting melt fractions range from 2% to 4% with an upper limit between 6% and 8%.

Finally a combined set of seismic and conductivity data from the anomalous mantle below Iceland is interpreted in terms of partial melt. There seems to be evidence for melt fractions between 10% and 20% in the transition zone between crust and mantle. The data from the anomalous mantle below can be explained by thin films with possibly distributed aspect ratios and a reduced degree of interconnection. The resulting melt fractions range below 5%.

1. Einleitung

Seismologische und magnetotellurische Untersuchungen haben gezeigt, daß in der nach B. Gutenberg benannten Zone erniedrigter Wellengeschwindigkeit unterhalb der Lithosphäre die Absorption seismischer Wellen und die spezifische elektrische Leitfähigkeit ein deutliches Maximum aufweisen. In dieser, als Asthenosphäre bezeichneten Zone, kommt offenbar die Geotherme der Soliduskurve des Mantels sehr nahe oder überschreitet sie. Im letzteren Fall, der eher einer ozeanischen Asthenosphäre zugerechnet werden dürfte, ist mit dem Auftreten von partieller Schmelze zu rechnen. Eine vollständige, durch Laborexperimente gestützte Theorie über den Einfluß partieller Schmelze auf die physikalischen Eigenschaften von Mantelgesteinen würde es ermöglichen, aus seismischen und geoelektrischen Messungen Aufschluß über die geometrische Verteilung von Schmelze, die Schmelzkonzentration und damit die Temperatur in der Asthenosphäre oder auch anderen thermisch anomalen Mantelregionen zu gewinnen. Es sei hier bemerkt, daß die Asthenosphäre in allen großtektonischen Prozessen eine Schlüsselrolle spielt.

Es ist das Ziel dieser Untersuchung, einen numerischen Satz von Schmelzmodellen zu erstellen, der den Zusammenhang zwischen dem Auftreten und der geometrischen Verteilung von Schmelze einerseits und den an/elastischen und elektrischen Eigenschaften von Gesteinen andererseits herstellt. Dieser Modellsatz soll eine weitgehende systematische Variation der Schmelzgeometrien, -verteilungen und -konzentrationen ermöglichen und dabei die Auswirkungen auf geophysikalisch meßbare Größen wie der seismischen Geschwindigkeit, der Absorption und der elektrischen Leitfähigkeit aufzeigen. Für gegebene Datenkombinationen soll somit eine umfassende Interpretation hinsichtlich partieller Schmelze ermöglicht werden.

2. Partielle Schmelze

Wie in der Einleitung bereits beschrieben, sollen Aufschlüsse über das physikalische Verhalten von Gesteinen im Temperaturbereich der partiellen Schmelze gewonnen werden, so daß Rückschlüsse auf den Zustand entsprechender Bereiche im Mantel gezogen werden können. Es stellt sich zunächst die Frage, unter welchen physikalischen Bedingungen mit partieller Schmelze zu rechnen ist und, im Hinblick auf das physikalische Verhalten, in welcher geometrischen Verteilung diese Schmelze dann auftritt.

2.1. Das Auftreten partieller Schmelze

Eine detaillierte Darstellung und Diskussion aller möglichen mit partieller Schmelze verbundener Gesteinsphasensysteme fällt aus dem Rahmen dieser Arbeit, hierzu sei auf entsprechende petrologische Literatur verwiesen (z.B. Ernst, 1976; Cox et al., 1979; Ringwood, 1975; u.v.a.m.). Einige grundsätzliche Punkte sollten jedoch im Hinblick auf mögliche partielle Schmelze im Mantel erwähnt werden.

Als ursprüngliches, nicht verarmtes Mantelmaterial wird im allgemeinen der von Green und Ringwood (1963) postulierte sogenannte Pyrolit angenommen. Dieses synthetische Material kommt in der Zusammensetzung dem natürlich vorkommenden Lherzolith sehr nahe (mit ca. 60 % Olivin, ca. 30% Ortho- und Klinopyroxen und den Aluminiumsilikaten Plagioklas, Spinell und Granat). In diesem typischen Mantelmaterial können mit zunehmendem Druck verschiedene Reaktionen zwischen den Komponenten stattfinden, so daß eine Einteilung in Plagioklas-, Spinell- und Granatlherzolith möglich ist.

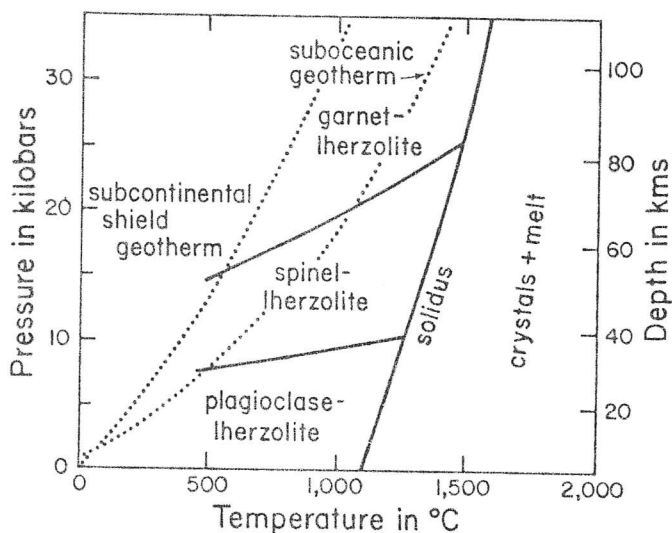


Abb. 1: Stabilitätsbereiche typischen Mantelmaterials (trocken). Geothermen von Clark und Ringwood (1964). (Aus: Ernst, 1976).

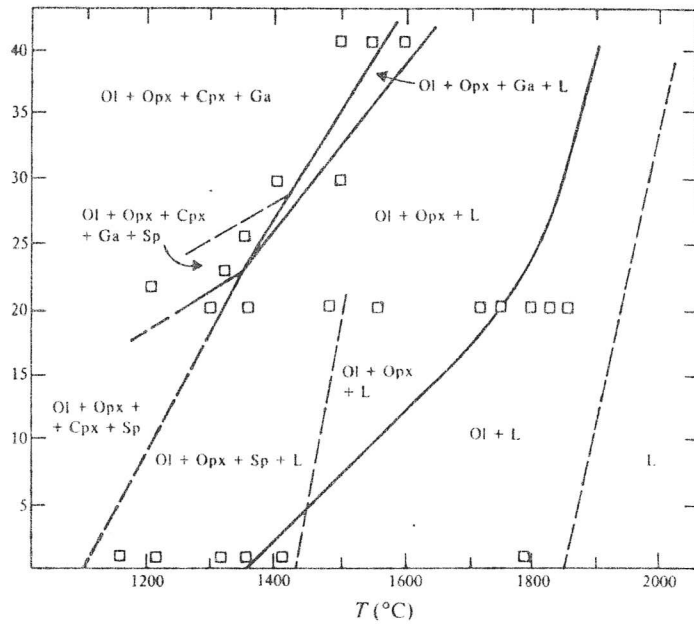


Abb. 2: P-T-Diagramm für die experimentell bestimmten Phasenbeziehungen des Lherzoliths. Kästchen stellen Datenpunkte dar (basierend auf Ito und Kennedy, 1967). Symbole: Ol: Olivin, Opx: Orthopyroxen, Sp: Spinell, Ga: Granat, L: Schmelze. (Aus: Cox et al., 1979).

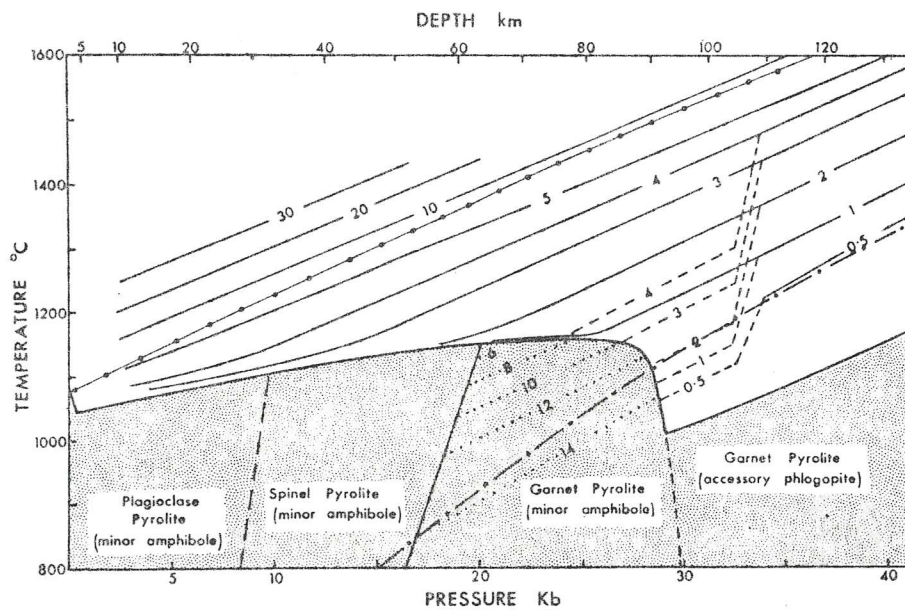


Abb. 3: Schmelzverhalten von Pyrolit mit einem H₂O-Anteil 0 < H₂O ≤ 0.4 %. Schattiert: keine Schmelze, ●—●: trockene Soliduskurve, —2—: Schmelzanteil in % für Pyrolit mit 0.05 % H₂O, ---2---: Schmelzanteil in % für Pyrolit mit 0.4 % H₂O, - - - - -: ozeanische Geotherme von Clark und Ringwood (1964). (Aus: Green und Liebermann, 1976).

Abb. 1 zeigt die verschiedenen Stabilitätsbereiche für trockenen Lherzolith zusammen mit der Soliduskurve und zwei Geothermen (Clark und Ringwood, 1964). In Abb. 2 ist nun das Schmelzverhalten eines typischen trockenen Lherzoliths dargestellt. Bei niedrigen Drücken schmelzen zuerst Plagioklase (1100°C), dann zunehmend Klinopyroxen, Spinell und Orthopyroxen, so daß ab 1450°C nur noch Olivin und Schmelze vorhanden sind. Bei hohen Drücken beginnt das Aufschmelzen fast gleichzeitig mit Klinopyroxen und Granat, während Orthopyroxen erst bei höheren Temperaturen in die Schmelze übergeht.

Es ist bekannt, daß das Vorhandensein kleiner Mengen Wasser die Solidustemperatur deutlich herabsetzen kann. Green und Liebermann (1976) diskutieren diese Möglichkeit für einen Pyrolitmantel und kommen zu einem möglichen Wassergehalt zwischen $0 < \text{H}_2\text{O} \leq 0.4$ %. Die sich hierbei ergebende Soliduskurve ist in Abb. 3 dargestellt (Begrenzung des schattierten Pyrolitbereichs). Die durchgezogene, mit Punkten versehene Kurve stellt zum Vergleich die trockene Soliduskurve dar. Im Bereich oberhalb der teilweise gesättigten Soliduskurve sind einmal für einen Wassergehalt im Pyrolit von 0.05 % (durchgezogen) und für 0.2 % (gestrichelt) Kurven gleicher Schmelzkonzentration eingetragen.

Eine Zusammenstellung von Schmelzkurven bei unterschiedlichen Drücken und Wassersättigungen zeigt Abb. 4. Die mit GL und W bezeichneten Kurven wurden nach Green und Liebermann (1976, Abb. 2, entspricht Abb. 3 hier) bzw. Wyllie (1971, Abb. 8-20) erstellt. Die R- und MKF-Kurven finden sich bei Ringwood (1975) und Murase et al. (1977a). Aus Abb. 4 geht hervor, daß in Druckbereichen um 25 kb - 30 kb für teilweise gesättigten Pyrolit der Schmelzanteil zunächst nur langsam mit der Temperatur ansteigt, während bei trockenen Gesteinen und/oder niedrigen Drücken innerhalb eines relativ kleinen Temperaturbereichs sehr viel mehr Material aufschmilzt. Weiter kann man der Abb. 4 entnehmen, daß die Schmelzkurven mit steigendem Druck oder abnehmender Wassersättigung zu hohen Temperaturen hin verschoben werden.

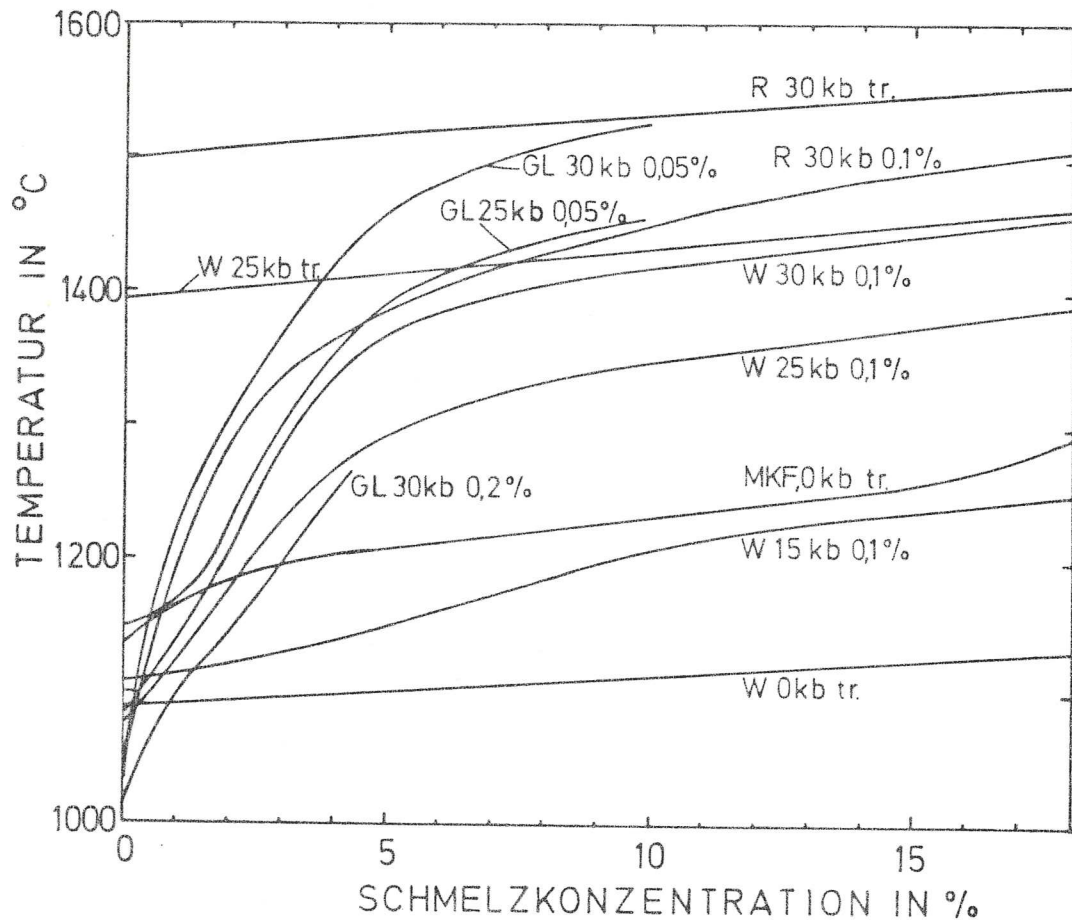


Abb. 4: Pyrolitschmelzkurven für unterschiedliche Drücke und H₂O-Sättigungen (%-Zahlen, tr.: trocken). W: Wyllie (1971); R: Ringwood (1975); GL: Green und Liebermann (1976); MKF: Murase et al. (1977a) für Spinell-Lherzolith.

Diese Zusammenstellung petrologischer Erkenntnisse soll verdeutlichen, in welchen Bereichen unter entsprechenden Annahmen von Geothermen (als Beispiel in Abb. 3 die gestrichelte ozeanische Geotherme von Clark und Ringwood, 1964, für einen statischen, nicht konvektierenden Mantel) mit partieller Schmelze gerechnet werden muß und welche Schmelzkonzentrationen möglich sind.

2.2. Die geometrische Verteilung der partiellen Schmelze

Das physikalische Verhalten partiell geschmolzenen Gesteins wird in großem Maße von der geometrischen Verteilung der Schmelze, also von der Form der einzelnen Inklusionen und ihrem Verbundenheitsgrad bestimmt. Stocker und Gordon (1975) unterscheiden nach Smith (1948, 1952, 1964) drei Faktoren, die die

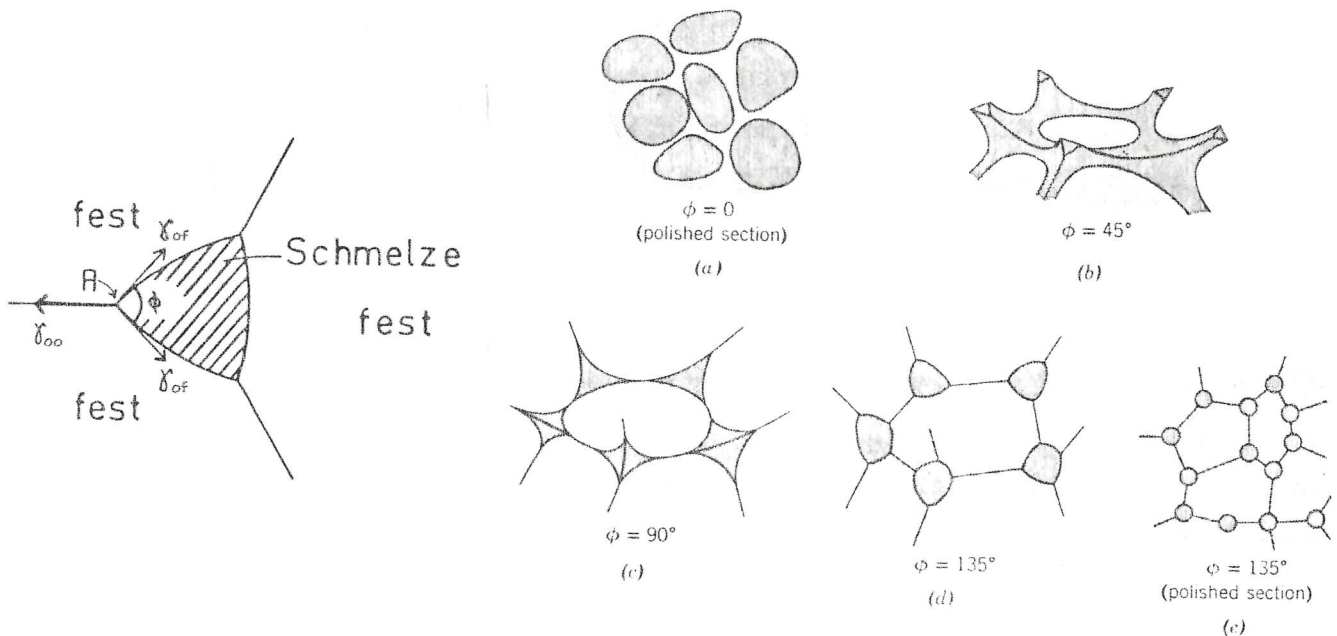


Abb. 5: Rechts a) - e): Verschiedene Schmelzgeometrien bei unterschiedlichen Dihedralwinkeln (aus: Kingery et al., 1976). Links: Dihedralwinkel im Gleichgewicht fest-fest-flüssig.

Schmelzstruktur bestimmen können: 1.) Lokalisierung der Schmelze, d.h. tritt die Schmelze im Innern oder zwischen den Gesteinskörnern auf, 2.) Grenzflächenenergien der flüssigen und festen Phase, nach Bulau et al. (1979) kann hier noch als weiterer Faktor die Bedingung der konstanten Krümmung der Grenzflächen zwischen fester und flüssiger Phase im strukturellen, thermodynamischen Gleichgewicht hinzugefügt werden, und 3.) Schmelzanteil. Zum ersten Punkt ist zu bemerken, daß eine Schmelzeinklusion zur Minimierung der Grenzflächenenergie im allgemeinen eine Kugelgestalt annehmen wird, wenn sie sich im Innern eines Kristallkorns befindet, vorausgesetzt, die Grenzflächenenergie fest-flüssig ist nicht stark richtungsabhängig. Befindet sich die Schmelze zwischen den Körnern, so werden die Grenzflächenenergien zu bestimmenden Größen der Geometrie. Wird nun die spezifische Grenzflächenenergie, die auch als Grenzflächenspannung angesehen werden kann, zwischen fester und flüssiger Phase mit γ_{of} (flüssig-fest) und die zwischen zwei festen Phasen mit γ_{oo} bezeichnet, so ist der sogenannte Dihedral- oder Kontaktwinkel, der beim Zusammentreffen zweier Gesteinskörner mit der Schmelze auftritt, gegeben durch das Spannungsgleichgewicht am Punkt A (Abb. 5 links) und kann

geschrieben werden (siehe z.B. Kingery et al., 1976) zu $\phi = 2 \arccos(\gamma_{oo} / 2 \gamma_{of})$. Je nach ϕ kann sich dann die Schmelze als Film (Abb.5 a, Aufsicht), als Netzwerk von Kanälen (b), oder isoliert in Zwickeln (c, d, e) im Gestein verteilen.

Im Fall kleiner Grenzflächenenergien $\gamma_{of} \leq \gamma_{oo}/2$, also $\phi = 0$, argumentieren Bulau et al. (1979) allerdings auf Grund ihrer eingeführten Bedingung der konstanten Grenzflächenkrümmung, daß Schmelze nicht gleichzeitig scharfe Kornkanten und flache Kornflächen benetzen kann. Nach ihrem Modell soll sich die Schmelze daher zu einem Kanalnetz zusammenziehen, ähnlich Abb. 5 b, jedoch spitzkantiger im Kanalquerschnitt. Dies würde jedoch bedeuten, daß ein Großteil der Korngrenzflächen in einen höheren Energiezustand $\gamma_{oo} > 2 \gamma_{of}$ übergehen müsste.

Für den Bereich $0 < \phi < 60^\circ$ kann sich die Schmelze nach Bulau et al. immer in einem zusammenhängenden Kanalsystem verteilen, wobei sich die Krümmung der Kanalflächen konstant einstellen kann. Es läßt sich schließlich für den Fall $\phi > 60^\circ$, in dem also bei kleinen Schmelzkonzentrationen die Inklusionen isoliert sind (Abb. 5 c, d, e), die kritische Schmelzkonzentration berechnen, ab der die Inklusionen zusammenstoßen (Bulau et al., 1979). Hierbei wurde als typische Kornform ein abgestumpftes Oktaeder zu Grunde gelegt. Dieser, zu einem zusammenhängenden System führende Schmelzanteil ist in Abb. 6 dargestellt.

Zieht man die experimentellen Befunde heran, so zeigt sich ein nicht einheitliches Bild. Bei einer Vielzahl von Schmelzexperimenten trat partielle Schmelze in Form von Filmen auf. Hierzu seien die Untersuchungen an Granit (Van der Molen und Paterson, 1979), an Granit und Gabbro (Arzi, 1972, 1978a), an Ultramafiten und Granodiorit (Arzi, 1978b), an Gneis, Grano-

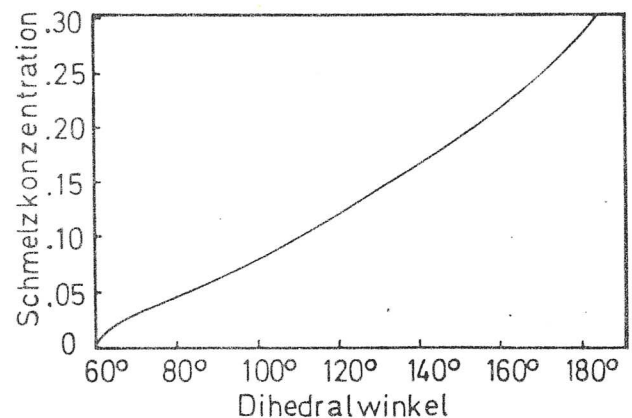


Abb. 6: Kritischer Schmelzanteil, unterhalb dessen die Schmelzzwickel isoliert sind. (Aus: Bulau et al., 1979)

diorit und Quarzdiorit (Mehnert et al., 1973; Büsch et al., 1974) und an Spinell-Lherzolith (Arndt, 1977) genannt. Waff und Bulau (1979) fanden hingegen in Schmelzexperimenten an synthetisch aus Gesteinspulver hergestellten Ultramafiten, daß sich die Schmelze im strukturellen Gleichgewicht (nach mehreren Tagen Versuchsdauer) in Form von Kanälen mit einem mittleren Dihedralwinkel von 47° verteilt. Untersuchungen an den gleichen Proben (Cooper und Kohlstedt, 1982) ergaben mit einer Auflösung bis zu 1 nm, daß die Korngrenzflächen frei von Schmelze blieben. Waff und Bulau schließen, daß in den meisten bisherigen Schmelzexperimenten an Silikaten das strukturelle Gleichgewicht nicht erreicht wurde. Dem sei die Argumentation Arzi's (1978b) gegenübergestellt, nach der die von ihm mikroskopisch untersuchten Ultramafite und Granodiorite im Kontakt mit Dikes gestanden hätten und somit die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt gewesen sein sollten.

Für Dihedralwinkel $< 60^{\circ}$ sollte, wie beschrieben, die Schmelze bei beliebig kleinen Konzentrationen ein zusammenhängendes System bilden. Dies wird durch die Experimente von Waff und Bulau (1979) für 1 % - 2 % Schmelze in Kanälen sowie durch Beobachtungen von Schmelzfilmen bei einem Schmelzanteil von mindestens 10 % (Mehnert et al., 1973) bzw. 5 % - 8 % (Arndt, 1977) bestätigt. Die Experimente von Arzi (1974, 1978a) und Vander Molen und Paterson (1979) zeigen allerdings, daß mit abnehmender Schmelzkonzentration der Anteil der schmelzfreien Korngrenzflächen signifikant ansteigt. Auch bei den an unserem Institut untersuchten Peridotit- und Dunitproben (Berckhemer et al., 1979, 1982a) wurden Schmelzfilme an einigen, nicht an allen Grenzflächen beobachtet (Dr. Aitken, pers. Mitt.). An Xenolithen der Unterkruste von Kilbourne Hole, New Mexico, die beim Aufstieg durch Dekompression partiell aufgeschmolzen wurden, wurde sowohl zusammenhängende, als auch nicht zusammenhängende Schmelze beobachtet (Padovani, 1977).

Ein zusammenhängendes Schmelzsystem wird häufig im Zusammenhang mit dem Aufstieg von Schmelze aus partiell geschmolzenem Material als Voraussetzung angenommen. Frank (1968), Walker et al. (1978) und Stolper et al. (1981) gehen hierbei von einem zusammenhängenden Kanalsystem aus, während z.B. Arndt (1977) und Turcotte und Ahern (1978) Grenzflächen benetzende Schmelz-

filme annehmen. Die Ursache für das Absondern und Aufsteigen von Schmelze liegt im Dichtekontrast zwischen Schmelze und Residuum. Andererseits muß man damit rechnen, daß auch weite Bereiche eines partiell geschmolzenen Mantels über geologische Zeiträume stabil bleiben können und keine Absonderung und Akkumulation von Schmelze stattfindet. Es ist dann die Frage, ob diese Stabilität mit der Annahme eines zusammenhängenden Schmelzsystems vereinbar ist. Walker et al. (1978) finden als Stabilitätsbedingung für die Asthenosphäre eine maximale Schmelzkonzentration von nur 0.1 %. Stolper et al. (1981) schwächen diese Bedingung etwas ab, indem sie auf Grund der im Vergleich zum festen Gestein höheren Kompressibilität von Schmelze einen mit der Tiefe abnehmenden Dichtekontrast berücksichtigen. Waff (1980) argumentiert, daß ein durch Auftrieb der Schmelze erzeugter Druckgradient durch Grenzflächenspannungen kompensiert werden muß, wodurch sich die Grenzflächenkrümmungen der Schmelzinklusionen mit der Tiefe ändern. Hieraus resultiert dann eine horizontale Schichtung, bestehend aus Zonen mit zusammenhängender Schmelze und solchen mit isolierten Schmelzinklusionen.

Die hier aufgeführten Punkte wurden als hinreichend angesehen, um in den in dieser Arbeit behandelten Schmelzmodellen den Fall nur teilweise verbundener Schmelzsysteme mit einzuschließen.

2.3. Zusammenfassung von Kapitel 2.

Es wird in diesem Kapitel das Schmelzverhalten von Pyrolit bzw. Lherzolith als möglicherweise repräsentatives ursprüngliches Mantelmaterial in Abhängigkeit vom Druck und der Temperatur besprochen. Unter Berücksichtigung eines möglichen Wassergehalts im Mantel werden verschiedene Schmelzkurven zusammengestellt.

Die geometrische Verteilung der Schmelze spielt für das physikalische Verhalten des Gesteins eine wichtige Rolle. Es werden die Bedingungen für bestimmte Schmelzinklusionsgeometrien - Schmelzfilme, Schmelzkanäle und kompakte Schmelztaschen - aufgeführt. Die theoretischen Annahmen über die Schmelzverteilung aus der Literatur werden mit veröffentlichten experimentellen Beobachtungen verglichen. Schließlich wird der Verbundenheitsgrad und Zusammenhang eines Schmelzsystems auch in Bezug auf die Asthenosphäre diskutiert.

3. Elastizität und Dämpfung bei partieller Schmelze

3.1. Rheologische Grundlagen

3.1.1. Allgemeine Beziehungen

Die im Folgenden durchgeführten Betrachtungen beruhen auf den Theorien über Viskoelastizität und lineare Systeme. Es sei hier auf die entsprechende grundlegende Literatur hingewiesen (z.B. Mase, 1970; Wolf, 1978).

Faßt man einen viskoelastischen Körper als ein lineares rheologisches System auf, so kann bei einer Erregung des Systems in Form einer skalar gewählten Dehnung (z.B. Scherung oder Kompression) $e(t)$ die Antwort des Systems in Form einer entsprechenden skalaren Spannung $\sigma(t)$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t m(t-\tau) e(\tau) d\tau \quad (3.1.1)$$

wobei $m(t)$ die Impulsantwortfunktion ist. Die Darstellung im komplexen Frequenzbereich erhält man durch Anwendung der Laplace-Transformation:

$$\bar{\sigma}(s) = \mathcal{M}(s) \bar{e}(s) \quad (3.1.2)$$

Die Laplace-transformierte Spannung und Dehnung sind durch Querstriche gekennzeichnet, $\mathcal{M}(s)$ wird als Übertragungsfunktion des Systems und $s=c+i\omega$ als komplexe Frequenz bezeichnet. Gibt man auf das System als Eingangsfunktion die Einheitssprungfunktion

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

so erhält man die Sprungantwortfunktion, die auch als Spannungsrelaxationsfunktion bezeichnet wird:

$$m_s(t) = \int_{-\infty}^t m(t-\tau) H(\tau) d\tau \quad (3.1.4)$$

und im komplexen Frequenzbereich:

$$\bar{m}_s(s) = \mathcal{M}(s) \cdot 1/s \quad (3.1.5)$$

Wählt man nun als Eingangsfunktion eine harmonische Schwingung der Form

$$e(t) = \begin{cases} e_0 \exp(i\omega't) & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.6)$$

mit ω' als Kreisfrequenz, so ergibt sich für die stationäre Lösung, nachdem also der Einschwingvorgang abgeschlossen ist, für die Spannung im komplexen Frequenzbereich:

$$\bar{\sigma}_{\text{stat}}(s) = \frac{\mathcal{M}(i\omega') \cdot e_0}{s - i\omega'} \quad (3.1.7)$$

und im Zeitbereich:

$$\sigma_{\text{stat}}(t) = \mathcal{M}(i\omega') e_0 \exp(i\omega't) \quad (3.1.8)$$

Die resultierende Amplitude der Spannung $\mathcal{M}(i\omega') \cdot e_0$ ist im allgemeinen also komplex, was auf eine mögliche Phasenverschiebung zwischen Spannung und Dehnung hinweist.

Es ist nun für viskoelastische Körper üblich, die Übertragungsfunktion längs der imaginären Achse als komplexen Modul $M(\omega)$ zu definieren:

$$M(\omega) = M_1(\omega) + i M_2(\omega) = |M(\omega)| \cdot \exp(i\varphi) \quad (3.1.9)$$

Der Winkel φ beschreibt die Phasenverschiebung. Je nach Festlegung der Dehnung und Spannung kann $M(\omega)$ für einen bestimmten Modul oder eine Linearkombination aus solchen stehen.

Mit Hilfe von Gleichung (3.1.4) lassen sich die unrelaxierten und relaxierten Moduli definieren, falls die Grenzwerte der Sprungantwort für $t \rightarrow 0_+$ bzw. $t \rightarrow \infty$ existieren:

$$\begin{aligned} M_u &:= m_s(t=0_+) \\ M_r &:= m_s(t=\infty) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Für Laplace-Transformierte $F(s)$ der Zeitfunktion $f(t)$ gelten folgende Grenzwertsätze: Falls die Laplace-Transformationen von $f(t)$ und $\partial/\partial t f(t)$ existieren und auch $s \cdot F(s)$ analytisch ist, dann gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) \quad (3.1.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Mit diesen Grenzwertsätzen folgt mit (3.1.5):

$$M_u = \lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega)$$

$$M_r = \lim_{\omega \rightarrow 0} M(\omega) \quad (3.1.12)$$

Für lineare viskoelastische Körper sind die für (3.1.11) notwendigen Bedingungen allgemein erfüllt, so daß also für den komplexen Modul folgt, daß er für $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ reell wird und dann identisch gleich dem unrelaxierten bzw. relaxierten Modul ist.

Der zum entsprechenden Modul gehörende Dämpfungsfaktor Q^{-1} kann nun definiert werden

$$Q^{-1} = M_2/M_1 = \tan \varphi \quad (3.1.13)$$

Viskoelastische Körper lassen sich allgemein durch ein Netzwerk linearer elastischer und viskoser Elemente annähern. Ein einfaches rheologisches Modell stellt der lineare Standard-Körper dar (Zener, 1948).

Man kann die für diesen Körper geltende Differentialgleichung in folgender Form schreiben:

$$\sigma + \tau_e \dot{\sigma} = M_r (e + \tau_\sigma \dot{e}) \quad (3.1.14)$$

wobei τ_e die Dehnungsrelaxationszeit, τ_σ die Spannungsrelaxationszeit und

M_r der relaxierte Modul ist. Aus dieser Differentialgleichung folgt mit Hilfe der Laplace-Transformation die System-Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(s) + \tau_e s \bar{\sigma}(s) &= M_r (\bar{e}(s) + \tau_\sigma s \bar{e}(s)) \\ \Rightarrow \mathcal{M}(s) &= \frac{1 + s \tau_\sigma}{1 + s \tau_e} M_r \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

(3.1.15) kann als komplexer Modul geschrieben werden:

$$M(\omega) = \frac{1 + i\omega \tau_\sigma}{1 + i\omega \tau_e} M_r \quad (3.1.16)$$

Hieraus folgt für $\omega \rightarrow \infty$ mit Gleichung (3.1.12)

$$M_u = (\tau_\sigma / \tau_e) M_r \quad (3.1.17)$$

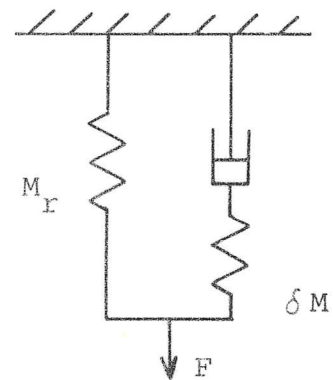


Abb. 7: Linearer Standard-Körper

Der Absorptionsfaktor Q^{-1} ergibt sich aus dem komplexen Modul mit (3.1.17) und $\tau = \sqrt{\tau_e \tau_g}$ zu

$$Q^{-1} = \frac{M_u - M_r}{\sqrt{M_u M_r}} \cdot \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (3.1.18)$$

und hat sein Maximum bei $\omega = 1/\tau$:

$$Q_{\max}^{-1} = \frac{M_u - M_r}{2 \cdot \sqrt{M_u M_r}} \quad (3.1.19)$$

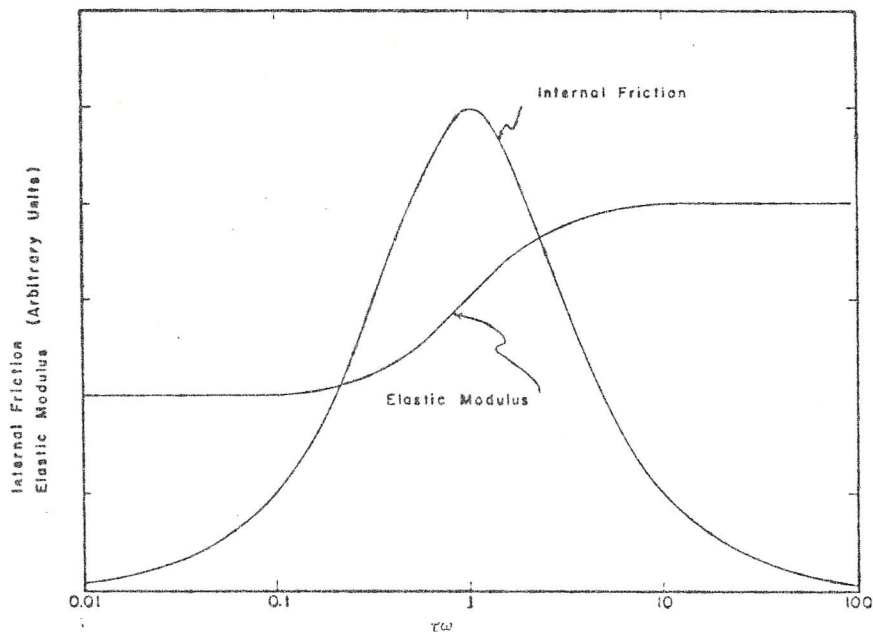


Abb.8 : Darstellung eines Debye-peaks und des zugehörigen frequenzabhängigen Moduls (aus: Zener, 1948).

(3.1.18) wird als Debye-peak bezeichnet und ist in Abb.8 zusammen mit dem Betrag des frequenzabhängigen komplexen Moduls dargestellt. Die Relaxationsstärke wird häufig definiert mit dem Moduldefekt $\delta M = M_u - M_r$ als:

$$\Delta = \frac{\delta M}{M_r} = \frac{M_u - M_r}{M_r} \quad (3.1.20)$$

Für kleine Δ gilt also für einen Debye-peak:

$$Q_{\max}^{-1} \cong \Delta/2 \quad (3.1.21)$$

Im allgemeinen läßt sich reales Material nicht durch einen einzigen linearen Standardkörper beschreiben. Es erweist sich jedoch als sinnvoll, einen allgemeinen viskoelastischen Körper durch unendlich viele lineare Standardkörper, deren elastische Eigenschaften unterschiedlich sein können, anzunähern. Betrachtet man die Spannungen als Ausgangssignal eines solchen Systems, so sind die einzelnen linearen Standardelemente als parallel geschaltet zu betrachten. Jedes Element erhält dann das gleiche Eingangssignal und addiert sein Ausgangssignal zum gesamten Ausgangssignal. Die Übertragungsfunktion (3.1.15) des i -ten Elements kann geschrieben werden, nachdem τ_e mit (3.1.17) eliminiert und $M_{ui} - M_{ri} = \delta M_i$ gesetzt wurde:

$$\mathcal{M}_i(s) = M_{ri} + \frac{s \tau_e \cdot \delta M_i}{1 + s \tau_e} \quad (3.1.22)$$

Im folgenden wird bei τ_e der Index fortgelassen, es ist jedoch auch weiterhin die Dehnungsrelaxationszeit gemeint. Nimmt man eine kontinuierliche Verteilung V_{Mr} und V der M_{ri} bzw. δM_i bzgl. τ mit

$$M_{ri} \rightarrow M_r V_{Mr} d\tau \quad ; \quad \delta M_i \rightarrow \delta M V d\tau$$

$$\text{und} \quad \int_0^{\infty} V_{Mr}(\tau) d\tau = 1 \quad ; \quad \int_0^{\infty} V(\tau) d\tau = 1$$

so lautet die Übertragungsfunktion für das gesamte System

$$\mathcal{M}(s) = M_r + \delta M \cdot \int_0^{\infty} V(\tau) \frac{s \tau}{1 + s \tau} d\tau \quad (3.1.23)$$

Hieraus folgt der komplexe Modul, aufgespalten in Real- und Imaginärteil, $M(\omega) = M_1 + iM_2$:

$$\begin{aligned} M_1(\omega) &= M_r + \delta M \cdot \int_0^{\infty} V \cdot \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau \\ M_2(\omega) &= \delta M \int_0^{\infty} V \cdot \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Nach Definition (3.1.13) ist der Dämpfungsfaktor Q^{-1} hiermit auch für verteilte Relaxationszeiten bestimmt. Mit (3.1.24)

ist eine Abschätzung des maximalen Q^{-1} für ein beliebiges, zwischen $\tau_2 < \tau_1$ gegebenes Relaxationsspektrum möglich. Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt:

$$M_2(\omega) = \delta_M \int_{\tau_2}^{\tau_1} V(\tau) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau = \delta_M \frac{\omega \tilde{\tau}}{1 + \omega^2 \tilde{\tau}^2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} V(\tau) d\tau$$

$$= \delta_M \frac{\omega \tilde{\tau}}{1 + \omega^2 \tilde{\tau}^2}$$

für ein bestimmtes, von ω abhängiges $\tilde{\tau}(\omega)$ mit $\tau_2 \leq \tilde{\tau} \leq \tau_1$. Hieraus folgt, daß das maximale M_2 immer $\leq \delta_M/2$ bleibt. Der Wert $\delta_M/2$ wird im Falle eines Debye-peaks für ein festes $\tilde{\tau} = \tau_1 = \tau_2$ erreicht. Für Q_{\max}^{-1} gilt also:

$$Q_{\max}^{-1} \leq \frac{\Delta}{2} \quad (3.1.25)$$

3.1.2. Elastizität und Q^{-1} für einfache Verteilungen der Relaxationszeiten

Bei der Behandlung von Schmelzmodellen wird das Hauptgewicht auf die Bestimmung der relaxierten und der unrelaxierten Moduli und somit die Bestimmung der Relaxationsstärke gelegt. Dies hat den Vorteil, daß man ohne Annahmen über Flüssigkeitsviskositäten und somit Relaxationsspektren auskommt. Man erhält dadurch allerdings auch keinen Aufschluß über das Frequenzverhalten der Moduli und der Absorption. Den möglichen Bereich für das Q^{-1} kann man allerdings trotzdem abschätzen, indem man den Zusammenhang zwischen Q^{-1} und der Relaxationsstärke für einfache typische Relaxationsspektren betrachtet.

Im letzten Abschnitt wurde das frequenzabhängige und das maximale Q^{-1} für einen einzelnen Debye-peak bestimmt. In der Natur treten jedoch häufig Relaxationsspektren auf, deren Spektraldichte in erster Näherung bzgl. $\log \tau$ konstant über einen breiten Frequenzbereich sind (siehe z.B. Nowick und Berry, 1972; Zener, 1948). Bezeichnet man die Verteilungsfunktionen der Relaxationszeiten bzgl. $\ln \tau$ mit V_{\ln} und $d \ln \tau$ und die Eckfrequenzen des Q -Spektrums mit $\omega_1 = 1/\tau_1$ und $\omega_2 = 1/\tau_2$, so lautet mit

$$V_{\ln} d \ln \tau = \begin{cases} \text{const.} \cdot d \ln \tau & , 1/\tau_1 < \omega < 1/\tau_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.26)$$

die Verteilungsfunktion $V_{\tau} d\tau$ bzgl. τ :

$$V_{\tau} d\tau = \begin{cases} \text{const.} \cdot 1/\tau d\tau & , 1/\tau_1 < \omega < 1/\tau_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.27)$$

Mit $\int_{\tau_2}^{\tau_1} V_{\tau} d\tau = 1$, ist also

$$V_{\tau} d\tau = \begin{cases} (\tau \cdot \ln \tau_1 / \tau_2)^{-1} & , 1/\tau_1 < \omega < 1/\tau_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.28)$$

Für den Real- und Imaginärteil des komplexen Moduls gilt dann mit (3.1.24)

$$M_1(\omega) = M_r + \frac{\delta M}{\ln \tau_1 / \tau_2} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \tau_1^2 \omega^2}{1 + \tau_2^2 \omega^2} \right)$$

$$M_2(\omega) = \frac{\delta M}{\ln \tau_1 / \tau_2} (\text{atan } \tau_1 \omega - \text{atan } \tau_2 \omega) \quad (3.1.29)$$

$Q^{-1} = M_2/M_1$ ist für $1/\tau_1 \ll \omega \ll 1/\tau_2$ und $M_2 \ll M_1$ weitgehend konstant (vgl. Mavko, 1980):

$$Q^{-1} \cong \frac{\delta M \pi}{2 M_r (\ln \tau_1 - \ln \tau_2)} = \frac{\Delta}{2} \frac{\pi \lg e}{\lg \tau_1 - \lg \tau_2} \quad (3.1.30)$$

Q^{-1} unterscheidet sich von Q_{\max}^{-1} eines Debye-peaks um den Faktor $\approx \frac{1.36}{\lg \tau_1 - \lg \tau_2}$. Bei wachsender Breite des Relaxationsspektrums

fällt Q^{-1} bei konstanter Relaxationsstärke nur langsam ab. Ist z. B. das Spektrum sechs Dekaden breit, so erreicht Q^{-1} immerhin noch $1/4$ des Q_{\max}^{-1} eines einzelnen Debye-peaks.

Das aus (3.1.29) folgende $Q^{-1}(\omega)$ ist logarithmisch in Abb. 9 für einen Debye-peak ($\omega_1 = \omega_2$) und für zwei unterschiedlich breite Relaxationsspektren ($\omega_1/\omega_2 = 10^{-4}$ bzw. 10^{-6}) aufgetragen. Q^{-1} ist auf $\Delta/2$ normiert, die Kurven gelten also für gleiche Relaxationsstärken bzw. relaxierte und unrelaxierte Moduli.

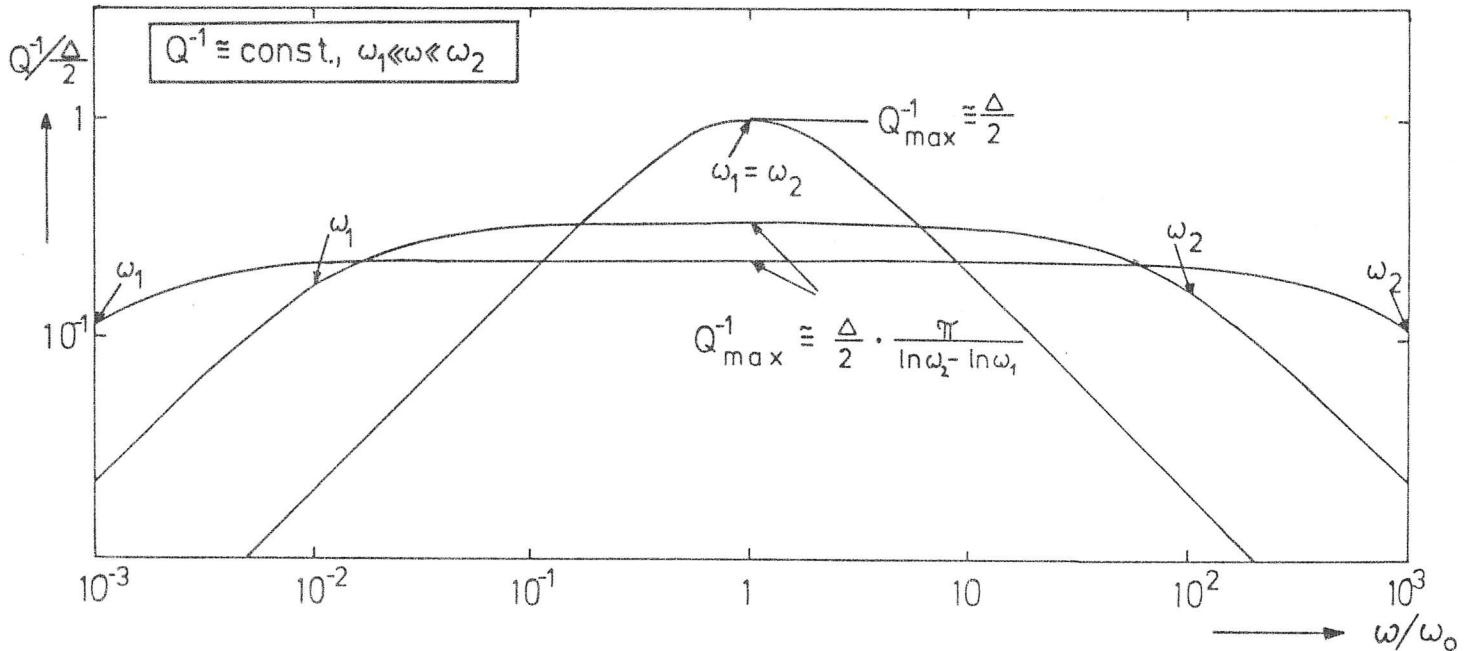


Abb. 9: Absorptionsspektren für uniforme Verteilungen bzgl. $\log \omega$ zwischen ω_1 und ω_2 .

Läßt man eine leichte Frequenzabhängigkeit in der Form $Q^{-1} \sim \omega^{-\gamma}$ zu (Berckhemer et al., 1982a; Kampfmann, 1980; Anderson und Minster, 1979), so kann diese innerhalb eines Frequenzbandes durch eine Verteilung der Relaxationszeiten beschrieben werden (Anderson und Minster, 1979):

$$V_{\tau}(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{\gamma}{\tau_1^{\gamma} - \tau_2^{\gamma}} \cdot \tau^{\gamma-1}, & \tau_2 < \tau < \tau_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.31)$$

Minster und Anderson (1981) geben für dieses Relaxationsspektrum die asymptotischen Formeln für $Q^{-1}(\omega)$ an, aus denen folgt, daß $Q^{-1}(\omega)$ in der geometrischen Mitte des Spektrums (für $\lg \omega_0 = 1/2 \cdot \lg \omega_1 / \omega_2$, $0.1 \leq \gamma < 0.5$, $\omega_1 \ll \omega_2$ und $\Delta \ll 1$) durch

$$Q_m^{-1} = \frac{\Delta}{2} \gamma \pi (\omega_1 / \omega_2)^{\gamma/2} \quad (3.1.32)$$

anzunähern ist. Weiterhin läßt sich Q_{\max}^{-1} für ein solches Spektrum durch

$$Q_{\max}^{-1} \approx \frac{\Delta}{2} \gamma \pi \quad (3.1.33)$$

abschätzen. In Abb. 10 sind verschiedene Q^{-1} -Spektren für $\gamma = 0.25$ und $\tau_1 / \tau_2 = 10^4$ bzw. 10^6 zusammen mit dem zugehörigen Debye-peak dargestellt.

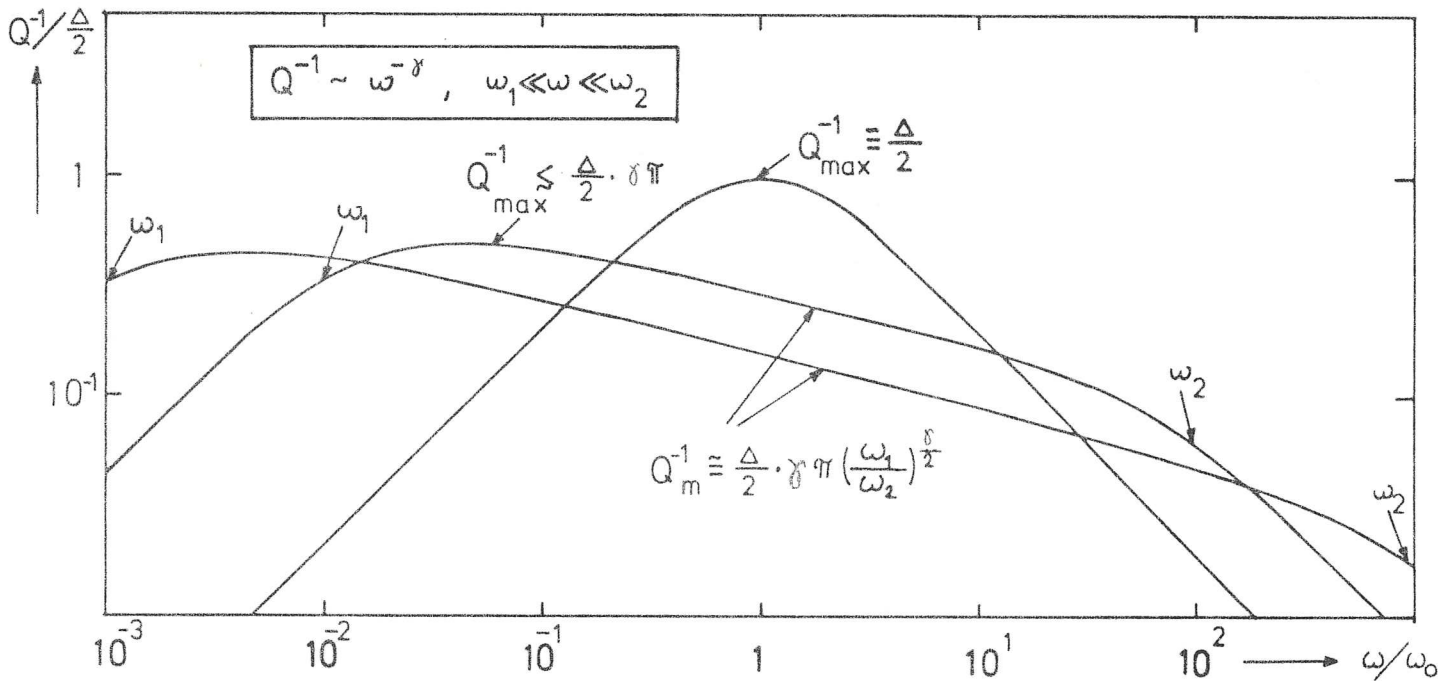


Abb. 10 : Absorptionsspektren für $Q^{-1} \sim \omega^{-\delta}$ im Frequenzbereich $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

Als letztes Beispiel wurde für die Relaxationsfrequenzen eine logarithmische Normalverteilung (Nowick und Berry, 1972) gewählt. Eine solche Verteilung hat im Unterschied zu den vorigen Spektren keine unrealistisch scharfen Eckfrequenzen. Sie lautet:

$$V_{\omega}(\omega) = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega} e^{-\left(\frac{\ln \omega/\omega_0}{b}\right)^2} \quad (3.1.34)$$

Die Größe b bestimmt die Breite des Spektrums, während durch ω_0 die Lage des Maximums des in der logarithmischen Darstellung symmetrischen Spektrums festgelegt wird.

Abb. 11 zeigt wieder normierte Q^{-1} -Spektren für $b=2, 4, 6$ im Vergleich zum Debye-peak. Bei genügend großem b wird der mittlere Bereich des Spektrums weitgehend frequenzunabhängig. Rechts oben in der Abbildung ist die Abnahme des maximalen Q^{-1} und die Zunahme der Halbwertsbreite (in Dekaden) gegenüber dem Parameter b aufgetragen. Für ein b , für das Q_{\max}^{-1} auf $1/4$ des zugehörigen Debye-peaks abgefallen ist, beträgt die Halbwertsbreite des Spektrums immerhin schon sechs Dekaden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß man mit der halben Relaxationsstärke ein gutes Maß für das maximal mögliche Q^{-1} hat.

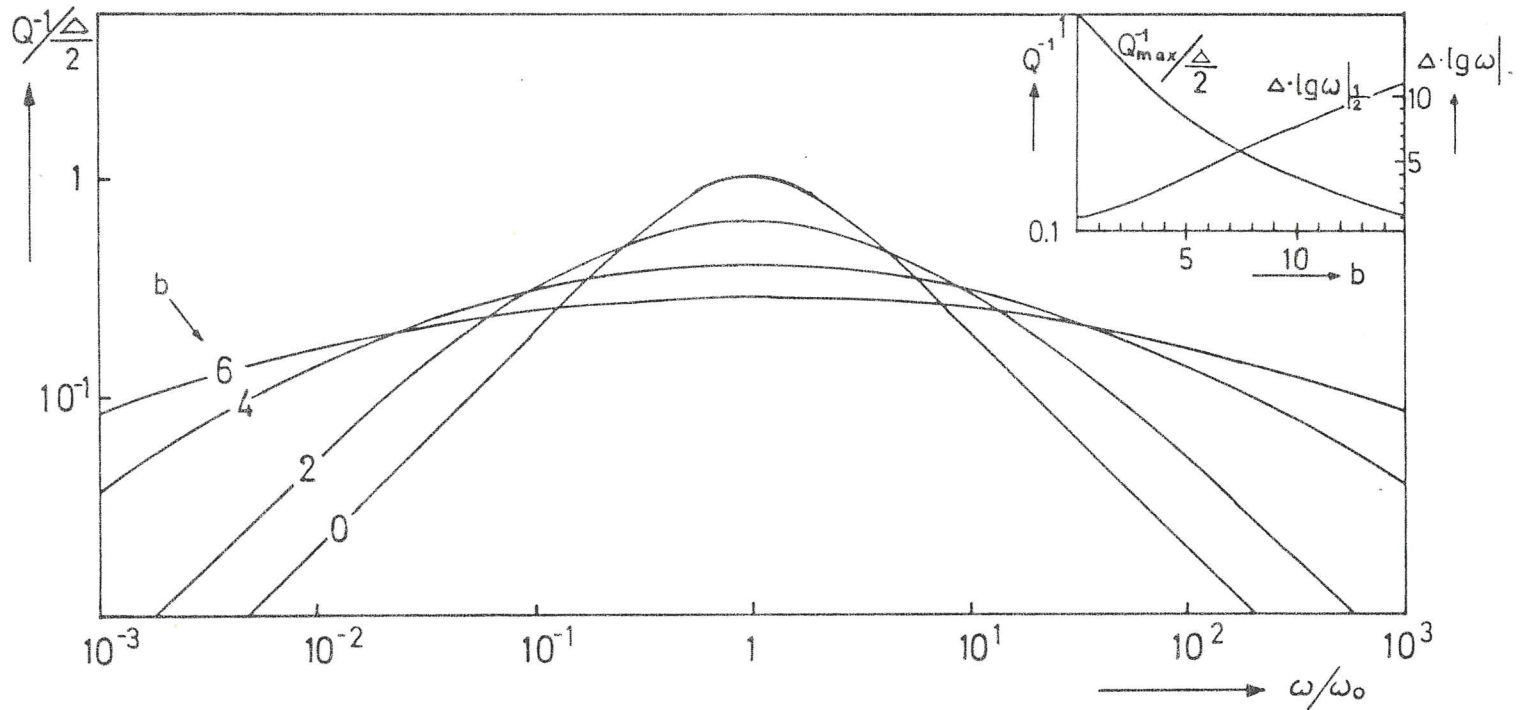


Abb. 11: Absorptionsspektren für log-normale Verteilungen.
 Rechts oben: Abnahme von Q_{\max}^{-1} und Zunahme der Halbwertsbreite $\Delta \lg \omega |_{1/2}$ der Spektren mit dem Parameter b .

Mit (3.1.30) kann man weiterhin mit zusätzlicher Kenntnis oder Annahme der Breite des Absorptionsbandes das Q^{-1} eines nur schwach frequenzabhängigen Absorptionsbandes abschätzen.

3.1.3 Ausbreitung seismischer Wellen im dissipativen Medium

Die wichtigsten Beziehungen für die Ausbreitung seismischer Wellen in einem dissipativen Medium mit dem komplexen Modul $M = M_1 + iM_2 = |M| \exp i\varphi$ werden im folgenden in Anlehnung an Kampmann (1980) oder Berckhemer et al. (1982b) gegeben. Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung mit $\rho =$ Dichte, $u =$ Auslenkung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{M} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.1.35)$$

kann geschrieben werden:

$$u = u_0 \exp i(\omega t - (k_1 + ik_2) \cdot x) \quad (3.1.36)$$

mit der komplexen Wellenzahl $k = k_1 + ik_2$, wobei

$$k_1 = \omega \left(\frac{\rho}{|M|} \right)^{1/2} \cos \varphi / 2 \quad \text{und} \quad k_2 = -\omega \left(\frac{\rho}{|M|} \right)^{1/2} \sin \varphi / 2 \quad (3.1.37)$$

Hieraus ergibt sich die Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{k_1} = \left(\frac{|M|}{\zeta} \right)^{1/2} / \cos \varphi / 2 \approx \left(\frac{|M|}{\zeta} \right)^{1/2} \quad \text{für } Q \gg 1 \quad (3.1.38)$$

Es wird deutlich, daß die hochfrequente bzw. tieffrequente Phasengeschwindigkeit durch den frequenzunabhängigen unrelaxierten bzw. den relaxierten Modul gegeben ist. Im Übergangsbereich ist je nach Annahme der Relaxationszeiten der frequenzabhängige Modul gemäß (3.1.24) zu wählen.

Das seismische Q_{sei}^{-1} ist definiert durch die Energieabnahme ΔW der kinetischen Energiedichte W längs einer Wellenlänge λ

$$Q_{\text{sei}}^{-1} = \frac{\Delta W}{2\pi W} = \frac{W(x) - W(x+\lambda)}{2\pi W(x)} \quad (3.1.39)$$

Mit $W(x) = 1/2 \zeta \cdot (u(x))_{\text{max}}^2$ und $W(x+\lambda) = 1/2 \zeta \cdot (u(x+\lambda))_{\text{max}}^2$ ergibt sich mit (3.1.36), (3.1.37) und (3.1.13)

$$Q_{\text{sei}}^{-1} = (1 - \exp(-4\pi((Q^2+1)^{1/2} - Q))) / 2\pi \quad (3.1.40)$$

Für kleine Dämpfung gilt in erster Näherung: $Q_{\text{sei}} \approx Q + \pi \approx Q$, für große Dämpfung strebt $Q \rightarrow 0$, während $Q_{\text{sei}} \rightarrow \sim 2\pi$.

In einem kausalen, linearen System sind Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion durch die Kramers-Krönig-Relation miteinander verknüpft. Für kleine Dämpfung gibt Zener(1948) eine Näherungsformel für den Zusammenhang zwischen Absorption und dem frequenzabhängigen Realteil des Moduls an:

$$Q^{-1} \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \ln M_1(\omega)}{d \ln \omega} \quad (3.1.41)$$

3.1.4. Zusammenfassung des Kapitels 3.1.

Es wird in Kap. 3.1.1. mit Hilfe der linearen Systemtheorie der komplexe Modul eines linearen rheologischen Systems definiert. Aus Real- und Imaginärteil des Moduls wird die Dämpfungsgröße Q^{-1} definiert. Das rheologische Verhalten eines linearen Standard-Körpers wird besprochen und ein Zusammenhang zwischen dem

maximalen Q^{-1} und der Relaxationsstärke hergestellt. Verteilte Relaxationszeiten führen bei gleicher Relaxationsstärke zu einem Abflachen des Absorptionsbandes, es wird die halbe Relaxationsstärke als eine obere Schranke eines solchen Absorptionsbandes gefunden.

In Kap. 3.1.2. werden die Absorptionsbänder für drei einfache Verteilungen der Relaxationszeiten dargestellt:

- 1.) τ sei uniform bzgl. $\log \tau$ verteilt,
- 2.) es wird eine Verteilung in τ angenommen, die zu einem frequenzabhängigen $Q^{-1} \sim \omega^{-\delta}$ führt,
- 3.) es wird eine logarithmische Normalverteilung gewählt.

Für diese Verteilungen wird jeweils das maximale Q^{-1} als Funktion der Relaxationsstärke gegeben.

In Kap. 3.1.3. wird ein Zusammenhang zwischen seismischen Größen wie Wellengeschwindigkeit und seismischer Dämpfung und den in Kap. 3.1.1. eingeführten Größen Modul und Q^{-1} hergestellt. Als Näherungsform für die Kramers-Krönig-Relation wird die Formel von Zener (1948) gegeben.

3.2. Übersicht über die Schmelzmodelle in der Literatur

Der Einfluß partieller Schmelze, oder allgemeiner, von im Festkörper verteilter Flüssigkeit auf die Elastizität und Anelastizität ist schon lang Gegenstand zahlreicher theoretischer und experimenteller Untersuchungen gewesen. Obwohl Elastizität und Anelastizität bei der Ausbreitung seismischer Wellen eng miteinander verknüpft sind, ist es auch bei der Betrachtung von Zweiphasensystemen (flüssig-fest) sinnvoll, die frequenzunabhängige Elastizität, also die unrelaxierten und eventuell relaxierten Moduli, getrennt von der frequenzabhängigen Anelastizität oder Dämpfung zu betrachten. Wie diese beiden Betrachtungsweisen zusammengefügt werden können, wurde in Kap. 3.1 gezeigt.

Eine Übersicht über die elastischen Eigenschaften zusammengesetzter Materialien sowie von Mehrphasensystemen wird z.B. von Watt et al. (1976) gegeben. Eine Zusammenstellung der Dämpfungsmechanismen findet man z.B. bei Mavko et al. (1979).

3.2.1. Elastizität in einem Zweiphasensystem

Die Elastizität in einem flüssig-festen Zweiphasensystem kann als Spezialfall eines aus zwei Komponenten zusammengesetzten Materials angesehen werden. Es sind hier zahlreiche Ansätze zur Bestimmung der effektiven elastischen Konstanten durchgeführt worden, von denen sich die Eingrenzung durch obere und untere Schranken sowie Ansätze für spezielle Geometrien als gebräuchlich erwiesen haben. Im folgenden wird davon ausgegangen, daß die einzelnen Komponenten homogen und isotrop sind.

Die einfachsten Ansätze zur Bestimmung der effektiven Moduli gehen von der Annahme aus, die Dehnung bzw. Spannung sei im gesamten Zwei-Komponentensystem uniform. Aus diesen beiden ursprünglich von Voigt (1928) bzw. Reuss (1929) vorgeschlagenen Annahmen folgen effektive Moduli M_{eff} , für die Hill (1952) zeigte, daß sie tatsächlich Ober- bzw. Untergrenzen für effektive Moduli bei beliebigen Geometrien darstellen

$$M_{\text{Reuss}} = \left(\frac{1 - \beta}{M_0} + \frac{\beta}{M_1} \right)^{-1} \leq M \leq (1 - \beta) M_0 + \beta M_1 = M_{\text{Voigt}}$$

(3.2.1)

mit M_0, M_1 = Scher- oder K-Modul der beiden Komponenten und β dem Volumenanteil der Komponente M_1 . Im allgemeinen ist die Konstanz der Dehnung bzw. Spannung nicht gewährleistet, im ersten Fall würden die Spannungen an den inneren Grenzflächen nicht im Gleichgewicht stehen, im zweiten Fall müßten Diskontinuitäten in den Verschiebungen an den Grenzflächen auftreten. Für Flüssigkeitsinklusionen versagt die untere Grenze für den Schermodul, da dann $\mu_{\text{Reuss}} = 0$ resultiert. Mitunter ist es nützlich, die effektiven Moduli durch arithmetische oder geometrische Mittelwertbildung der Grenzen anzunähern (Hill, 1952). Dieser sogenannte Voigt-Reuss-Hill Mittelwert liefert vernünftige Ergebnisse, wenn die Moduli der einzelnen Komponenten nicht zu weit auseinander liegen. Hashin und Shtrikman (1963) fanden für isotrope zusammengesetzte Zweiphasensysteme mit Hilfe eines neu entwickelten Variationsprinzips engere Grenzen für die effektiven Moduli (im folgenden mit HS-Grenzen bezeichnet). Für $K_1 < K_0$, $\mu_1 < \mu_0$ lauten die Grenzen

$$K_{\text{HS-}} = K_1 + \frac{1 - \beta}{\frac{1}{K_0 - K_1} + \frac{3\beta}{3K_1 + 4\mu_1}} \leq K \leq K_0 + \frac{\beta}{\frac{1}{K_1 - K_0} + \frac{3(1-\beta)}{3K_0 + 4\mu_0}} = K_{\text{HS+}}$$

$$\mu_{\text{HS-}} = \mu_1 + \frac{1 - \beta}{\frac{1}{\mu_0 - \mu_1} + \frac{6\beta}{5\mu_1} \frac{K_1 + 2\mu_1}{3K_1 + 4\mu_1}} \leq \mu \leq \mu_0 + \frac{\beta}{\frac{1}{\mu_1 - \mu_0} + \frac{6(1-\beta)}{5\mu_0} \frac{K_0 + 2\mu_0}{3K_0 + 4\mu_0}}$$

$$= \mu_{\text{HS+}}$$

(3.2.2)

β ist wieder der Volumenanteil der Phase 1. Für den K-Modul konnten Hashin und Shtrikman zeigen, daß ohne Kenntnis der Geometrie die HS-Grenzen bei gegebenem β die bestmöglichen sind. Die HS-Grenzen für den K-Modul sind identisch mit den effektiven K-Moduli für eine spezielle Geometrie des Zweiphasensystems. Diese sogenannte "composite sphere assemblage" ist raumerfüllend zusammengesetzt aus Kugeln unterschiedlicher Größe, bestehend aus einem Kern der Phase 1 und einer Kugelschale der Phase 0, wobei für jede Kugel das Volumenverhältnis β gelten soll.

Die jeweils andere Grenze erhält man, indem man die Phasen austauscht. Der Schermodul für die "composite sphere assemblage" wird von Hashin (1962; 1970) diskutiert.

Die HS- und Voigt-Reuss-Grenzen sind für ein flüssig-festes Zweiphasensystem in Abb. 12 dargestellt. Als elastische Konstanten wurden typische Moduli für ultramafische Gesteine bzw.

Schmelze gewählt :

$$K_0 = 0.66 \text{ Mb}, \quad \mu_0 = 0.4 \text{ Mb}$$

$$K_1 = 0.2 \text{ Mb}, \quad \mu_1 = 0 \text{ Mb.}$$

Wie die untere Reuss-Grenze für μ , so ist

auch $\mu_{\text{HS-}}$ unbrauchbar, falls eine Phase flüssig ist. $\mu_{\text{HS-}}$

ist in diesem Fall gleich 0, was z.B.

für ein Material, in dem sämtliche Körner

von Flüssigkeit umgeben sind, zu erwarten ist. Es ist

bemerkenswert, daß für $\mu_1 = 0$ $K_{\text{HS-}}$ iden-

tisch mit K_{Reuss} ist.

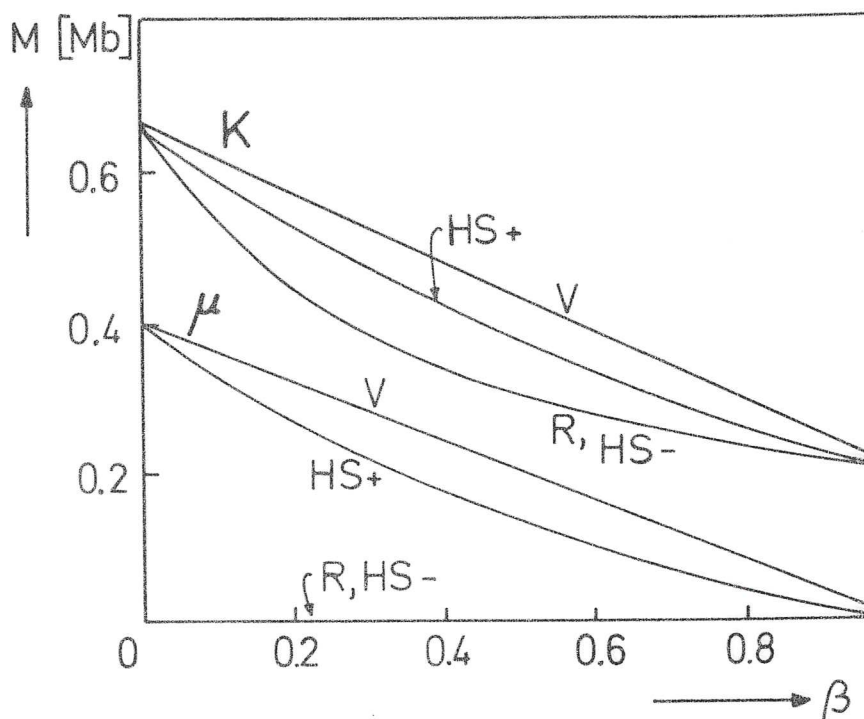


Abb. 12: Voigt-Reuss- und HS-Grenzen für ein flüssig-festes Zweiphasensystem.

Moduli: $K_0 = 0.66 \text{ Mb}$, $\mu_0 = 0.4 \text{ Mb}$, $K_1 = 0.2 \text{ Mb}$

Es wurden noch weitere Versuche unternommen, die Grenzen für effektive Moduli durch Hinzunahme weiterer Informationen über die Phasengeometrie einzuengen. Es sei auf den Übersichtsartikel von Watt et al. (1976) verwiesen.

Annahmen über spezielle Geometrien, selbst-konsistente

Approximation

Die im letzten Abschnitt beschriebenen Methoden liefern für den Fall extrem großer Unterschiede in den Moduli beider Phasen weit auseinander liegende Schranken. Gerade dieser Fall ist jedoch, zumindest für den Schermodul, für partiell geschmolzene Materialien wichtig. Es wird daher erforderlich, bei der Bestimmung effektiver Moduli spezifische Geometrien

für die flüssige Phase anzunehmen.

Liegt die Phase 1 (die später als flüssige bzw. Schmelzphase angenommen wird) in Form weit voneinander verteilter Inklusionen vor, so können die elastischen Wechselwirkungen zwischen den Inklusionen vernachlässigt werden. In diesem Fall reduziert sich das Problem auf die elastische Lösung einer einzelnen, in einem unendlichen Medium eingelagerten Inklusion bei einer im Unendlichen angelegten Spannung.

Für kugelförmige Inklusionen mit den Moduli K_1, μ_1 fanden Hashin (1959) oder Eshelby (1957) die effektiven Moduli. Eshelby's Resultate lauten

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + \beta \frac{K_0 - K_1}{K_0^2} \frac{4\mu_0 + 3K_0}{4\mu_0 + 3K_1}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} + \beta \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1 - \mu_0}{6/5 (\mu_0 - \mu_1) \frac{K_0 + 2\mu_0}{3K_0 + 4\mu_0} - \mu_0}$$

(3.2.3)

Bemerkenswert ist, daß die effektiven Moduli nach (3.2.3) oberhalb der HS+Grenzen liegen und sich für kleine β den HS+Grenzen annähern. Dies liegt darin begründet, daß die elastische Wechselwirkung zwischen den Inklusionen vernachlässigt wurde, mit zunehmendem β aber an Bedeutung gewinnt.

Der Fall ungefüllter, kugelförmiger Inklusionen wurde von Mackenzie (1950) behandelt. Eshelby (1957) untersuchte theoretisch die Spannungen und Dehnungen bei beliebig verteilten, ellipsoidförmigen Inklusionen ohne gegenseitige Wechselwirkung, gibt die effektiven Moduli jedoch nur implizit an. Die Theorie von Eshelby wird in einem späteren Kapitel behandelt.

Wu (1966) leitete effektive Moduli für sphäroidförmige Inklusionen her (mit den Halbachsen $a \neq b \neq c$) und gibt analytische Formeln für den Fall sphäroidförmiger ($a=b \neq c$), "penny"-förmiger ($a=b \gg c$) und nadelförmiger ($a \gg b=c$) Inklusionen an. Im Falle weicher "penny"-förmiger Inklusionen sind diese Formeln nicht mehr anwendbar, Walsh (1969) modifizierte sie daher zu

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + \beta \frac{K_0 - K_1}{K_0^2} \frac{3K_0 + 4\mu_1}{3K_1 + 4\mu_1 + 3\pi\alpha\mu_0 \frac{3K_0 + \mu_0}{3K_0 + 4\mu_0}}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} + \frac{\beta}{5} \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0^2} \left(1 + \frac{8\mu_0}{4\mu_1 + 3\pi\alpha\mu_0 \frac{3K_0 + 2\mu_0}{3K_0 + 4\mu_0}} + \right.$$

$$\left. \frac{2(3K_1 + 2\mu_1 + 2\mu_0)}{3K_1 + 4\mu_1 + 3\pi\alpha\mu_0 \frac{3K_0 + \mu_0}{3K_0 + 4\mu_0}} \right)$$

(3.2.4)

wobei α = Querverhältnis der Inklusion (Verhältnis kleine zu große Halbachse). Auch diese Formeln gelten nur für wechselwirkungsfreie Inklusionen, wodurch β gerade bei kleinem α stark eingeschränkt ist.

Der erfolgreichste, weil vom Prinzip her einfachste Ansatz zur Berücksichtigung größerer Konzentrationen ist die sogenannte selbst-konsistente Approximation. Die nicht selbst-konsistenten Lösungen wie (3.2.3), (3.2.4) ergeben sich dabei als Grenzfall für kleine Konzentrationen.

Die selbst-konsistente Approximation

Die selbst-konsistente Approximation ("self consistent scheme", im folgenden mit SCS bezeichnet) wurde unabhängig voneinander von Hill (1965) für ein Zwei-Komponenten- und von Budiansky (1965) für ein Mehrkomponentensystem entwickelt. Man approximiert hierbei das elastische Feld einer von vielen, nicht notwendig weit voneinander entfernten Inklusionen durch das elastische Feld einer äquivalenten isolierten Inklusion, eingelagert in einem unendlichen homogenen Medium mit den effektiven Moduli. Hill (1965) und Budiansky (1965) wendeten das SCS auf den Fall kugelförmiger Inklusionen an. Hill konnte dabei zeigen, daß die resultierenden Moduli für alle Konzentrationen innerhalb der HS-

Grenzen liegen. Zum Vergleich mit den nicht selbst-konsistenten Resultaten von Eshelby (1957) für Kugelinklusionen seien hier die Ergebnisse von Budiansky dargestellt (reduziert für die zwei Phasen 0 und 1):

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + \beta \frac{K_0 - K_1}{K_0 K} \frac{4\mu + 3K}{4\mu + 3K_1}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} + \beta \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{6}{5} (\mu - \mu_1) \frac{K + 2\mu}{3K + 4\mu} - \mu} \quad (3.2.5)$$

Man erkennt, daß (3.2.5) die gleiche Form wie (3.2.3) hat, jedoch teilweise Moduli der Phase 0 durch die effektiven Moduli ersetzt sind. Die Gleichungen sind miteinander gekoppelt, enthalten die unbekannt effektiven Moduli nur implizit und können nur simultan gelöst werden.

Die schon erwähnten Lösungen für kugel-, scheiben- und nadelförmige Inklusionen wurden von Wu (1966) mit Hilfe des SCS erstellt. Es geht aus Wus Lösungen zwar nicht explizit hervor, Boucher (1974) zeigte jedoch, daß die SCS-Lösung für scheibenförmige Inklusionen direkt jeweils einer der HS-Grenzen entspricht. Dies bestätigt auch den Hinweis von Walpole (1969), nach dem die SCS-Lösungen für scheibenförmige Inklusionen nicht mehr miteinander gekoppelt sind, genau wie es die HS-Grenzen fordern. Watt et al. (1976) geben eine übersichtliche Zusammenstellung der selbst-konsistenten Moduli für scheiben-, kugel- und nadelförmige Inklusionen in ihrem Anhang.

Hier seien die für kleine, aber endliche α modifizierte Formeln von Walsh (1969) für scheibenförmige Inklusionen angegeben, wie sie in der selbst-konsistenten Form aus Walsh's Anhang, in dem sich ein kleiner Druckfehler leicht durch Vergleich mit Wu's Ergebnissen beheben läßt, folgen

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + \beta \frac{K_0 - K_1}{K_0 K} \frac{3K + 4\mu_1}{3K_1 + 4\mu_1 + 3\pi\alpha\mu \frac{3K+\mu}{3K+4\mu}}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} + \frac{\beta}{5} \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 \mu} \left(1 + \frac{8\mu}{4\mu_1 + 3\pi\alpha\mu \frac{3K+2\mu}{3K+4\mu}} + \frac{2(3K_1 + 2\mu_1 + 2\mu)}{3K_1 + 4\mu_1 + 3\pi\alpha\mu \frac{3K+\mu}{3K+4\mu}} \right) \quad (3.2.6)$$

Auch hier erkennt man im Vergleich mit (3.2.4), welche Moduli der Phase 0 durch die effektiven Moduli (ohne Indizes) ersetzt sind. Man sieht, daß $\alpha \rightarrow 0$ nur dann gesetzt werden darf, wenn $(\mu_1/\mu) \gg \alpha$. Läßt man hingegen für $\alpha = 0$ auch noch die Moduli μ_1 oder K_1 gegen 0 gehen, so wird deutlich, daß im Einklang mit den HS-Grenzen auch die effektiven Moduli gegen 0 gehen. Der endliche Inklusionsanteil β muß sich dann längs unendlich dünner, also unendlich ausgedehnter Flächen verteilen, wodurch das Material seine Festigkeit verliert.

Hashin (1968) wies darauf hin, daß sich die Anwendung des SCS auf ein polykristallines Material grundsätzlich von der auf Materialien, die Inklusionen bestimmter Art enthalten, unterscheidet. Im ersten Fall sei es klar, daß als Basiselement oder Inklusion ein Kristallkorn im effektiven, noch zu berechnenden Medium eingebettet werden muß; das effektive polykristalline Material reicht direkt bis an die Inklusion heran. Im zweiten Fall sei dagegen unbestimmt, ob man als einzulagerndes Basiselement eine Inklusion selbst, oder eine mit einer Schale aus Gesteinsmatrix umgebene Inklusion wählen soll. Definitionsgemäß muß eine realistische Inklusion ja zunächst von ihrer Gesteinsmatrix umgeben sein. Ein solcher Ansatz wurde von Kerner (1956) für kugelförmige

Inklusionen durchgeführt, die diesem Ansatz zugrunde liegenden Annahmen sind allerdings von Hashin (1968) als unklar kritisiert worden. Hashin formulierte ein generalisiertes SCS, das er auf allgemeine Leitfähigkeitsprobleme für Zweiphasensysteme anwendet, bei dem die oben beschriebenen Basiselemente als Spezialfälle auftreten. Sein Basiselement besteht aus ei-

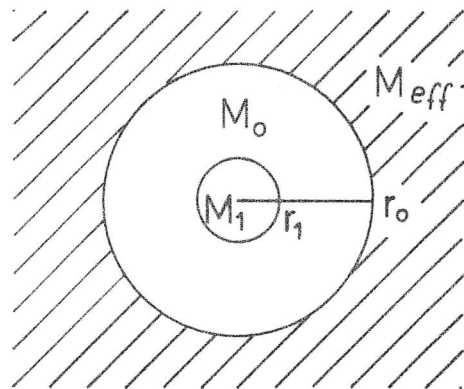


Abb. 13: Einbettung des Basiselements bei Hashins generalisiertem SCS.

$$c = r_1^3 / r_0^3$$

ner kugelförmigen Inklusion der Phase 1 und einer Schale aus dem Matrixmaterial der Phase 0 (Abb. 13), wobei allerdings das Volumenverhältnis $c = \text{Inklusions-/Basiselementvolumen}$ variabel bleibt und zwischen 1 und dem makroskopischen β liegen kann.

Für $c=1$ ergibt sich das üblicherweise benutzte SCS (hier für kugelförmige Inklusionen). $c=\beta$ entspricht der schon erwähnten "composite sphere assemblage". Wie schon beschrieben, ist der K-Modul für diesen Fall identisch mit der oberen HS-Grenze (Hashin, 1962) (für $K_1 \leq K_0$). Interessanterweise stimmt dieser K-Modul mit Kerners effektivem K-Modul überein. Ebenso ist Kerners effektiver Schermodul identisch mit μ_{HS+} . Bemerkenswert für den K-Modul (wegen Hashins Kritik an Kerners Modell jedoch nur unter Vorbehalt für μ) ist hierbei die Äquivalenz jeweils einer HS-Grenze sowohl mit dem entsprechenden Modul der "composite sphere assemblage" ($c=\beta$), als auch mit der entsprechenden selbst-konsistenten Lösung für scheibenförmige Inklusionen. Die untere HS-Grenze für K ist für ein flüssig-festes System (Abb. 12) z.B. gegeben durch die "composite sphere assemblage" mit festen Kugeln, umgeben von einer Schicht Flüssigkeit und gleichzeitig durch die selbst-konsistente Lösung für unendlich dünne scheibenförmige Flüssigkeitsinklusionen.

Hashins generalisiertes SCS wurde bisher noch nicht auf die Bestimmung des Schermoduls angewendet. Hashin selbst erwartet für diesen Fall unübersichtliche Resultate. Problematischer dürfte die Durchführung dieses SCS werden, wenn man es auf von der Kugel abweichende Geometrien der Inklusionen anwenden wollte. Die für diese Fälle durchgeführten Ansätze beschränken sich daher auch alle auf das übliche SCS entsprechend $c=1$.

Wie beschrieben, ist bei scheibenförmigen Inklusionen der Übergang zu verschwindenden Inklusionsmoduli problematisch. Daher entwickelten O'Connell und Budiansky (1974, 1977) und Budiansky und O'Connell (1976) ein Modell für trockene und flüssigkeitsgefüllte Risse bzw. Filme. Bei der Bestimmung der effektiven Moduli wird hierbei unter Berücksichtigung des SCS die Änderung der elastischen Energie durch das Einfügen eines dünnen ellipsoidförmigen Risses in ein belastetes Medium berechnet. Statt des Inklusionsvolumens führen O'Connell und Budiansky als be-

stimmenden Parameter die Ribhäufigkeitsdichte $\varepsilon = N a^3$ ein (mit N = Anzahl der Risse mit dem Radius a pro Volumen). Unter Berücksichtigung des Querverhältnisses α ($\ll 1$) hat man dann eine Bedingung für den Volumenanteil der Risse bzw. Filme $\beta = (4/3)\pi\alpha\varepsilon$. O'Connell und Budiansky zeigen, daß der Effekt ellipsenförmiger Risse mit der Ribdichte $\varepsilon = 2 N/\pi \cdot A^2/P$ (mit A = Fläche und P = Umfang des Risses) im wesentlichen auf kreisförmige Risse der gleichen Dichte ε zurückgeführt werden kann. Anstelle ellipsenförmiger Risse mit definiertem A und P sind dann also kreisförmige mit $a = 2 A/P$ zu setzen.

O'Connell und Budiansky erhalten für trockene Risse bzw. Flüssigkeitsfilme Schermoduli, die für $\varepsilon \approx 0.6$ bzw. 1.4 auf Null abfallen. Bruner (1976) kritisierte, daß von einem Modell, das von einem elastischen Kontinuum ausgeht, ein solcher Verlust des Materialzusammenhalts nicht beschrieben werden könnte und schlägt ein abgeändertes SCS vor, bei dem die Moduli für beliebige ε endlich bleiben. Wie O'Connell und Budiansky in ihrer Entgegnung zu diesem Kommentar ausführen, weist dieses abgeänderte SCS signifikante Unzulänglichkeiten auf, außerdem ist für ein mit vielen Rissen durchsetztes Material in der Tat damit zu rechnen, daß es bei einer endlichen Ribdichte den Zusammenhalt verliert. Ordnet man z.B. den ebenen Grenzflächen verschiedener Kristalle je einen RiB zu, so zerfällt ein aus diesen Kristallen zusammengesetzter Polykristall bei Ribdichten zwischen 0.2 und 0.5 je nach Geometrie der Kristalle (O'Connell und Budiansky, 1977). Bei diesen Überlegungen wird klar, daß die Anwendung eines generalisierten SCS nach Hashin (1968), bei dem ein RiB von einer Schale ungestörten Materials umgeben wäre, nicht sinnvoll ist. Nachbarrisie können durchaus bis an den gerade betrachteten RiB heranreichen, das von O'Connell und Budiansky benutzte SCS approximiert statistisch gesehen genau diesen Effekt.

Bei der Betrachtung von Flüssigkeitsinklusionen kommt im Unterschied zu festen Inklusionen als zusätzlicher Faktor die Frage der Verbundenheit, sowie die damit zusammenhängende Unterscheidung zwischen relaxierten und unrelaxierten Moduli hinzu. Sind alle Inklusionen voneinander isoliert, so wird sich bei äußerer Belastung (Scherung, Kompression) im allgemeinen auf Grund

unterschiedlicher Geometrie und Orientierung der Inklusionen ein unterschiedlicher Flüssigkeitsdruck einstellen. Das elastische Verhalten entspräche dem von Festkörperinklusionen, deren Schermodul man gegen Null streben ließe. Setzt man nun ein Material mit zusammenhängenden Inklusionen einer sprunghaften Belastung aus, so ist zum Zeitpunkt $t=0$ noch kein Druckausgleich zwischen Inklusionen mit unterschiedlicher Orientierung oder Geometrie möglich, das Material verhält sich, als wären die Inklusionen voneinander isoliert. Man kann die für diesen Fall geltenden effektiven Moduli also als unrelaxiert bzgl. der Strömung zwischen Inklusionen ansehen.

Der Vollständigkeit halber seien hier schon die unrelaxierten Moduli bzgl. der viskosen Scherrelaxation genannt. Hierbei weist die Flüssigkeit zum Zeitpunkt $t=0$ wegen ihrer Viskosität scheinbar einen hohen Schermodul auf, durch den z.B. im Filmmodell (O'Connell und Budiansky, 1977) die Porenwände miteinander "verklebt" sind. Ob dieser, mit sehr kleinen Relaxationszeiten verbundene Effekt, für seismische Frequenzen relevant ist, wird im nächsten Abschnitt diskutiert. Wenn nicht anders angegeben, ist im folgenden immer unrelaxiert bzgl. Strömung zwischen Inklusionen gemeint.

In einem zusammenhängenden Porensystem werden sich nach genügend langer Zeit unterschiedliche Porendrücke ausgeglichen haben. Hieraus resultieren dann die im allgemeinen schwächeren relaxierten oder statischen Moduli. Im Fall von reiner Scherung wird bei isotrop verteilten Inklusionen keine Nettovolumenänderung, also kein Porendruck resultieren. Der effektive Schermodul entspricht dem für trockene Poren (O'Connell und Budiansky, 1977). Bei reiner Kompression wird bei gleicher Geometrie der Inklusionen der Porendruck überall weitgehend gleich sein und somit dürfte zwischen dem relaxierten und unrelaxierten K-Modul kein Unterschied auftreten (O'Connell und Budiansky, 1977). Es sei jedoch bemerkt, daß auf Grund der Kopplung der effektiven Moduli beim SCS, je nachdem, ob die Gleichungen für relaxierte oder unrelaxierte Moduli gelöst werden, Unterschiede im K-Modul auftreten können (Mavko, 1980). Auf diesen Effekt wird weiter unten eingegangen. Haben die Inklusionen unterschiedliche Geometrie, so können auch bei reiner Kompression unter-

schiedliche Porendrücke auftreten, deren Unterschiede sich dann bei verbundenen Inklusionen ausgleichen können (Korrिंगa und Thompson, 1977; Korrिंगa et al., 1979; Johnston et al., 1979).

Die Gleichungen für die selbst-kons effektiven Moduli für flüssigkeitsgefüllte dünne Filme lauten nach O'Connell und Budiansky (1977) einschließlich einer Verbesserung von Mavko (1980) in Abhängigkeit von β :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + \frac{4}{3\pi} \frac{1-\nu^2}{K} \frac{K_0 - K_f}{K_0} D \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.2.7)$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} + \frac{8}{15\pi} \frac{1-\nu}{\mu} \left((2-\nu) \frac{K_0 - K_f}{K_0} D + 3 \right) \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.2.8)$$

$$\nu = \nu_0 + \frac{4}{15\pi} \frac{1-\nu^2}{2-\nu} \left(2(1-2\nu_0) - (2-\nu)(1+3\nu_0) \frac{K_0 - K_f}{K_0} \cdot D \right) \frac{\beta}{\alpha}$$

mit

$$D = \left(1 + \frac{4}{3\pi} \frac{1-\nu^2}{1-2\nu} \frac{K_f}{K} \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \quad (3.2.10)$$

mit K_0 , μ_0 , ν_0 , K , μ , $\nu = K$ -, Schermodul und Poissonkonstante für das ungestörte bzw. effektive Material, $K_f = K$ -Modul der Flüssigkeit. Für isolierte Inklusionen bzw. unrelaxierte Moduli sind diese Gleichungen mit dem entsprechenden K_f simultan (durch Iteration) zu lösen. Für trockene Risse ist bei der Iteration $K_f = 0$ zu setzen, wodurch $D=1$ wird. Für den relaxierten Fall schließlich ist der Schermodul $\mu = \mu_r$ mit $D = 1$ (also trockene angenommene Risse) zu berechnen, der K -Modul wird dann anschließend iterativ mit (3.2.7), (3.2.10) und der üblichen Beziehung mit dem schon bekannten μ_r

$$\nu = \frac{3K - 2\mu_r}{6K + 2\mu_r} \quad (3.2.11)$$

bestimmt.

Obige Gleichungen gelten für ein bestimmtes Querverhältnis. Liegt eine Verteilung $V_\alpha(\alpha)$ der Querverhältnisse vor mit $\int_0^\infty V_\alpha(\alpha) d\alpha = 1$,

so ist in Gleichung (3.2.7) bis (3.2.9) α durch

$$\alpha' = \int_0^{\infty} V_{\alpha}(\alpha) \cdot \alpha \, d\alpha \quad (3.2.12)$$

und D durch

$$D' = \int_0^{\infty} D V_{\alpha}(\alpha) \, d\alpha$$

zu ersetzen. Für trockene Risse ($D=1$) oder bei relaxiertem Schermodul läßt sich jede beliebige Verteilung $V_{\alpha}(\alpha)$ auf genau ein repräsentatives Querverhältnis α' zurückführen. Für unrelaxierte und gesättigte Moduli ist dies annähernd der Fall, so lange $\alpha \ll K_f/K$.

Durch die in (3.2.7) und (3.2.8) gewählte Darstellung lassen sich die selbst-konsistenten Moduli leicht in die nicht selbst-konsistente Form bringen, indem für alle rechts des Gleichheitszeichens auftretenden Moduli ohne Index die ungestörten Moduli zu setzen sind.

Die Gleichungen (3.2.7) und (3.2.8) sollten konsistent mit der selbst-konsistenten Form der Walsh-Gleichungen (3.2.6) sein. Dies ist, wie man durch Vergleich leicht überprüfen kann, für den K-Modul der Fall. Für den Schermodul ist die Übereinstimmung im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ mit $\beta/\alpha \sim \epsilon = \text{const.}$ gegeben. Beim Grenzübergang ist dabei für D zu setzen: $D \rightarrow 0$ für $K_f \neq 0$ und $D \rightarrow 1$ für $K_f = 0$.

Korringa et al. (1979) entwickelten ein selbst-konsistentes Modell für flüssigkeitsgefüllte Poren, indem sie die flüssige sowie die feste Phase in Form sphäroidförmiger oder sphärischer Inklusionen bzw. Körner in ein effektives Medium einbetten. Sie weisen auf Unzulänglichkeiten des üblichen SCS hin. Zur Behebung schlagen sie die Einbettung in ein Medium mit bestimmten Moduli, die sich von den resultierenden effektiven unterscheiden können, vor und geben für diese Moduli spezielle implizite Bedingungen an. Sie verfolgen diesen Weg jedoch nicht weiter, so daß offen bleibt, ob dieses Verfahren signifikant unterschiedliche Ergebnisse liefert.

In den bisher beschriebenen Modellen wurden die Flüssigkeitsinklusionen als ellipsoidförmig angenommen, sie weisen also überall eine konvexe Krümmung auf. Diese Annahme führt insbesondere bei flachen Rissen dazu, daß die Rißseiten über ihre

gesamte Fläche entkoppelt sind. Mikroskopische Untersuchungen an Gesteinen zeigen jedoch, daß die Porenräume unregelmäßig sind und Reißflächen an einzelnen Stellen in Kontakt miteinander kommen können (Walsh und Grosenbaugh, 1979). Dieser Effekt nimmt bei trockenen oder mit einer kompressiblen Flüssigkeit gefüllten Poren mit zunehmendem hydrostatischen Druck zu. Mavko und Nur (1978) und Walsh und Grosenbaugh (1979) stellten theoretische Modelle für die Kompressibilität für solche nicht ellipsoidförmigen Risse auf. Für den Schermodul sind solche Untersuchungen bisher noch nicht durchgeführt worden. Vorsicht dürfte jedoch bei der Anwendung der Modelle mit ellipsoidförmigen Rissen für den Fall extrem kleiner Querverhältnisse geboten sein.

Die von Bulau et al. (1979) und Waff und Bulau (1979) gefundene Schmelzkonfiguration in Form

eines Kanalsystems längs Kornkanten bildet die Grundlage des Schmelzmodells von Mavko (1980) (Abb. 14). In diesem Modell kann durch den Parameter ϵ die Form des Kanalquerschnitts variiert werden, wodurch unterschiedliche Dihedralwinkel approximiert werden können. Zur Bestimmung der effektiven Moduli wird in Mavkos Modell ein Kanal gemäß dem SCS in das effektive Medium eingelagert, welches von außen belastet wird. Die Berechnung der Moduli erfolgt dann mit Hilfe eines Reziproktheorems

-auf das weiter unten noch eingegangen wird- über die Verschiebung der Porenwände, wobei über alle Orientierungen gemittelt wird. Der relaxierte Schermodul ergibt sich aus der schon oben begründeten Annahme trockener Poren, also $\mu_r = \mu_d$. Der unrelaxierte Schermodul μ_u wird unter Berücksichtigung des Porendrucks

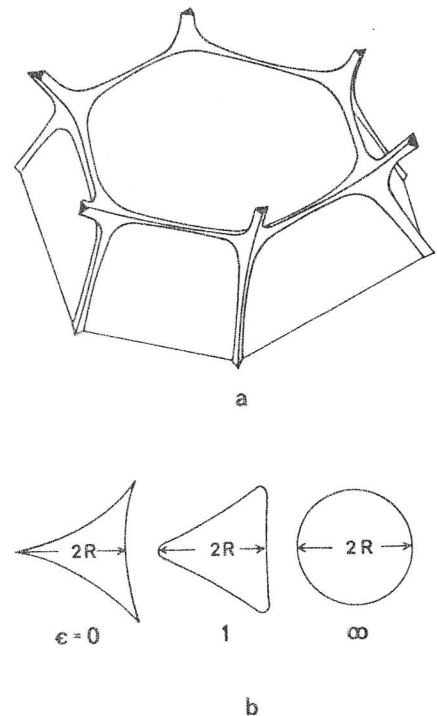


Abb. 14: a) Schematische Darstellung der Schmelzkanäle längs Kornkanten, b) Querschnitte der Kanäle für Mavkos Modelle. (aus: Mavko, 1980)

schon oben begründeten Annahme trockener Poren, also $\mu_r = \mu_d$. Der unrelaxierte Schermodul μ_u wird unter Berücksichtigung des Porendrucks

berechnet, wobei bei reiner Scherung dieser Porendruck von der Orientierung des Kanals abhängt. Ein Kanal parallel zur größten Druck-, also senkrecht zur größten Zügspannung, wird einen kleineren Porendruck aufweisen

als umgekehrt (Abb. 15).

Die Bestimmung des gesättigten K-Moduls erfolgt mit Hilfe des trockenen K-Moduls durch die Gassmannrelation. Gassmann (1951) berechnete für ein gesättigtes Gestein den effektiven K-Modul aus dem K-Modul der Gesteinsmatrix K_o , dem

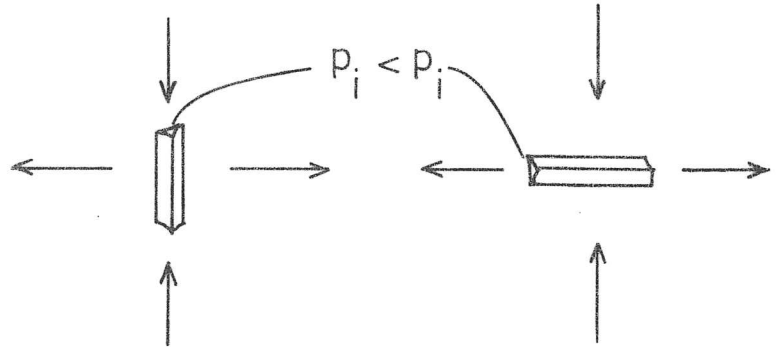


Abb. 15: siehe Text.

trockenen K-Modul K_d

des Gerüsts und dem K-Modul der Flüssigkeit K_f unter der Bedingung, daß bei äußerer Kompression der Porendruck im Gestein einheitlich ist und keine Flüssigkeit entweichen kann. Die Gleichungen für das Mavkomodell lauten:

relaxiert:

$$\frac{1}{K_d} = \frac{1}{K_o} + \Theta_{Ka} (K_d, \mu_r, \nu_r) \cdot \beta \quad (3.2.13)$$

$$K_r = K_o \frac{K_d + F}{K_o + F}, \quad F = \frac{K_f (K_o - K_d)}{\beta (K_o - K_f)} \quad (3.2.14)$$

$$\frac{1}{\mu_r} = \frac{1}{\mu_o} + B_{Ka} (K_d, \mu_r, \nu_r) \cdot \beta \quad (3.2.15)$$

$$\nu_r = \frac{3K_d - 2\mu_r}{6K_d + 2\mu_r} \quad (3.2.16)$$

unrelaxiert:

$$\frac{1}{K'_d} = \frac{1}{K_o} + \Theta_{Ka} (K_u, \mu_u, \nu_u) \cdot \beta \quad (3.2.17)$$

$$K_u = K_o \frac{K'_d + F}{K_o + F}, \quad F = \frac{K_f (K_o - K'_d)}{\beta (K_o - K_f)} \quad (3.2.18)$$

$$\frac{1}{\mu_u} = \frac{1}{\mu_o} + A_{Ka} (K_u, \mu_u, \nu_u) \cdot \beta \quad (3.2.19)$$

$$\nu_u = \frac{3K_u - 2\mu_u}{6K_u + 2\mu_u} \quad (3.2.20)$$

wobei die Terme Θ_{Ka} , B_{Ka} und A_{Ka} in Anhang C gegeben sind.

Die selbst-konsistente Bestimmung der relaxierten Moduli erfolgt nun, indem (3.2.13), (3.2.15) und (3.2.16) simultan gelöst werden. Hieraus folgt μ_r und K_d . Für den gesättigten relaxierten K_r -Modul wird (3.2.14) direkt gelöst. Für die unrelaxierten Moduli müssen (3.2.17) bis (3.2.20) simultan gelöst werden. Mavkos Formel für ν_u (Gleichung 21 in Mavko, 1980) enthält offenbar Druckfehler, ν_u dürfte durch (3.2.20) gegeben sein. Mavkos Berechnung der gesättigten Moduli erfolgt jeweils über den trockenen K_d -Modul und die Gassmannrelation (Gassmann, 1951) (3.2.14) bzw. (3.2.18). Mavko begründet nicht, welche Voraussetzungen und Konsequenzen mit der Einbeziehung der Gassmannrelation in die Methode des SCS verbunden sind. In der originalen Gassmannrelation ist K_d der K-Modul des trockenen Gesteinsgerüsts, bei Mavkos SCS wird zur K_d -Bestimmung ein trockener Kanal in ein effektives Medium mit gesättigten Nachbarkanälen eingebettet angenommen. Dieser Punkt wird in einem späteren Abschnitt noch behandelt.

In Abb.16 ist der Effekt des SCS für das Mavkomodell dargestellt (gleiche Moduli wie in Abb. 12, $\epsilon = 0$). Oben sind die unrelaxier-

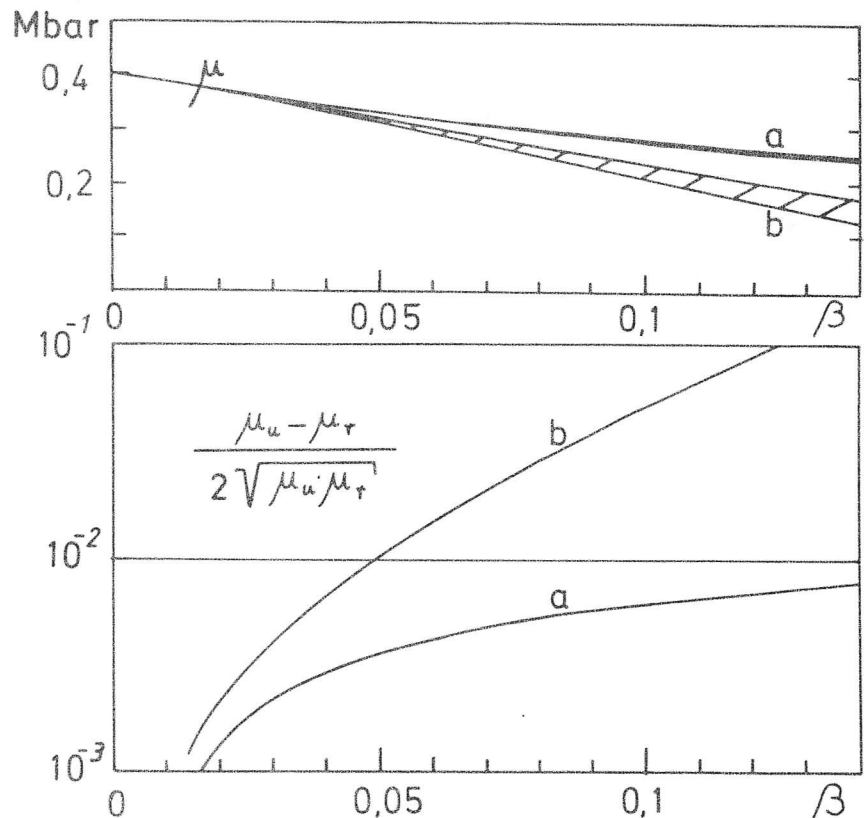


Abb.16: Mavko-Moduli mit (b) und ohne (a) SCS. Unten: Maximales Q^{-1} . Moduli wie in Abb. 12.

ten und relaxierten Schermoduli mit dem SCS (b) und ohne SCS (a) aufgetragen. Der Unterschied macht sich für $\beta > 5\%$ deutlich bemerkbar. Neben dem stärkeren Abfall der Moduli mit SCS fällt die größere Differenz zwischen unrelaxierten und relaxierten Moduli auf. Dies führt, wie das untere Bild zeigt, zu einem Unterschied in Q_{\max}^{-1} von über einer Dekade für $\beta \geq 10\%$. Es stellt sich hierbei die Frage, wie zuverlässig das SCS ist, wenn man Aussagen über Q^{-1} machen will.

In Abb. 17 und 18 sind Beispiele der verschiedenen besprochenen Modelle aufgetragen (Moduli wie Abb.12). Abb.17a zeigt die selbst-konsistenten Moduli für kugelförmige Inklusionen nach (3.2.5). Im Vergleich hierzu sind in Abb.17b die Moduli für Kanäle (u: unrelaxiert, r: relaxiert) des Mavkomodells dargestellt. Zylinderförmige Kanäle ($\epsilon = \infty$) weisen einen mit Kugeln vergleichbaren schwachen Modulabfall auf. Der Abfall für spitzkantige Kanäle ($\epsilon = 0$) ist etwa doppelt so stark. Außerdem laufen relaxierte und unrelaxierte Moduli schneller auseinander, wodurch das Q_{\max}^{-1} für $\epsilon = 0$ um etwa eine Größenordnung höher ausfällt. In Abb. 18a (unrelaxiert) und 18b (relaxiert) sind schließlich die Moduli für das Filmmodell (O'Connell und Budiansky, 1977) für verschiedene α (fest) und Verteilungen von α aufgetragen. Als Verteilung wurde ein $V_{\ln}(\ln \alpha) d \ln \alpha = \text{const.}$ (vgl.(3.1.26)) zwischen den angegebenen α_1 und α_2 gewählt. Nach (3.2.12) entspricht etwa jeder Verteilung V ein entsprechendes α' mit

$$\alpha' = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\ln \alpha_2 / \alpha_1} \quad (3.2.21)$$

Man erkennt, daß mit kleinem α ein beliebig starker Modulabfall erreicht werden kann, man erreicht $\mu = 0$, also die unter HS-Grenze für ein fest-flüssiges System, bei gegebenem β durch geeignete Wahl von α . Da hier nicht die Rißdichte von O'Connell und Budiansky, sondern α und β als Variable gewählt werden, resultiert eine Mehrdeutigkeit der Moduli: ein bestimmter Modulabfall läßt sich durch eine Mehrzahl von Parametern α, β beschreiben.

Abb. 18a und b (Seite 42): Unrelaxierte (a, oben) und relaxierte (b, unten) Moduli für Filme (O'Connell und Budiansky, 1977). Querverhältnisse bzw. Verteilungen von α uniform bzgl. $\ln \alpha$ zwischen α_1 und α_2 wie angegeben.

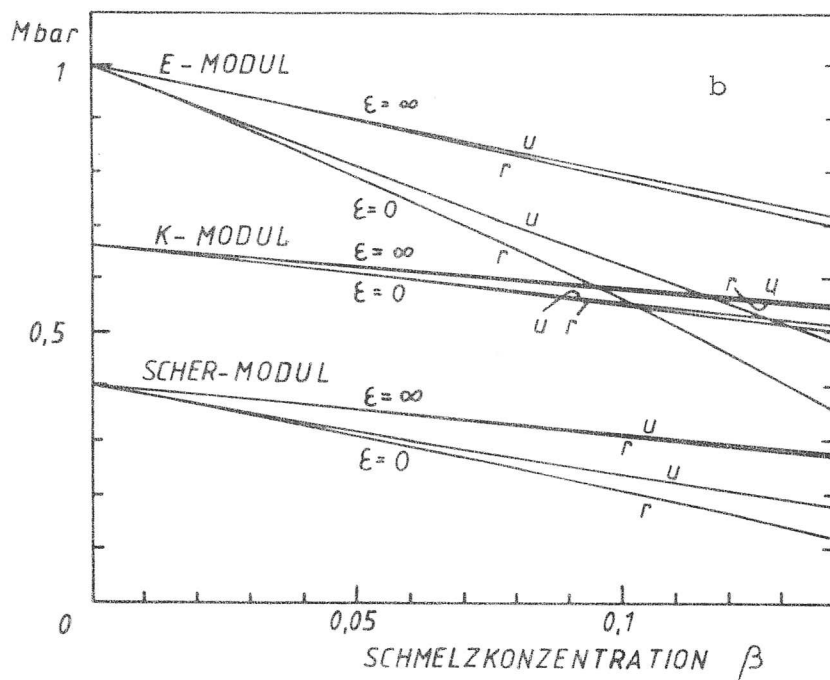
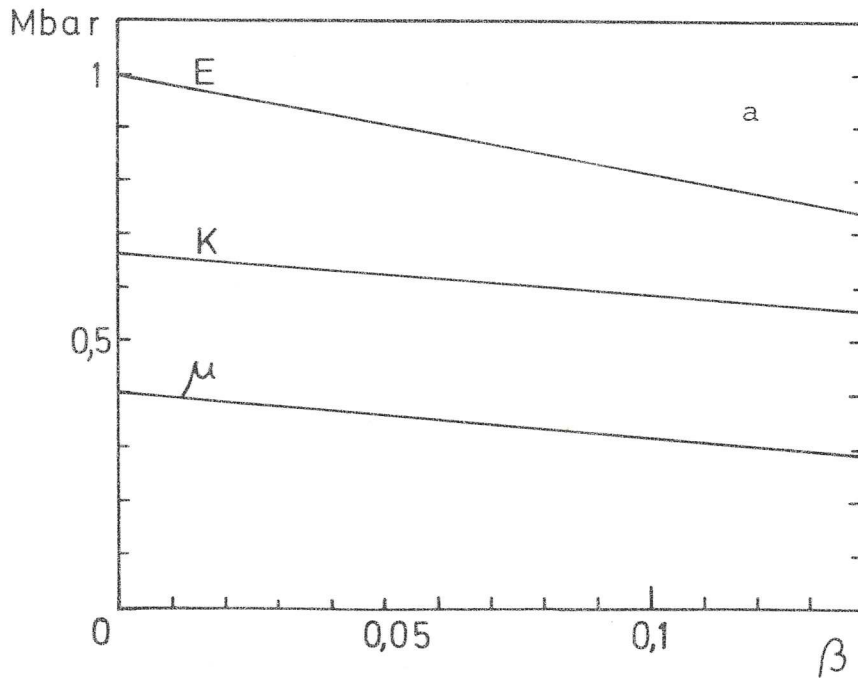


Abb. 17: Selbst-konsistente Moduli in Abhängigkeit von der Schmelzkonzentration. Ungestörte Moduli wie in Abb. 12.

a) Kugelförmige Inklusionen

b) Mavkocanäle, u = unrelaxiert

r = relaxiert

$\epsilon = 0$: spitzkantiger Querschnitt

$\epsilon = \infty$: kreisförmiger Querschnitt

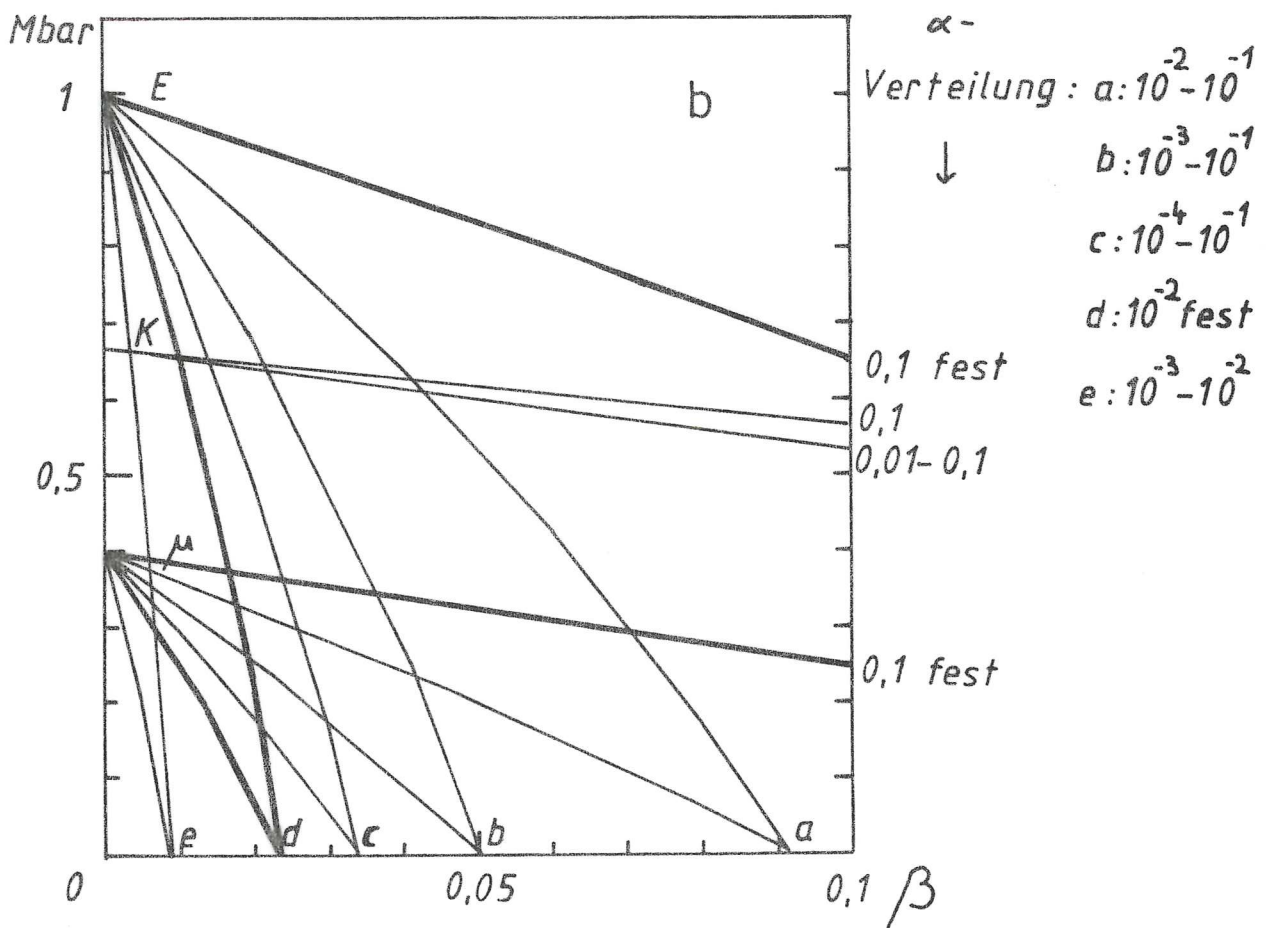
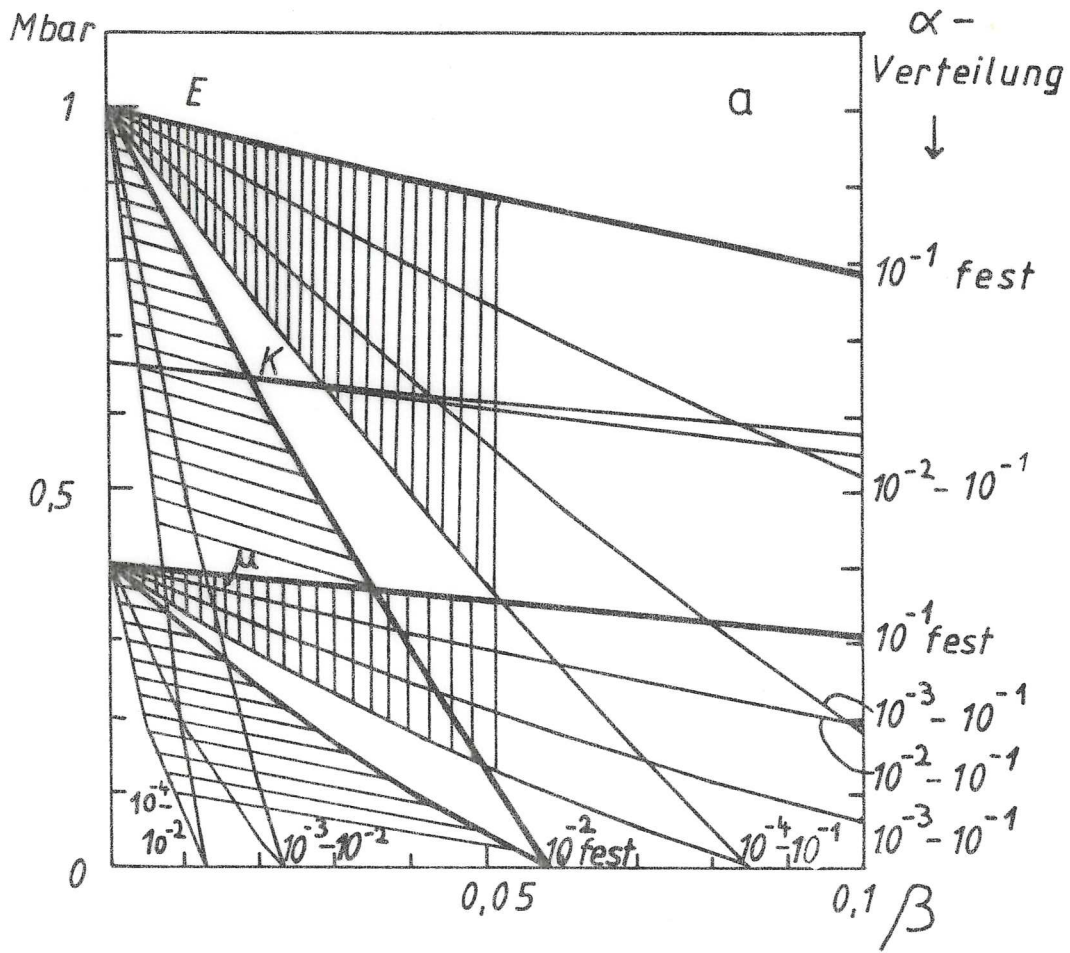


Abb. 18a und 18b: Text siehe Seite 40 .

3.2.2. Dämpfung in einem flüssig-festen Zweiphasensystem

Die Dämpfung in einem System, das Flüssigkeitsinklusionen enthält, kann durch unterschiedliche physikalische Prozesse hervorgerufen werden. Die wichtigsten hiervon sind Relaxation durch Strömung von Flüssigkeit, durch Phasenumwandlungen und durch thermoelastisch induzierten Wärmefluß.

Strömung von Flüssigkeit: Eine grundlegende Theorie zur Wellenausbreitung in einem porösen, flüssigkeitsgesättigten Medium wurde schon 1956 (a,b) von Biot aufgestellt. Es wurden für ein solches Zweiphasensystem Bewegungsgleichungen hergeleitet, in denen die mittlere Flüssigkeitsbewegung über einen Massenkopplungsparameter mit der mittleren Bewegung der festen Matrix gekoppelt ist. Es ergeben sich für genügend niedrige Frequenzen, bei denen von einer laminaren Strömung ausgegangen werden kann (Biot, 1956 a) als Lösung eine Scherwelle und zwei Kompressionswellen, von denen die eine einer Diffusionswelle entspricht und innerhalb einer Wellenlänge fast vollständig abgeklungen ist. Biot erhält frequenzabhängige Wellengeschwindigkeiten $\sim \omega^2$, die im betrachteten Frequenzbereich jedoch nur sehr wenig (<0.5%) vom unrelaxierten Fall abweichen. Die mit diesen Referenzgeschwindigkeiten verbundenen unrelaxierten Moduli für poröses, gesättigtes Material wurden von Biot nicht explizit in Termen der Porosität und Porengeometrie angegeben.

White (1965) diskutiert die von Biot aufgestellte Theorie und beschreibt anhand eines einfachen Ansatzes die Natur der Dämpfungsmechanismen. Danach lassen sich die Ergebnisse von Biot in folgender Form darstellen

$$Q_P^{-1} = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{K_o}{K_s + 4/3 \mu_s} \frac{1 - K_d/K_o}{1 - \beta + \beta K_o/K_f - K_d/K_o} \right)^2 \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{k \cdot \rho_f}{\eta} \omega$$

$$Q_S^{-1} = \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{k \cdot \rho_f}{\eta} \omega \quad (3.2.22)$$

mit β = Porosität, K = Kompressionsmodul, μ = Schermodul, ρ = Dichte, k = Permeabilität, η = Viskosität der Flüssigkeit, wobei die Indizes folgende Bedeutung haben: o: Material der Gesteinsmatrix, s: gesättigtes Gestein, f: Porenflüssigkeit, d: trockene Gesteinsmatrix; Q_p, Q_s = Q-Faktoren für p- und s-Wellen.

Im Falle der Scherwellendämpfung und dem entsprechenden Term bei Q_p^{-1} bewegt sich beim Durchgang einer Welle die Flüssigkeit auf Grund ihrer Trägheit nicht in Phase mit der Gesteinsmatrix, so daß im Mittel eine mit viskoser Reibung verbundene Relativbewegung zwischen Flüssigkeit und Gestein resultiert. Der zweite Term in der Klammer bei Q_p^{-1} resultiert aus einer Flüssigkeitsströmung relativ zum Gestein, die durch den Druckgradienten längs einer halben Wellenlänge induziert wird. Dieser Druckgradient bewirkt eine relative Flüssigkeitsströmung, die zu der durch Trägheitskräfte hervorgerufenen Bewegung um 180° phasenverschoben ist. Diese Phasenverschiebung drückt sich durch das Minuszeichen in der Klammer aus. Q_p^{-1} ist daher im allgemeinen deutlich kleiner als Q_s^{-1} (White, 1965).

White (1965) setzt in die Formeln (3.2.22) experimentell bestimmte Daten für Berea-Sandstein ein und findet, daß die Absorption gemäß (3.2.22) für seismische Frequenzen vernachlässigbar ist. Zu der gleichen Schlußfolgerung für gesättigte Sedimente gelangen auch Johnston et al. (1979) und Stoll und Bryan (1970). Es wird nun gezeigt, daß (3.2.22) auch für partiell geschmolzenes Material vernachlässigbar ist. Die Permeabilität kann geschrieben werden (Schopper, 1966):

$$k = \frac{a_{\text{eff}}}{8\pi} \frac{1}{U} \beta \quad (3.2.23)$$

mit a_{eff} =effektiver Porenquerschnitt, U =Umwegkonstante ("tortuosity"). Für partiell geschmolzenes Material läßt sich k nach oben abschätzen durch ein kubisch gekörntes Material mit zylindrischen Schmelzkanälen mit dem Querschnitt $a=a_{\text{eff}}$ längs der Kornkanten. Mit d als Kantenlänge gilt

$$\beta = \frac{3 a_{\text{eff}} d}{d^3}$$

Mit $U=3$ für ein kubisches Netzwerk ergibt sich dann

$$k_{\text{zyl}} = \frac{d^2}{72\pi} \beta^2$$

Man kann auch zeigen, daß im Fall von Flächenbenetzung das k immer kleiner als k_{zyl} ist. Mit einer maximalen Korngröße von $d=10^{-2}\text{m}$, einer unteren Viskositätsgrenze für Basaltschmelze von

1 Pa s (Kushiro, 1977), einer Dichte von Basalt von $\rho = \rho_f = 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ und einer Frequenz von 10 Hz ergibt sich dann

$$Q_s^{-1} < 0.1 \beta^2$$

Q_s^{-1} hätte z. B. bei 10% Schmelze eine Obergrenze von 10^{-3} und ist somit gegenüber dem in partiell geschmolzenem Material gemessenen Q^{-1} vernachlässigbar.

Die in der Biot-Theorie auftretenden Flüssigkeitsströmungen haben räumliche Variationen, die durch die seismischen Wellenlängen gegeben sind. Mikroskopische Heterogenitäten, wie variable Porengeometrien und Orientierungen, können jedoch ein lokal stark inhomogenes Strömungsfeld erzeugen, das bei der regionalen Betrachtungsweise nach Biot im Mittel keinen Beitrag liefert. Gerade solche lokalen Strömungen können aber mit einer signifikanten Dissipation verbunden sein.

Die Berücksichtigung dieser lokalen Effekte erfordert zusätzlich detaillierte Kenntnisse über die Porengeometrien. Man kann grundsätzlich zwei verschiedene Strömungsmechanismen unterscheiden, die ihrerseits durch ihre Relaxationszeiten charakterisiert sind. Es handelt sich hierbei um viskose Relaxation von Scherung gegenüberliegender Porenwände und um den Ausgleich unterschiedlicher Porendrücke entweder innerhalb einzelner irregulärer Poren oder zwischen benachbarten, verschieden orientierten Inklusionen.

Viskose Spannungsrelaxation wird besonders wichtig, wenn sie an flächenhaften Porenräumen wie Rissen oder Korngrenzflächen auftritt. Relaxation tritt in diesem Fall dadurch auf, daß gegenüberliegende Porenwände bei einer sprunghaft angelegten äußeren Spannung zunächst durch die viskose Schicht miteinander verschweißt sind und sich erst mit zunehmender Zeit durch viskoses Gleiten relativ zueinander bewegen können. Dies führt dann schließlich zu einer Spannungsrelaxation mit scherspannungsfreien Porenwänden.

Sie ist nicht beschränkt auf das Auftreten von Schmelze als viskoser Phase, sondern wurde schon 1947 von Kê und von Zener (1941; 1948) im Zusammenhang mit viskos relaxierenden Korngrenzflächen in polykristallinen Metallen beschrieben. Kê (1947) be-

obachtete Q^{-1} -Werte bis zu 0.1. Zener (1948) berechnete für ein Material aus regulären Polyedern gleicher Größe eine Relaxationsstärke des Elastizitätsmoduls von ca. 0.54 und des Schermoduls von ca. 0.66. Da diese Berechnungen auf der Grundannahme beruhen, daß alle Korngrenzflächen im Polykristall scherspannungsfrei seien, geht in dieses Ergebnis nicht die Dicke der viskosen Schicht bzw. die Schmelzkonzentration ein. Wenn man annimmt, daß kleine Unregelmäßigkeiten oder Hindernisse an den Korngrenzen eine vollständige Scherspannungsrelaxation leicht verhindern können, so dürften die Relaxationsstärken deutlich kleiner sein (Nowick und Berry, 1972).

Kê (1947) berechnete für die Relaxationsfrequenzen für Scherung:

$$f = \frac{c}{d} \frac{\mu}{\eta} \quad (3.2.24)$$

mit c =Dicke der viskosen Schicht, d =Korndurchmesser, η =Viskosität.

Walsh (1968; 1969) berechnete die viskose Spannungsrelaxation für ein Material, das weit voneinander entfernte, statistisch orientierte, abgeflachte ($\alpha \ll 1$, α =Querverhältnis), sphäroidische Flüssigkeitsinklusionen enthält. Er ging von den effektiven Moduli für ein elastisches Material mit ellipsoidförmigen Inklusionen mit dem Schermodul μ_2 aus (Wu, 1966). Wie Walsh (1968) zeigte, erhält man die komplexen effektiven Moduli für ein viskoelastisches Material mit geometrisch ähnlichen Flüssigkeitsinklusionen, indem man in die Gleichungen für die effektiven Moduli anstelle von μ_2 den Ausdruck $i\omega\eta$ setzt. Walsh fand, daß sich ein solches Material mit geometrisch identischen Inklusionen wie ein linearer Standard-Körper verhält. Er erhielt für ein maximales Q_s^{-1} eine charakteristische Frequenz von etwa

$$\omega_0 \cong \frac{\alpha \mu}{\eta} \frac{2 - \nu}{8(1 - \nu)} \quad (3.2.25)$$

mit μ als Schermodul und ν als Poissonkonstante des ungestörten Materials. Man vergleiche (3.2.24) mit (3.2.25). Es wird deutlich, daß die charakteristische Frequenz für viskose Spannungsrelaxation im Fall von partieller Schmelze sehr hoch ist. Sie

ist nur dann für seismische Frequenzen wichtig, wenn das Querverhältnis sehr klein wird. Q_s^{-1} und $Q_{s \max}^{-1}$ hängen bei Walsh nicht von der Schmelzkonzentration, sondern von einer Inklusionshäufigkeitsdichte der Form d^3/v ab, wobei d der große Durchmesser einer Inklusion ist, die im Mittel vom Volumen v aus festem Material umgeben ist. Diese Inklusionshäufigkeitsdichte entspricht 8ε , der achtfachen Rißhäufigkeitsdichte von O'Connell und Budiansky (1977). Für einen kubisch zusammengesetzten Polykristall mit maximal einer Schmelzinklusion pro Kornfläche ist d^3/v immer kleiner als 3. Wenn, wie in Walsh's Ansatz, die Inklusionen weit voneinander entfernt liegen, wird bei weitem der maximale Wert 3 nicht erreicht. Es folgt dann aus dem Ergebnis von Walsh für die Relaxationsstärke für Scherung

$$\Delta_{\mu} \cong \frac{4}{15} \frac{1 - \nu}{2 - \nu} \frac{d^3}{v} < 0.3 \quad (3.2.26)$$

Für Kompression ergibt sich ein sehr viel geringeres Δ_K . Diese im Vergleich zu den Ergebnissen von Zener (1941) deutlich kleinere Relaxationsstärke dürfte durch Walsh's Annahme begründet sein, die Inklusionen seien weit voneinander entfernt. Es wird weiter unten gezeigt, daß man mit Hilfe einer sogenannten selbst-konsistenten Approximation, bei der die Inklusionen als in einem effektiven Material eingebettet betrachtet werden, zu signifikant höheren Relaxationsstärken gelangt.

O'Connell und Budiansky (1977) behandelten für ein Material mit flüssigkeitsgefüllten Rissen ebenfalls den Fall der Scherspannungsrelaxation gegenüberliegender Rißwände. Als Ausgangsbasis dienten die effektiven statischen Moduli für ein solches Material (Budiansky und O'Connell, 1976). Um größere Rißhäufigkeitsdichten berücksichtigen zu können, wendeten O'Connell und Budiansky im Unterschied zu Walsh (1968) die selbst-konsistente Approximation an. Hierdurch werden die Gleichungen für die effektiven Moduli miteinander gekoppelt und sind nur iterativ zu lösen. Bei der viskoelastischen Analyse ersetzten sie ebenso wie Walsh den Inklusionsschermodul durch $i\omega\eta$. Dies führt dazu, daß durch die Kopplung eine einfache Aufspaltung der resultierenden Moduli in Real- und Imaginärteil nicht mehr möglich ist. Die selbst-konsistente Approximation führt also dazu, daß das Mate-

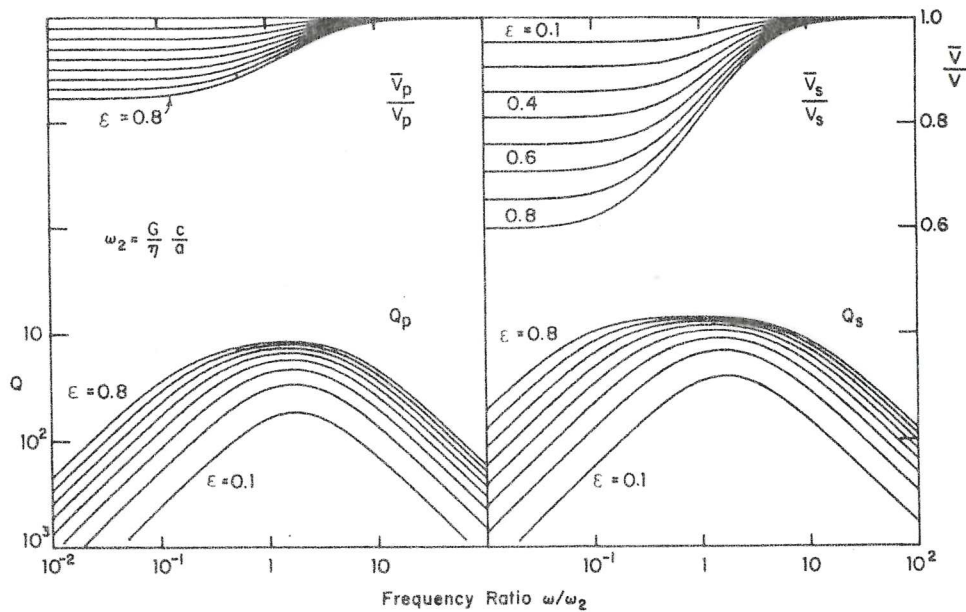


Abb. 19: Elastische Wellengeschwindigkeiten und seismisches Q^{-1} für Scherspannungsrelaxation an flüssigkeitsgefüllten Rissen. Die Frequenz ist normiert mit der Relaxationsfrequenz. (Aus: O'Connell und Budiansky, 1977).

rial die von Walsh festgestellte Eigenschaft eines linearen Standard-Körpers verliert.

Die Ergebnisse dieser Analyse für Scherrelaxation an Rissen sind in Abb. 19 in Termen der seismischen Geschwindigkeit und dem seismischen Q_{sei}^{-1} dargestellt. Die Parameter der Kurven stellen die Rißhäufigkeitsdichten $\xi = a^3/v$ mit a =Radius der Risse und v =mittleres, den Riß umgebendes ungestörtes Volumen. Die Frequenz ist auf die Relaxationsfrequenz normiert, die von O'Connell und Budiansky mit $\omega_2 \approx \alpha\mu/\eta$ angegeben wird. Die Abflachung der Q_{sei}^{-1} -Kurven für große ξ resultiert aus dem Grenzwert $1/2\pi$ (vgl. Kap. 3.1.3.), während die schwache Frequenzverschiebung der Maxima durch die selbst-konsistente Approximation hervorgerufen wird. Vergleicht man die Maximalwerte der dargestellten Q_{sei}^{-1} -Kurven mit Q_{sei}^{-1} -Werten, die allein aus den selbst-konsistenten relaxierten und unrelaxierten Moduli, jedoch unter Annahme eines linearen Standard-Körpers berechnet wurden, so ist keine signifikante Differenz festzustellen. Man kann also vermuten, daß man ohne viskoelastische Analyse allein aus den selbst-konsistenten Moduli

Aussagen über ein maximales Q^{-1} machen kann.

Aus der Abb. 19 wird deutlich, wie wichtig die Scherspannungsrelaxation bei großen Ribhäufigkeiten werden kann. Eine Zusammenstellung von möglichen ϵ und Modulabnahmen für den Fall, daß Scherspannungsrelaxation an allen Korngrenzflächen eines Polykristalls auftritt, ist in Tab. 1 gegeben (entnommen aus O'Connell und Budiansky, 1977). Auch hier gilt wieder das Argument von Nowick und Berry (1972), daß Unregelmäßigkeiten an Korngrenzflächen eine vollständige Relaxation verhindern können.

Relaxation From Grain Boundary Sliding						
Grain Shape	ϵ	$\bar{\nu}$	$\bar{\mu}/\mu$	\bar{E}/E	\bar{V}_p/V_p	\bar{V}_s/V_s
Cube	0.48	0.34	0.60	0.64	0.91	0.77
Rhombic dodecahedron	0.28	0.30	0.76	0.79	0.94	0.87
Pentagonal dodecahedron	0.30	0.31	0.74	0.78	0.94	0.86
Cube octahedron	0.27	0.30	0.76	0.79	0.95	0.87
Sphere [Zener, 1941]	...	0.35	0.55	0.59	0.89	0.74

Tab. 1: Korngrenzenrelaxation. Effektive relaxierte Moduli bzw. Geschwindigkeiten relativ zum unrelaxierten Fall. ϵ =Korngrenzflächendichte ist durch die Korngeometrie gegeben. (Aus: O'Connell und Budiansky, 1977)

O'Connell und Budiansky schließen, daß mit typischen gemessenen Viskositäten von Basaltschmelzen (1 - 1000 Pa s, Kushiro et al., 1976) die Scherspannungsrelaxation nur dann wichtig für seismische Frequenzen wird, wenn das Querverhältnis $< 10^{-7}$ ist. In diesem Fall wäre die Scherspannungsrelaxation nicht mehr von der Korngrenzenrelaxation unterhalb der Solidustemperatur zu unterscheiden.

Neben der beschriebenen viskosen Scherrelaxation kann Relaxation in gesättigten oder partiell geschmolzenen Medien durch Ausgleich unterschiedlicher Flüssigkeitsdrücke in den Porenräumen bei einer äußeren angelegten Spannung auftreten. Dieser Mechanismus wird mitunter auch mit "melt squirt" bezeichnet (Mavko und Nur, 1975). Man kann hierbei zwischen Flüssigkeitsströmung innerhalb einzelner isolierter Inklusionen und solcher zwischen benachbarten Inklusionen unterscheiden.

Mavko und Nur (1978) behandeln die Deformation nicht-ellipsoidförmiger trockener Risse bei einer äußeren angelegten starken

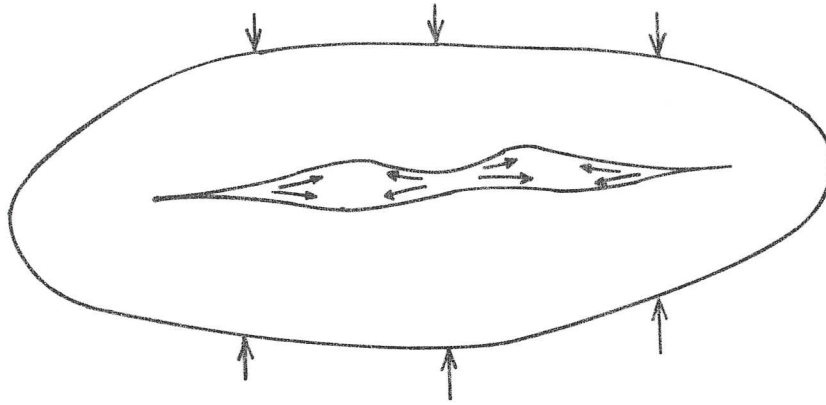


Abb. 20: Flüssigkeitsströmung in nicht ellipsoidförmigen Inklusionen.

Kompressionsspannung. Im Unterschied zu ellipsoidförmigen Inklusionen (Eshelby, 1957) weisen diese spitz zulaufenden Risse eine stark uneinheitliche Deformation auf, die dazu führt, daß sich mit zunehmendem Druck die Risse von der Spitze her verkürzen und sogar im Zentrum Berührungen der Rißwände stattfinden können. Dieses Verhalten läßt darauf schließen, daß im Falle flüssigkeitsgefüllter Risse die Flüssigkeit viskos von den Spitzen aus fortströmen wird (Abb. 20), wenn auch die niedrigeren Spannungen seismischer Wellen und der mittlere Gegendruck der eingeschlossenen Flüssigkeit zu deutlich geringeren Deformationen der Risse führen dürften. Für diese Relaxation sind bisher noch keine quantitativen Untersuchungen durchgeführt worden.

Für teilweise gesättigte Risse fanden Mavko und Nur (1979) jedoch eine sehr hohe Absorption, die dadurch hervorgerufen wird, daß die Flüssigkeitstropfen je nach Porendeformation inkompressibel in den noch trockenen Porenraum hineinströmen können. Ein solches Modell ist jedoch nicht auf partielle Schmelze anwendbar, da hierbei nicht mit einer Gasphase in den Porenräumen gerechnet werden kann.

Eine weitere Möglichkeit für Relaxation durch Flüssigkeitsströmung diskutieren Johnston et al. (1979). In ihrem Ansatz strömt bei äußerer Belastung die Flüssigkeit aus einem

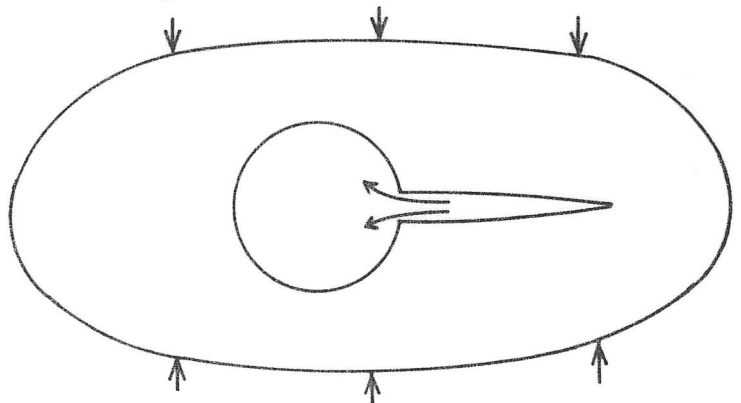


Abb. 21: Flüssigkeitsströmung zwischen Riß und sphärischer Pore (Johnston et al., 1979)

dünnen Riß mit dem Querverhältnis α in eine benachbarte sphärische Pore (Abb.21). Mit ξ =Rißvolumen/Porenvolumen und K_f =Kompressionsmodul der Flüssigkeit geben sie die Relaxationsfrequenz an zu

$$\omega = \frac{\alpha^2 K_f (1 + \xi)}{8 \eta} \quad (3.2.27)$$

Im Unterschied zur Scherrelaxation tritt hier α im Quadrat auf, wodurch bei kleinem α eine deutlich niedrigere Relaxationsfrequenz resultiert. Für ein K_f für Basaltschmelze von 0.2Mb (Stolper et al., 1981) und $\eta = 1000$ Pa s werden seismische Frequenzen für $\alpha < 10^{-2}$ erreicht.

Die obigen Relaxationsmechanismen gingen von isolierten Schmelzinkclusionen aus. Im allgemeinen werden bei einer äußeren Scherspannung verschieden orientierte Inklusionen, auch wenn sie von gleicher Geometrie sind, unterschiedliche Innendrucke haben. Stehen die Poren nun miteinander in Verbindung, so können sich diese Porendrucke durch viskosen Flüssigkeitstransport zwischen den Inklusionen ausgleichen. Dieser Mechanismus wurde zuerst von Mavko und Nur (1975) diskutiert und bildet die Grundlage weiterer Modelle von O'Connell und Budiansky (1977) und Mavko (1980).

Mavko und Nur (1975) entwickelten das "melt squirt" - Modell (Abb. 22) für flache "penny"-förmige Inklusionen, um post-seismische Deformationen mit Zeitkonstanten von 3-5 Jahren zu erklären. In diesem Modell wird bei einer makroskopisch angelegten Scherspannung in den Inklusionen senkrecht zur maximalen Druckspannung eine starke Kompression erzeugt, während in den Inklusionen senkrecht zur minimalen Druckspannung eine starke Dilatation auftritt. Stehen die Inklusionen miteinander in Verbindung, so ist ein Druckausgleich durch viskosen Flüssigkeitstransport möglich, der dann zur Relaxation führt.

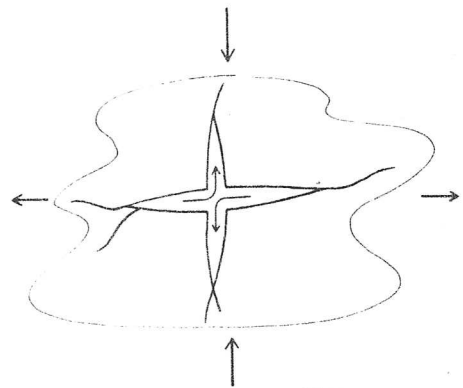


Abb. 22: "Melt squirt"-Modell von Mavko und Nur (1975).

O'Connell und Budiansky (1977) behandeln diesen Mechanismus quantitativ für unendlich dünne Risse, indem sie zunächst Gleichungen für die effektiven unrelaxierten ("saturated isolated") und für die relaxierten Moduli ("saturated isobaric") aufstellen und diese dann verallgemeinern für den Fall harmonischer Spannungs- und Dehnungsvariationen. Sie diskutieren mögliche Ansätze zur Bestimmung der Relaxationsfrequenz für Flüssigkeitsströmung zwischen flachen Inklusionen und geben als Abschätzung an:

$$\omega_1 = \frac{K_{\text{eff}} \alpha^3}{\eta} \quad (3.2.28)$$

mit K_{eff} =effektiver Kompressionsmodul. Wegen der dritten Potenz des Querverhältnisses liegt die Relaxationsfrequenz bei typischen Schmelzviskositäten (1-1000 Pa s) schon für $\alpha < 10^{-2} - 10^{-3}$ im seismischen Frequenzbereich.

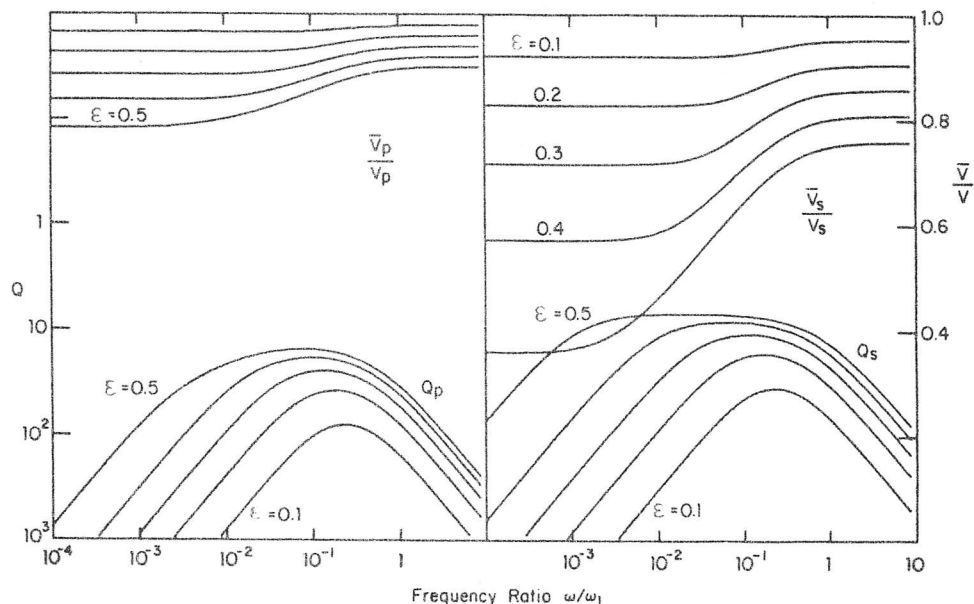


Abb. 23: Elastische Wellengeschwindigkeiten und seismisches Q^{-1} für Relaxation durch Flüssigkeitstransport zwischen flachen Inklusionen. Frequenz ist mit der Relaxationsfrequenz normiert. (Aus: O'Connell und Budiansky, 1977)

Die aus der viskoelastischen selbst-konsistenten Theorie folgenden frequenzabhängigen seismischen Geschwindigkeiten und das seismische Q_{sei}^{-1} (vgl. (3.1.40)) sind in Abb. 23 dargestellt. Die Frequenz ist auf die Relaxationsfrequenz ω_1 normiert und $\epsilon = a^3/v$ ist wieder die Rißhäufigkeitsdichte. Da O'Connell und Budiansky die viskose Scherrelaxation gegenüberliegender Rißwände mit berücksichtigen, die im abgebildeten Frequenzbereich schon

vollständig erfolgt ist, streben die Moduli bzw. Geschwindigkeiten für hohe Frequenzen nicht gegen die unrelaxierten, sondern gegen die relaxierten Werte bzgl. der viskosen Scherrelaxation. Die Verschiebung der Maxima in Q^{-1} bei zunehmendem ϵ zu niedrigen Frequenzen hin, also die Abweichung vom Verhalten eines linearen Standard-Körpers, ist wieder durch die selbst-konsistente Approximation begründet. Zieht man die für Polykristalle typischen Korngrenzflächendichten (Tab. 1) in Betracht, so wird deutlich, wie effektiv der in Abb. 23 dargestellte Relaxationsmechanismus sein kann, wenn mit flächenbenetzender Schmelze gerechnet werden muß.

Da es jedoch auch Hinweise darauf gibt, daß partielle Schmelze in Form von Kanälen längs Kornkanten verteilt sein kann (Waff und Bulau, 1979), erstellte Mavko (1980) ein Modell für Elastizität und Absorption für

eine solche Schmelzgeometrie (Abb. 24). Hierzu stellte er Gleichungen für die effektiven relaxierten und unrelaxierten Moduli für ein Medium mit Kanälen gemäß Abb. 24 auf und schätzte ein maximales Q^{-1} durch die Relaxationsstärke ab. Relaxation ergibt sich auch hier dadurch, daß Flüssigkeit aus Kanälen senkrecht zur maximalen Kompression in Kanäle senkrecht zur minimalen Kompression strömt. In Abb.

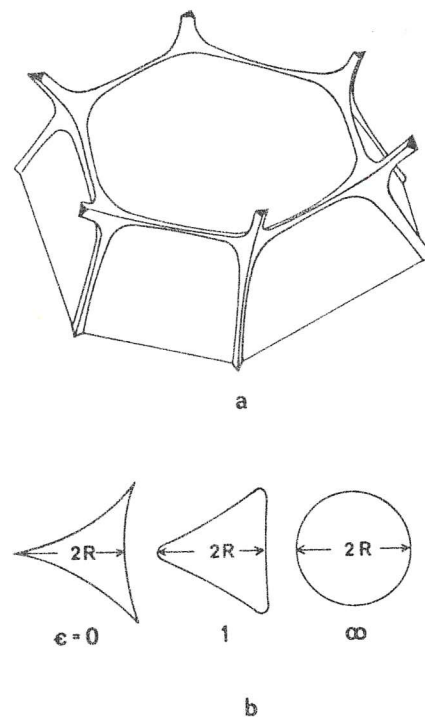


Abb. 24: Schmelzgeometrie im Modell von Mavko (1980).

25 sind als Ergebnis die seismischen Wellengeschwindigkeiten und die halben Relaxationsstärken in Abhängigkeit von der Schmelzkonzentration dargestellt. Die jeweils oberste Kurve gilt für die unrelaxierten Werte. Mavko berücksichtigte zusätzlich zur Relaxation durch Strömung (mit "squirt" bezeich-

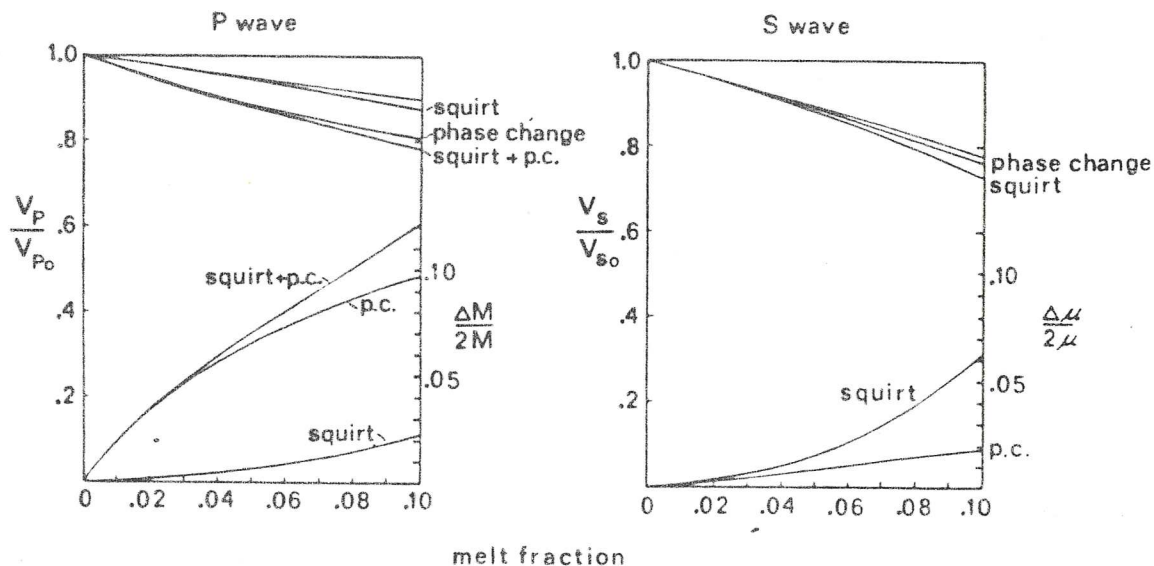


Abb. 25: Seismische Wellengeschwindigkeiten und halbe Relaxationsstärken für das Schmelzmodell von Mavko (1980) mit $\epsilon = 0$ (vgl. Abb. 24). Daten gelten für Olivin bei 20 kb und 1600K. (Aus: Mavko, 1980)

net) den Effekt durch Phasenumwandlungen (mit "phase change", p.c. bezeichnet), der hauptsächlich beim Kompressionsmodul an Bedeutung gewinnt.

Mavko findet als Relaxationsfrequenz für die Strömungsrelaxation in spitz zulaufenden Kanälen ($\epsilon = 0$, vgl. Abb. 24):

$$\omega_0 \cong \frac{\pi K_F}{20 \eta} \left(\frac{R}{d} \right)^2 \quad (3.2.29)$$

mit K_F =K-Modul für Schmelze, R: siehe Abb. 24, d=Länge der Kanäle. Mit $R/d < 10^{-2} - 10^{-3}$ ist es möglich, daß ω_0 in seismische Frequenzbereiche zu liegen kommt.

Welche der beschriebenen Relaxationsmechanismen durch Flüssigkeitsströmung nun bei partieller Schmelze und seismischen Frequenzen wichtig sein können, hängt von den Relaxationsfrequenzen und -stärken ab. Bevor die Strömung zwischen den Inklusionen ("melt squirt") in die Diskussion kam, erklärte man die Absorption in der low-velocity-Zone mit viskoser Scherrelaxation isolierter Risse, wozu man hohe Schmelzviskositäten ($10^6 - 10^7$ Pa·s) benötigte (Nur, 1971; Solomon, 1972). Auch Mavko und Nur (1975) ordneten dem neu aufgestellten "melt squirt"-Modell wegen der angenommenen hohen Viskositäten noch Relaxationszeiten von Jahren zu. Untersuchungen von Kushiro et al. (1976), Kushiro (1977) u. a. zeigen jedoch, daß die Viskositäten der meisten

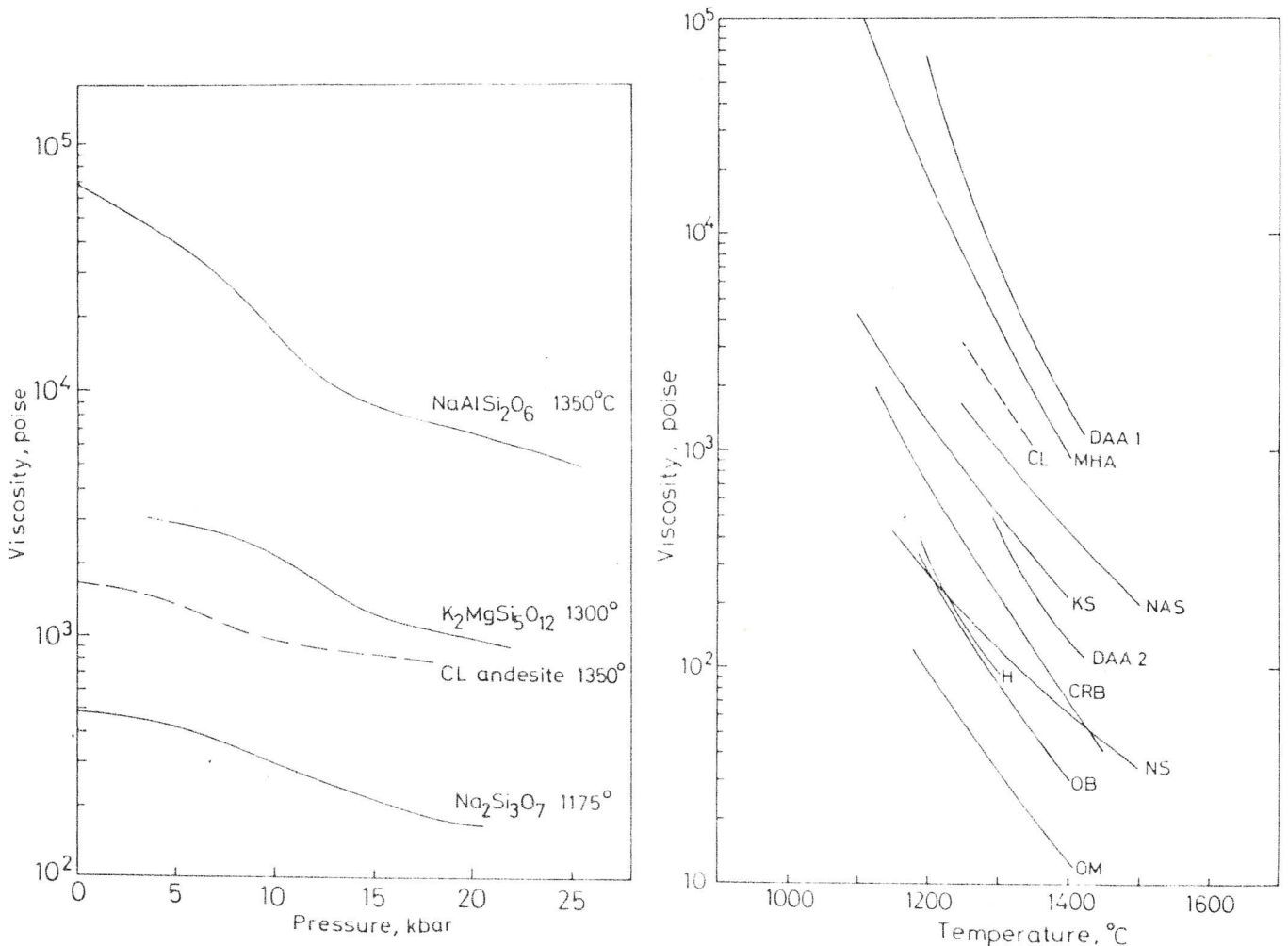


Abb.26: Links: Druckabhängigkeit der Viskosität verschiedener synthetischer Silikatschmelzen und einer natürlichen (gestrichelt). Rechts: Temperaturabhängigkeit der Viskosität verschiedener synthetischer und natürlicher Silikatschmelzen bei 1 atm (bis auf die CL-Andesit-Kurve bei 5 kb). Für die genauen Beschreibungen der Kurven sei auf Kushiro (1977) verwiesen. (Beide Abbildungen aus : Kushiro, 1977).

Silikatschmelzen zwischen 1 - 1000 Pa·s liegen und außerdem mit dem Druck noch abnehmen. Abb. 26 zeigt die Druck- und Temperaturabhängigkeit verschiedener Schmelzen nach Kushiro (1977) (1 Pa·s = 10 poise). Erst diese niedrigen Viskositäten führten dazu, daß die Relaxation durch Strömung zwischen Inklusionen als möglicher Absorptionsmechanismus in die Diskussion kam (O'Connell und Budiansky, 1977; Mavko, 1980; Shankland et al., 1981).

In Abb. 27 sind schließlich noch einmal die Relaxationsfrequenzen der verschiedenen Modelle in Diagrammen mit der Viskosität als Ordinate und dem Querverhältnis α bzw. $2R/d$ als Abszisse

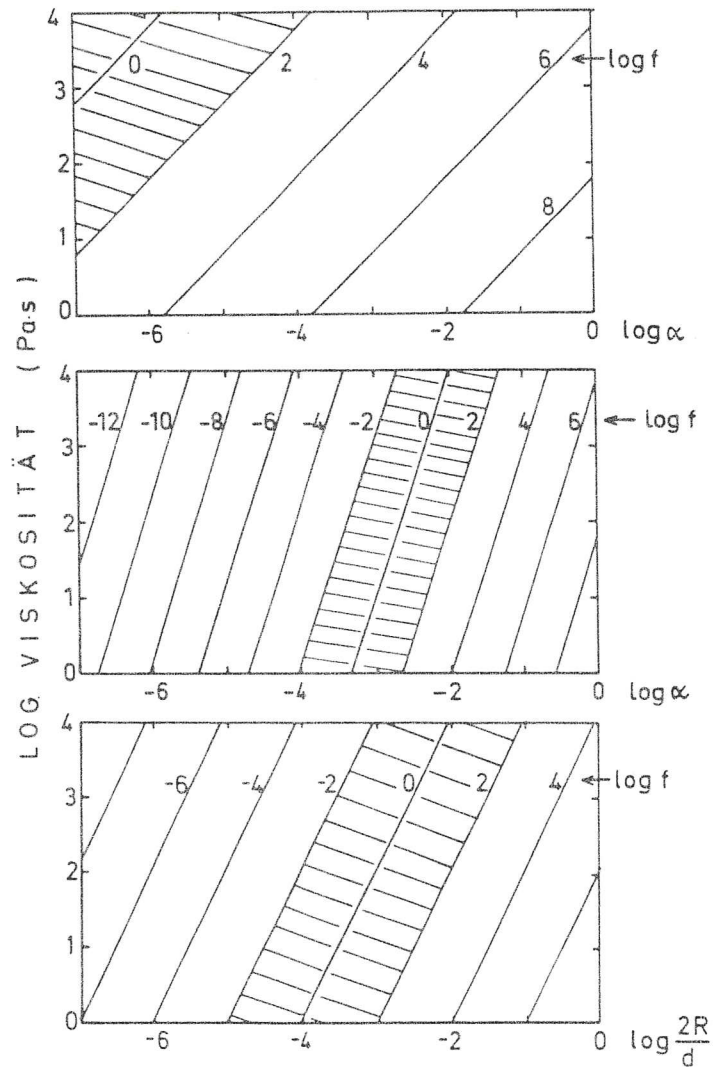


Abb. 27: Linien gleicher Relaxationsfrequenz in Abhängigkeit vom Logarithmus der Viskosität ($1\text{Pa}\cdot\text{s} = 10\text{poise}$) und dem Querverhältnis (bzw. von $2R/d$ für Kanäle). Die Zahlen an den Linien geben $\log f$ mit f in Hz an. Oben: Viskose Scherrelaxation, $f=1/(2\pi)\alpha\mu/\eta$; Mitte: Relaxation durch Flüssigkeitsströmung zwischen Filmen, $f=(1/2\pi)K\alpha^3/\eta$; Unten: Relaxation durch Flüssigkeitsströmung zwischen Kanälen, $f=K_f/(40\eta)\cdot(R/d)^2$. Für die Moduli wurde angenommen: $K=0.66\text{ Mb}$, $\mu=0.4\text{ Mb}$, $K_f=0.2\text{ Mb}$.

dargestellt. Die Bereiche seismisch interessanter Frequenzen sind markiert.

Dämpfung durch Phasenübergänge: Da in dieser Arbeit das Schwergewicht auf den mechanischen Auswirkungen von Schmelze auf die Elastizität und Anelastizität liegt, wird die Absorption durch Phasenübergänge und thermoelastische Prozesse nicht weiter behandelt. Es sei daher auf die Übersichtsartikel von Jackson und Anderson (1970) und Mavko et al. (1979) verwiesen.

Es sollte jedoch trotzdem erwähnt werden, daß die Absorption durch Phasenübergänge für kompressive Deformationen durchaus eine wichtige Rolle spielen kann. So ergeben sich aus unterschiedlichen Abschätzungen und Berechnungen kompressive Relaxationsstärken zwischen 0.1 und 1 (Vaišnys, 1968; Kjartansson, 1979; Mavko, 1980). Charakteristische Frequenzen sind schwierig abzuschätzen, sie ergeben sich bei Vaišnys (1968) zu etwa $2 \cdot 10^{-3}$ und $2 \cdot 10^{-2}$ Hz. Schließlich sollte noch auf eine Abhängigkeit von der Schmelzgeometrie hingewiesen werden: für flache Schmelzinkclusionen ergeben sich auf Grund des höheren Drucks in den Inklusionen bei äußerer Kompression größere Relaxationsstärken verglichen mit mehr kompakten Inklusionen (Walsh, 1973; Mavko, 1980).

3.2.3. Zusammenfassung der Kapitel 3.2.1. und 3.2.2.

In Kap. 3.2.1. wird, ausgehend von beliebigen flüssig-festen Zweiphasensystemen ein Literaturüberblick über die elastischen Eigenschaften solcher Systeme gegeben. Hierbei werden zunächst für die effektiven Moduli obere und untere Schranken, speziell die Reuss- und Voigt-, und die Hashin-Shtrikman -(HS)-Grenzen besprochen. Es folgen veröffentlichte Formeln für die elastischen Moduli bei speziellen Geometrien der flüssigen Phase, speziell für kugel- und "penny"-förmige Inklusionen. Zur Berücksichtigung größerer Konzentrationen der flüssigen Phase wird das selbst-konsistente Schema (SCS) eingeführt und die selbst-konsistenten Formen der Gleichungen für kugel- und "penny"-förmige Inklusionen angegeben.

Hashin (1968) entwickelte ein generalisiertes SCS, welches kurz besprochen wird. Es wird auf einen Zusammenhang zwischen den HS-Grenzen, der "composite sphere assemblage" und dem SCS hingewiesen. Es wird dann das selbst-konsistente Rißmodell von O'Connell und Budiansky (1974; 1977) diskutiert und die Formeln mit einer Verbesserung von Mavko (1980) angegeben. Die weitgehende Äquivalenz zwischen einem Riß-Modell mit verteilten Querverhältnissen und einem mit einem einzigen repräsentativen Querverhältnis wird diskutiert. Für den Fall, daß die Schmelze sich in Form von Kanälen längs Kornkanten verteilt, entwickelte Mavko (1980) ein elastisches Modell, das hier einschließlich des Formelsatzes eingeführt wird. Anhand des Kanalmodells wird noch einmal die

Auswirkung des SCS auf die Moduli und Relaxationsstärken verdeutlicht. Am Ende von Kap. 3.2.1. werden schließlich die selbstkonsistenten elastischen Moduli des Kugel-, Kanal- und Filmmodells dargestellt und verglichen. Es wird außerdem für uniforme Verteilungen von Filmquerverhältnissen α bzgl. $\log \alpha$ eine einfache Formel für ein repräsentatives Querverhältnis gegeben.

In Kap. 3.2.2. wird ein Literaturüberblick über die Dämpfungsmechanismen für flüssig-feste Zweiphasensysteme gegeben. Zunächst wird die Biot-Theorie vorgestellt. Durch eine Abschätzung wird festgestellt, daß Dämpfung nach Biot für partiell geschmolzenes Gestein vernachlässigbar ist. Es folgt eine Zusammenstellung von Modellen über die viskose Scherrelaxation für flüssigkeitsgefüllte Risse (Kê, 1947; Zener, 1941; 1948; Walsh, 1968; O'Connell und Budiansky, 1977).

Es wird der sich ergebenden hohen Relaxationsstärke bei vollkommener Scherspannungsfreiheit der Korngrenzflächen Beachtung geschenkt, jedoch auf eine mögliche Verhinderung einer vollständigen Relaxation durch Unregelmäßigkeiten oder nicht plane Ribflächen hingewiesen. Das frequenzabhängige Q für Scherrelaxation von O'Connell und Budiansky (1977) wird dargestellt und diskutiert. Als weiterer Mechanismus wird Flüssigkeitsströmung innerhalb von Inklusionen in Erwägung gezogen (Mavko und Nur, 1978; Johnston et al., 1979).

Schließlich wird das "melt squirt"-Modell von Mavko und Nur (1975) vorgestellt und seine Weiterentwicklung für Schmelzfilme von O'Connell und Budiansky (1977) und für Kanäle von Mavko (1980) diskutiert. Am Ende von Kap. 3.2.2. werden mit Hilfe von veröffentlichten Schmelzviskositäten Abschätzungen über Relaxationsfrequenzen der einzelnen Mechanismen durchgeführt und dargestellt.

Im letzten Abschnitt wird schließlich noch die Absorption bei Phasenübergängen erwähnt.

3.3. Moduli und Relaxationsstärken bei ellipsoidförmigen Inklusionen

Wie in Kap. 3.2.1. erwähnt, gelten die Elastizitätsmodelle für Schmelzfilme (O'Connell und Budiansky, 1977; Walsh, 1969) nur für extrem kleine Querverhältnisse. Andererseits ist es fraglich, ob sich dünne Schmelzfilme tatsächlich in Form von idealen flachen, ellipsoidförmigen Inklusionen ausbilden. Führen Unregelmäßigkeiten eines Filmes dazu, daß z.B. unter hydrostatischem Umgebungsdruck die Filmflächen sich teilweise berühren, so ist mit einem größeren effektiven Querverhältnis zu rechnen. Wie man leicht feststellen kann, versagt das O'Connell-Budiansky-Modell für Querverhältnisse um 0.1, für $\alpha \gg 0.2$ sind die Modulabfälle schon schwächer als für kugelförmige Inklusionen.

Für das rein elastische Problem, also nicht im Hinblick auf Relaxation, liegen Lösungen für sphäroidförmige Inklusionen (also mit den Halbachsen $a=b \ll c$) von Wu (1966) unter Berücksichtigung des SCS, von Kuster und Toksöz (1974) ohne SCS aus einem Ansatz für Streuung elastischer Wellen und von Korrington et al. (1979) aus einem modifizierten SCS vor. Für flache, ellipsenförmige Inklusionen ($a \ll b \ll c$) konnten O'Connell und Budiansky (1974) eine Äquivalenz mit kreisförmigen Rissen zeigen. Danach sind ellipsenförmige Risse mit der Fläche A und dem Umfang P durch kreisförmige mit dem Radius a' zu ersetzen, entsprechend

$$a' = 2 A/P \quad (3.3.1)$$

Es wird im folgenden ein Modell aufgestellt, aus dem relaxierte und unrelaxierte Moduli, also auch Relaxationsstärken für ellipsoidförmige Inklusionen ($a \geq b \geq c$) folgen. Es wird dann überprüft, ob eine Beziehung wie (3.3.1) auch für endliche Inklusionsdicken gilt.

Die Bestimmung der Moduli erfolgt in Anlehnung an den Ansatz von Mavko (1980). In diesem Ansatz werden die effektiven Moduli in Abhängigkeit der Inklusionswandverschiebungen bei äußerer Belastung dargestellt. Es wird dann der Zusammenhang zwischen der Gassmannrelation und dem SCS für den gesättigten K-Modul beleuchtet. Die Berechnung der Verschiebungen erfolgt mit Hilfe der Lösungen von Eshelby (1957) für ellipsoidförmige Inklusionen. Zur Bestimmung der Moduli kann das Betti-Rayleigh-Reziproktheo-

rem (1872 von E. Betti aufgestellt, siehe z. B. Love, 1907, Seite 205) herangezogen werden. Es verknüpft die an einem Körper angreifenden Kräfte pro Fläche $\vec{p} = \sigma_{ij} \cdot \hat{n}$ (\hat{n} =Flächennormalenvektor) und die Verschiebungen \vec{u} zweier möglicher unterschiedlicher Gleichgewichtszustände. Wenn \vec{u}_1 durch \vec{p}_1 und \vec{u}_2 durch \vec{p}_2 erzeugt wird, dann gilt für die Integrale über die gesamte Oberfläche:

$$\int_F \vec{p}_1 \vec{u}_2 dF = \int_F \vec{p}_2 \vec{u}_1 dF \quad (3.3.2)$$

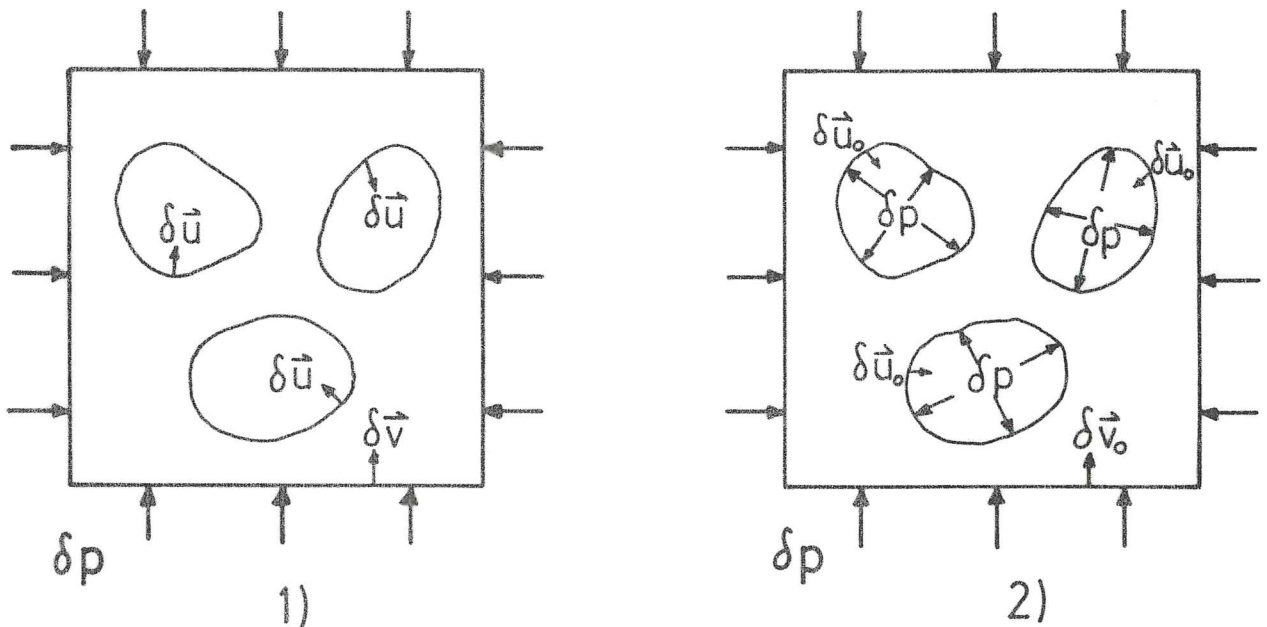


Abb. 28: Zur Anwendung des Reziproktheorems, Kompression (siehe Text).

Für einen Körper mit dem Volumen V , der N Inklusionen enthält, findet man K_d , den effektiven K -Modul bei trockenen Inklusionen, indem man die beiden Zustände 1) und 2) (Abb. 28) betrachtet. 1) stellt den effektiven Fall spannungsfreier trockener Poren unter hydrostatischem äußerem Druck $\delta p \hat{n}_a$ mit der Porenwandverschiebung $\delta \vec{u}$ dar. Bei 2) wird zusätzlich auf die Porenwände der Druck $\delta p \hat{n}_i$ ausgeübt; der Körper verhält sich dann so, als hätte er keine Poren. Das Reziproktheorem lautet dann mit F_a =äußere Oberfläche, f_i = i -te Inklusionsoberfläche, $\delta \vec{v}$, $\delta \vec{v}_0$ =Verschiebungen der äußeren Berandung, $\delta \vec{u}$, $\delta \vec{u}_0$ =Verschiebungen der Inklusionswände

$$\int_{F_a} \delta p \hat{n}_a \delta \vec{v}_0 dF = \int_{F_a} \delta p \hat{n}_a \delta \vec{v} dF + \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \delta p \hat{n}_i \delta \vec{u} dF \quad (3.3.3)$$

Die Summe $\sum_{i=1}^N$ geht über alle N Inklusionen. \hat{n}_a zeigt auf der äußeren Berandung nach außen, \hat{n}_i auf den Inklusionswänden nach innen. Kompression hat dann ein negatives Vorzeichen. Man kann K_d über die spezifische Dehnungsenergie definieren:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{V} \int_{F_a} \delta p \hat{n}_a \delta \vec{v} dF =: \frac{1}{2} \delta p \frac{\delta p}{K_d} \quad (3.3.4)$$

und mit $\frac{1}{2} \frac{1}{V} \int_{F_a} \delta p \hat{n}_a \delta \vec{v}_0 dF = (1/2) \delta p (\delta p / K_0)$ erhält man

$$\frac{1}{K_d} = \frac{1}{K_0} - \frac{1}{\delta p V} \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \delta \vec{u} \hat{n}_i dF \quad (3.3.5)$$

Wenn man berücksichtigt, daß das mit Minus versehene Integral in (3.3.5) die Volumenänderung einer Pore beschreibt, dann kann man mit Θ'_{ti} als relativer Volumenänderung der i-ten trockenen Pore mit dem Volumen V_i oder $\Theta_{ti} = \Theta'_{ti} / \delta p$ als einer Art scheinbarer Kompressibilität einer trockenen Pore schreiben:

$$\frac{1}{K_d} = \frac{1}{K_0} + \frac{1}{\delta p V} \sum_{i=1}^N \Theta'_{ti} V_i = \frac{1}{K_0} + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \Theta_{ti} V_i \quad (3.3.6)$$

Zur Bestimmung des Schermoduls bei trockenen Inklusionen μ_d belastet man in den beiden Zuständen 1) und 2) (Abb. 29) den Körper mit der reinen Scherspannung

$$\vec{T}_a = \hat{n}_a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta p \quad (3.3.7)$$

Im Fall 2) legt man die gleiche Spannung \vec{T}_i mit dem entsprechenden \hat{n}_i auch an die Porenwände an. 1) stellt den effektiven Körper dar, 2) verhält sich wie der ungestörte Körper mit μ_0 . Das Reziproktheorem lautet

$$\int_{F_a} \vec{T}_a \delta \vec{v}_0 dF = \int_{F_a} \vec{T}_a \delta \vec{v} dF + \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \vec{T}_i \delta \vec{u} dF \quad (3.3.8)$$

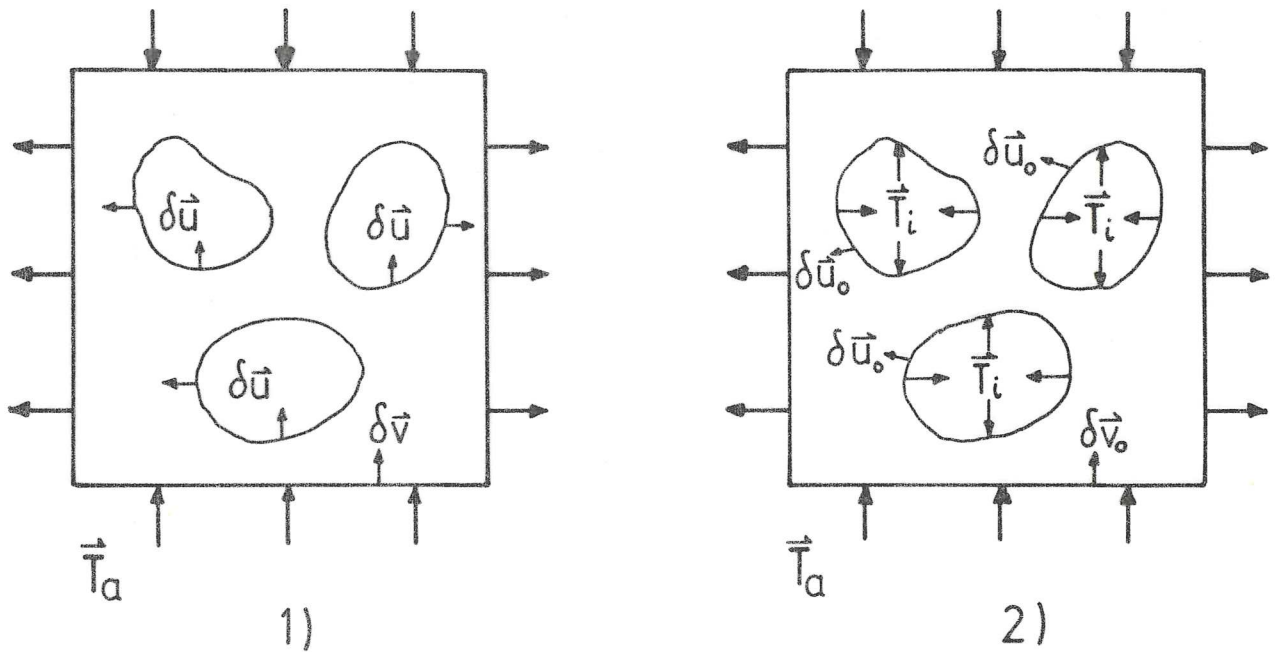


Abb. 29: Zur Anwendung des Reziproktheorems, Scherung (siehe Text).

Analog zu (3.3.4) definiert man μ_d mit

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{V} \int_{F_a} \vec{T}_a \delta \vec{v} dF = \frac{1}{2} \delta p \frac{\delta p}{\mu_d} \quad (3.3.9)$$

und schließlich erhält man

$$\frac{1}{\mu_d} = \frac{1}{\mu_o} - \frac{1}{\delta p^2 V} \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \vec{T}_i \delta \vec{u} dF \quad (3.3.10)$$

Der Integrand wird im allgemeinen negativ sein, da \vec{T}_i und $\delta \vec{u}$ entgegengesetzt gerichtet sind. Im Integranden steht, zur Erinnerung, das Skalarprodukt zwischen der Porenwandverschiebung $\delta \vec{u}$ der Abb. 29 links und den hypothetischen Spannungen \vec{T}_i an den Porenwänden in Abb. 29 rechts. Mit μ_d ist auch auf Grund der Spannungsfreiheit der Porenwände der gesättigte Schermodul μ_s für den relaxierten Fall, also $\mu_s = \mu_r$ gegeben (vgl. Kap. 3.2.1.).

Beim unrelaxierten Schermodul geht man davon aus, daß kein Flüssigkeitstransport zwischen den Inklusionen erfolgt. Es gilt also, den Schermodul für flüssigkeitsgefüllte, isolierte Inklusionen zu bestimmen. Hierzu bieten sich die beiden Spannungszustände in Abb. 29 an mit der zusätzlichen Annahme, ein für jede Pore individueller Flüssigkeitsdruck $\delta p_{pi} \hat{n}_i$ (je nach Form und Orientierung unterschiedlich) sei an die Porenwände links

angelegt, wodurch die $\delta \vec{u}$ leicht verändert sind. Für diesen Fall gilt das Reziproktheorem:

$$\int_{F_a} \vec{T}_a \delta \vec{v}_o dF + \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \delta p_{pi} \hat{n}_i \delta \vec{u}_o dF = \int_{F_a} \vec{T}_a \delta \vec{v} dF + \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \vec{T}_i \delta \vec{u} dF \quad (3.3.11)$$

Der gesättigte Schermodul μ_s , in diesem Fall unrelaxiert, also $\mu_s = \mu_u$, wird analog zu (3.3.9) definiert. Im zweiten Term kann δp_{pi} aus dem Integral herausgezogen werden. Das Integral stellt dann die Volumenänderung der Inklusionsbereiche dar, wären sie mit μ_o , K_o -Material angefüllt. Bei äußerer reiner Scherung ist diese Volumenänderung jedoch identisch null. Man erhält also:

$$\frac{1}{\mu_u} = \frac{1}{\mu_o} - \frac{1}{\delta p^2 V} \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \vec{T}_i \delta \vec{u} dF \quad (3.3.12)$$

Bevor nun die Bestimmungsformel für den gesättigten K-Modul hergeleitet wird, sei schon darauf hingewiesen, daß das SCS für (3.3.6), (3.3.10) und (3.3.12) Anwendung finden kann, indem man das jeweilige $\delta \vec{u}$ bzw. Θ_t für eine repräsentative Inklusion berechnet, die als in ein von außen belastetes, homogenes Medium mit den zu berechnenden effektiven Moduli eingebettet angenommen wird. Hierdurch wird (3.3.6) mit (3.3.10) gekoppelt, (3.3.12) ist ebenfalls simultan mit dem noch zu bestimmenden, gesättigten bzw. unrelaxierten $K_s = K_u$ zu lösen.

Man kann nun den K-Modul für gesättigtes Gestein mit Hilfe von K_d über die Gassmannrelation bestimmen. Diesen Weg wählte Mavko (1980). Alternativ bietet sich das Reziproktheorem an.

Es soll nun hierbei davon ausgegangen werden, daß das zur Bestimmung von K_d erforderliche Θ_{ti} als funktionaler Zusammenhang bekannt ist in Abhängigkeit vom Einbettungsmedium, also $\Theta_{ti} = \Theta_{ti}(K, \mu)$. Enthält das Material nun in den Inklusionen eine Flüssigkeit mit dem K-Modul K_f , so wird sich unter hydrostatischem äußerem Druck unter der Voraussetzung, daß keine Flüssigkeit aus den Poren entweicht, ein Innendruck δp_{pi} in der i-ten Pore einstellen. Legt man in Abb. 28 links an die Porenwände diesen In-

nendruck $\delta p_{pi} \hat{n}_i$ an, so erhält man ein unterschiedliches $\delta \hat{u}$ oder $\Theta_i \neq \Theta_{ti}$. Das Reziproktheorem lautet dann:

$$\int_{F_a} \delta p \hat{n}_a \delta \vec{v}_o dF + \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \delta p_{pi} \hat{n}_i \delta \vec{u}_o dF = \int_{F_a} \delta p \hat{n}_a \delta \vec{v} dF + \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \delta p \hat{n}_i \delta \vec{u} dF \quad (3.3.13)$$

Definiert man den gesättigten K-Modul K_s analog zu (3.3.4), so erhält man

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_o} + \frac{1}{\delta p v} \sum_{i=1}^N \Theta'_i v_i + \frac{1}{\delta p^2 v} \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \delta p_{pi} \hat{n}_i \delta \vec{u}_o dF \quad (3.3.14)$$

δp_{pi} ist in der i-ten Inklusion konstant und kann vor das Integral gezogen werden. $\int_{f_i} \delta \vec{u}_o \hat{n}_i dF$ stellt die Volumenänderung einer Pore für den Fall dar, die Pore wäre mit K_o -Material gefüllt. Es gilt also:

$$\frac{1}{\delta p^2 v} \sum_{i=1}^N \int_{f_i} \delta p_{pi} \hat{n}_i \delta \vec{u}_o dF = \frac{1}{\delta p^2 v} \sum_{i=1}^N \delta p_{pi} \frac{\delta p}{K_o} v_i = \frac{1}{\delta p K_o v} \sum_{i=1}^N \delta p_{pi} v_i \quad (3.3.15)$$

Man hat also zwei Größen Θ'_i und δp_{pi} zu bestimmen. Sie hängen zusammen mit:

$$\Theta'_i = \frac{\delta p_{pi}}{K_f} \quad (3.3.16)$$

Um eine zweite Bedingung zu erhalten, kann man wieder vom Zustand in Abb. 28 links, zusätzlich mit den Innendrücken δp_{pi} belastet, ausgehen. Greift man eine Pore j heraus und setzt ihren Innendruck auf Null, so erhält man für sie die relative Volumenänderung Θ'_{tj} für eine trockene Pore, die als bekannt angenommen wurde. Da die Nachbarporen gesättigt sind, ist für das effektive Medium bei der Bestimmung von $\Theta'_{tj}(K, \mu)$ $K=K_s$, $\mu=\mu_s$ zu setzen. Erhöht man in dieser Pore nun den Innendruck auf δp , so erfährt die Pore genau die Volumenänderung Θ'_{pj} , die ein entsprechendes Volumen in einem vollständig effektiven Medium mit K_s , μ_s bei äußerem hydrostatischem Druck δp erfahren würde. Dieses

θ'_{pj} ist dann gegeben durch $\theta'_{pj} = \delta p / K_s$. Nimmt man bei dieser Variation von δp_{pj} lineare Elastizität an, so kann der Zusammenhang zwischen θ'_j und δp_{pj} durch eine Gerade dargestellt werden (Abb. 30). Die Gleichung für diese Gerade lautet:

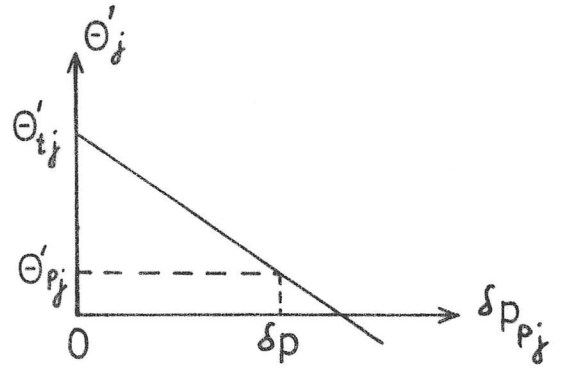


Abb. 30: siehe Text.

$$\delta p_{pj} = \frac{\theta'_{tj} - \theta'_j}{\theta'_{tj} - \theta'_{pj}} \delta p \quad (3.3.17)$$

Ersetzt man das θ'_{pj} wie angegeben, so erhält man mit (3.3.16):

$$\delta p_{pj} = \frac{\theta'_{tj} \delta p}{\theta'_{tj} - (\delta p / K_s) + (\delta p / K_f)}$$

$$\theta'_j = \frac{\theta'_{tj} \delta p}{\theta'_{tj} - (\delta p / K_s) + (\delta p / K_f)} \frac{1}{K_f} \quad (3.3.18)$$

Hieraus ergibt sich für K_s :

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_o} + \frac{1}{V} \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_o} \right) \sum_{i=1}^N \frac{\theta_{ti}(K_s, \mu_s) V_i}{\theta_{ti}(K_s, \mu_s) + (1/K_f) - (1/K_s)} \quad (3.3.19)$$

(3.3.19) stellt im Prinzip die selbst-konsistente Approximation der Gassmannrelation dar. Im Unterschied zur Gassmannrelation (3.2.14) brauchen für (3.3.19) die Porendrücke nicht notwendigerweise einheitlich zu sein. Dies kann für den unrelaxierten Fall oder bei isolierten Poren unterschiedlicher Geometrie von Bedeutung sein. Im relaxierten Fall bei unterschiedlicher Porengeometrie ist es dagegen ratsam, Gebrauch von der Gassmannrelation anstelle (3.3.19) zu machen, da dadurch ein konstanter Innendruck berücksichtigt werden kann. Für geometrisch ähnliche Inklusionen kann man für (3.3.19) schreiben:

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_o} + \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_o} \right) \frac{\beta}{1 + \theta_t^{-1}(K_s, \mu_s) (1/K_f - 1/K_s)} \quad (3.3.20)$$

Es sei erinnert, daß Θ_t für eine trockene Pore berechnet werden muß, die in einem gesättigten effektiven Medium mit K_s, μ_s eingebettet angenommen wird.

Zum Vergleich mit der Gassmannrelation (3.2.14) wird das effektive K_d in einer zu (3.3.6) ähnlichen Form dargestellt: $1/K_d = 1/K_o + \Theta_t \beta$, wobei für Θ_t gemäß dem SCS $\Theta_t(K_d, \mu_d)$ gesetzt werden muß. Mit diesem K_d kann man die Gassmannrelation auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_o} + \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_o} \right) \frac{\beta}{1 + \Theta_t^{-1}(K_d, \mu_d) (1/K_f - 1/K_o)} \quad (3.3.21)$$

Man erkennt die Übereinstimmung mit (3.3.20), falls für beide Gleichungen das SCS fallengelassen wird. Mit dem SCS unterscheidet sich (3.3.20) durch das Produkt im Nenner von der Gassmannrelation. Die Unterschiede in den beiden Faktoren haben dabei entgegengesetzte Richtung: $\Theta_t^{-1}(K_d, \mu_d) < \Theta_t^{-1}(K_s, \mu_s)$, $(1/K_f - 1/K_o) > (1/K_f - 1/K_s)$ für $K_o > K_s > K_d$, $\mu_s > \mu_d$, $K_o > K_f$.

Wie beschrieben, bestimmt Mavko (1980) den unrelaxierten K-Modul indem er ein K'_d mit $\Theta_t(K_u, \mu_u)$ berechnet und dieses in die Gassmannrelation einsetzt. Bezogen auf Gleichung (3.3.20) bedeutet das, daß zwar das Θ_t mit dem in (3.3.20) übereinstimmt, statt dem $1/K_s$ jedoch gemäß (3.3.21) $1/K_o$ gesetzt wird, wie es die Gassmannrelation fordert.

Es wurden probenhalber einmal die Gleichungen für das Mavkomodell (3.2.....: 13, 15, 16, 17, 19, 20) mit der Gassmannrelation (3.2.14) bzw. (3.2.18) und mit (3.3.20) jeweils für $K_s = K_r$ und $K_s = K_u$ durchgerechnet. Die maximal aufgetretene Differenz zwischen beiden Ansätzen betrug 1.5% bezogen auf K_o .

Man kann sich aus den selbst-konsistenten Gleichungen (3.2.5) für kugelförmige Inklusionen (Budiansky, 1965) unter der Annahme trockener Kugeln ($K_1 = \mu_1 = 0$) die Funktion $\Theta_t(K, \mu)$ herleiten. Hiermit läßt sich dann leicht die Identität von (3.3.20) mit Budianskys Formel unter der Annahme von $K_1 = K_f$, $\mu_1 = 0$ feststellen. Bringt man die selbst-konsistente Gleichung (3.2.7) für K von O'Connell und Budiansky (1977) (mit der Modifizierung von Mavko, 1980) bzw. die äquivalente Form aus Walsh's (1969) Anhang auf

eine mit (3.3.20) vergleichbare Form, so stellt man interessanterweise fest, daß der Term im Nenner $1/K_s$ in (3.3.20) bzw. $1/K_0$ in (3.3.21) der Gassmannrelation, überhaupt nicht erscheint.

Mit Hilfe der Gleichungen (3.3.6), (3.3.10), (3.3.12) und (3.3.19) bzw. der Gassmannrelation können nun die effektiven Moduli berechnet werden, wenn man die Porenwandverschiebungen unter äußerer Belastung kennt. Dies kann man für ellipsoidförmige Inklusionen mit Hilfe des von Eshelby (1957) beschriebenen Lösungsweges machen. Da Eshelbys Ergebnisse häufig in der Literatur herangezogen werden, soll hier das Prinzip seines Verfahrens erläutert werden.

Eshelby führt das Problem einer eingelagerten Inhomogenität auf das einer Transformation einer Inklusion zurück: eine bestimmte Region (=Inklusion) eines homogenen Materials erfährt eine Form- und Spannungsänderung, z.B. durch Umkristallisation. Hieraus folgt ein Spannungs- und Dehnungsfeld in der und um die Inklusion. Man kann einen solchen Prozeß in verschiedene gedankliche Schritte unterteilen:

- 1) Das Material mit den Moduli K, μ ist ungestört und homogen.
- 2) Herauslösen der zukünftigen Inklusion.
- 3) Durchführen einer spannungsfreien Transformation e_{ij}^t , uniform in der Inklusion.
- 4) Anlegen einer äußeren Spannung an die Inklusion $-\sigma_{ij}^t \hat{n}$, die die Formveränderung rückgängig machen soll. Jetzt herrscht in der Inklusion die Spannung $-\sigma_{ij}^t$.
- 5) Einsetzen und verschweißen der Inklusion in die Matrix. Jetzt ist die Matrix spannungsfrei, die Inklusion wird nun als dehnungsfrei definiert.
- 6) Anlegen eines Satzes von Kräften an die Inklusionsoberfläche $+\sigma_{ij}^t \hat{n}$, der die in 4) angelegte Spannung aufheben soll. Hieraus folgt der von äußeren Kräften freie Endzustand mit der Dehnung e_{ij}^c innen und außen und der Spannung $\sigma_{ij}^c - \sigma_{ij}^t$ innen und σ_{ij}^c außen.

Eshelby löst das Problem 6), indem er die Lösung von Love (1907) für Verschiebungen, resultierend aus einer in einem homogenen Medium wirkenden Punktkraft, heranzieht. Bei der Integration dieser Kräfte $+\sigma_{ij}^t \hat{n}$ über eine Ellipsoidoberfläche stellt sich dann

heraus, daß die Dehnung e_{ij}^c im Innern des Ellipsoids uniform ist. Zwischen e_{ij}^t und dem resultierenden e_{ij}^c findet Eshelby den Zusammenhang:

$$e_{ij}^c = S_{ijkl} e_{kl}^t \quad (3.3.22)$$

wobei S_{ijkl} die Poissonkonstante, die drei Halbachsen des Ellipsoids und im allgemeinen Fall elliptische Integrale erster und zweiter Art enthält.

Auf der Konstanz der Inklusionsdehnung beruht nun die Möglichkeit, das Problem der Transformation einer Inklusion, bestehend aus dem gleichen Material K, μ wie die Matrix, auf den Fall einer eingelagerten Inhomogenität unterschiedlichen Materials mit K_1 und μ_1 zu erweitern. Überlagert man, nachdem das Problem bis Punkt 6) gelöst ist, dem ganzen System eine uniforme Dehnung e_{ij}^a , die also im Unendlichen einer äußeren Spannung

$$\sigma_{ij}^a = (K - \frac{2}{3} \mu) e_{kk}^a \cdot \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^a \quad (3.3.23)$$

(mit δ_{ij} = Kronecker-Delta, es gilt hier die Summationskonvention) entsprechen würde, so kann man für den Dehnungs- und Spannungszustand in der transformierten Inklusion schreiben:

$$e_{ij}^I = e_{ij}^c + e_{ij}^a \quad (3.3.24)$$

$$\sigma_{ij}^I = (K - \frac{2}{3} \mu) (e_{kk}^c + e_{kk}^a - e_{kk}^t) \delta_{ij} + 2\mu (e_{ij}^c + e_{ij}^a - e_{ij}^t) \quad (3.3.25)$$

Betrachtet man nun eine Inklusion des Materials K_1, μ_1 , die die Dehnung $e_{ij}^c + e_{ij}^a$ aufweist, so kann unter Wahrung des Spannungs- und Dehnungsfeldes genau dann eine transformierte Inklusion des Materials K, μ durch eine neue mit K_1 und μ_1 ersetzt werden, wenn die Dehnung $e_{ij}^c + e_{ij}^a$ in der Inklusion die Spannung (3.3.25) hervorruft. e_{ij}^t ist also so zu wählen, daß gilt

$$\begin{aligned} (K_1 - \frac{2}{3} \mu_1) (e_{kk}^c + e_{kk}^a) \delta_{ij} + 2\mu_1 (e_{ij}^c + e_{ij}^a) = \\ (K - \frac{2}{3} \mu) (e_{kk}^c + e_{kk}^a - e_{kk}^t) \delta_{ij} + 2\mu (e_{ij}^c + e_{ij}^a - e_{ij}^t) \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Ersetzt man e_{ij}^c mit Hilfe von (3.3.22), so stellt (3.3.26) also

eine Bedingung für e_{ij}^t in Abhängigkeit von der äußeren Dehnung (also auch äußeren Spannung) dar. Für die Scherkomponenten von e_{ij}^t folgen aus (3.3.26) mit (3.3.22) jeweils eine Bestimmungsgleichung, für die Komponenten $e_{11}^t, e_{22}^t, e_{33}^t$ ergibt sich jedoch ein Satz von drei simultan zu lösenden Gleichungen.

Aus (3.3.26) folgt weiter, indem man die Terme $e_{ij}^c + e_{ij}^a$ gemäß (3.3.24) ersetzt, für die Inklusionsdehnung e_{ij}^I :

$$e_{ij}^I = \frac{1}{3} \frac{K}{K-K_1} e_{kk}^t \delta_{ij} + \frac{\mu}{\mu-\mu_1} \left(e_{ij}^t - \frac{1}{3} e_{kk}^t \delta_{ij} \right) \quad (3.3.27)$$

Faßt man also die Vorgehensweise zusammen, dann erhält man bei äußerer Belastung σ_{ij}^a die uniforme Dehnung e_{ij}^I einer ellipsoidförmigen Inklusion mit K_1, μ_1 , eingelagert in ein Medium mit K, μ , indem man mit Hilfe von (3.3.26) und (3.3.22) die Dehnung e_{ij}^t bestimmt, aus der dann mit (3.3.27) die Inklusionsdehnung folgt. Der Tensor S_{ijkl} und die Bestimmungsgleichungen (3.3.26) sind im Anhang A gegeben. Aus diesen Inklusionsdehnungen sollen nun die Integrale $\int_{f_i} \delta \vec{u} \delta p \hat{n} dF$ und $\int_{f_i} \delta \vec{u} \vec{T} dF$ und somit die effektiven Moduli gemäß (3.3.5), (3.3.10), (3.3.12) und (3.3.14) bestimmt werden.

Wegen der auftretenden elliptischen Integrale ist eine analytische Bestimmung der Dehnung e_{ij}^I nicht mehr möglich. Auch die Bestimmung der Oberflächenintegrale bei beliebig orientierten Ellipsoiden dürfte mit Schwierigkeiten verbunden sein. Es wurde daher ein FORTRAN-Programm für den Institutsrechner MINC geschrieben, welches schematisch in Abb. 31 dargestellt ist. Der Gang der Rechnung sei kurz beschrieben: Zur Berechnung eines effektiven Moduls wird das Material, das eine beliebig orientierte Inklusion enthält, von außen durch Kompression bzw. reine Scherung belastet. Aus dem Formelsatz, der in Anhang A gegeben ist, folgt die Deformation der Inklusion, wobei die elliptischen Integrale numerisch durch Romberg-Integration ermittelt werden. Die Hauptdehnungen von e_{ij}^I sind im allgemeinen, d.h., wenn die Richtungen der äußeren Hauptspannungen nicht mit den Ellipsoidachsen übereinstimmen, gegenüber dem Hauptspannungssystem der äußeren Belastung gedreht. Daher werden zunächst die Eigenwerte und -vektoren und somit das Hauptdehnungssystem von e_{ij}^I bestimmt. Durch Integration der Dehnungen vom Mittelpunkt der Inklusion aus längs Geraden parallel zu den Hauptdehnungsachsen erhält man dann sofort

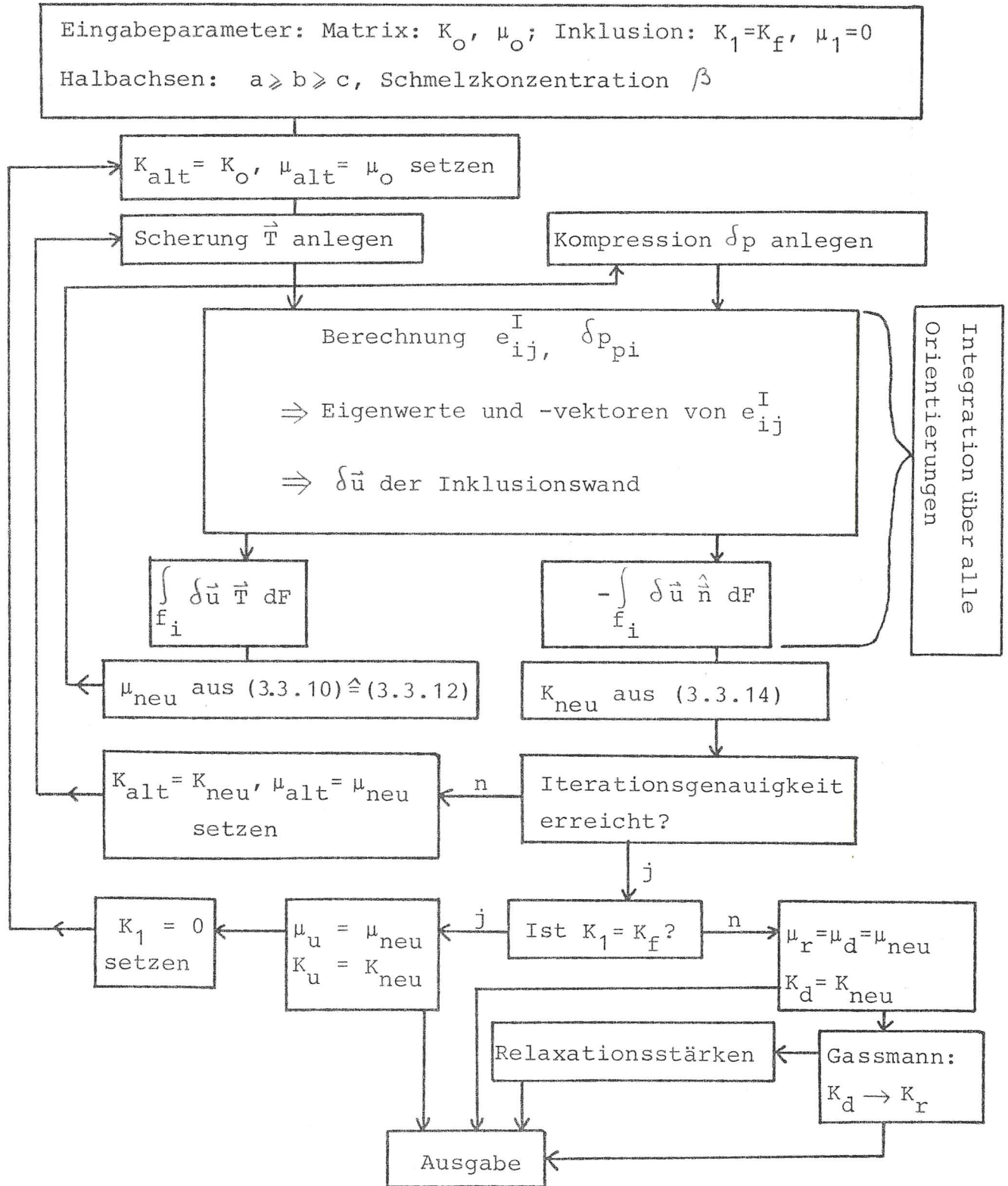


Abb. 31: Blockdiagramm zur numerischen Berechnung der relaxierten (K_r, μ_r) , der unrelaxierten (K_u, μ_u) Moduli und der Relaxationsstärken für ellipsoidförmige, flüssigkeitsgefüllte Inklusionen. Das SCS findet Anwendung.

die Porenwandverschiebungen. Durch diese sind die Integranden $\delta \vec{u} \delta p \hat{n}$ bzw. $\delta \vec{u} \vec{T}$ gegeben. Das jeweils gesuchte Oberflächenintegral wird mit Hilfe einer zweifachen Rombergintegration bestimmt. Der gesamte Parameterraum aller möglichen Orientierungen wird mit der jeweiligen Berechnung von $\int_{f_i} \delta \vec{u} \delta p \hat{n} dF$, $\int_{f_i} \delta \vec{u} \vec{T} dF$ möglichst eng abgetastet und damit eine Integration über f_i sämtliche Orientierungen durchgeführt. Die resultierenden gemittelten Integrale liefern dann jeweils die effektiven Moduli. Dem SCS wird Rechnung getragen, indem iterativ die effektiven Moduli jeweils wieder als Matrixmoduli eingesetzt werden, wobei bei jeder Iteration der Schermodul durch äußere Scherung und der K-Modul durch äußere Kompression ermittelt wird. Ist $K_1 = K_f$ angesetzt, so ergeben sich, da bei Scherung je nach Orientierung die unterschiedlichen Innendrucke implizit berücksichtigt sind, die unrelaxierten Moduli K_u, μ_u . Wird $K_1 = 0$ gewählt, so ergeben sich K_d, μ_d , wobei $\mu_d = \mu_r$. K_r wird dann schließlich über die Gassmannrelation bestimmt.

Das asymptotische Verhalten des Programms wurde anhand bekannter Lösungen scheiben-, nadel- und kugelförmiger Inklusionen überprüft. Hierbei ließen sich die Werte des Integrals $\int_{f_i} \delta \vec{u} \vec{T} dF$ für verschiedene Spannungen \vec{T} , die z.B. von Budiansky und O'Connell (1976) für scheibenförmige Inklusionen und von Mavko (1980, Anhang) für Kanäle angegeben wurden, mit maximal 0.5% Abweichung reproduzieren. Diese Fehler dürften auf die mehrfache numerische Integration zurückzuführen sein. Entkoppelt man die selbst-konsistenten Gleichungen für K und μ , was wegen des deutlich schwächeren Abfalls des K-Moduls näherungsweise möglich ist, so läßt sich die Fehlerfortpflanzung für die immer noch impliziten Gleichungen bestimmen. Bezeichnet man mit δI den relativen Fehler des Integrals, so ergibt sich der relative Fehler des jeweiligen Moduls δM , bezogen auf den ungestörten Modul M_0 , als

$$\delta M = \left(\frac{M}{M_0} - 1 \right) \delta I \quad (3.3.28)$$

Der relative Fehler des Moduls ist also immer kleiner als der relative Fehler des Integrals und dürfte unterhalb des Auflösungsvermögens der entsprechenden Diagramme liegen. Ein weiterer Test wurde für sphäroidförmige Inklusionen mit $a=b > c$ durch Vergleich mit effektiven selbst-konsistenten Moduli, die aus den Formeln von Wu (1966, Anhang) folgen, durchgeführt. Hierbei ist in Wu's

Gleichung A1 anstelle von $-1/2 A$ in der dritten Zeile $+1/2 A$ gesetzt, wie aus einem Vergleich mit den Formeln von Kuster und Toksöz (1974) und aus einem numerischen Vergleich mit der Formulierung von Korrington et al. (1979) hervorgeht. Auch gegenüber diesen analytischen Lösungen wurden keine Abweichungen $\geq 0.5\%$ beobachtet.

Da die Formeln von Wu für den Fall $a=b \neq c$ sicherlich eine höhere Genauigkeit aufweisen als das hier beschriebene Modell, wurden sie bei der Bestimmung der Relaxationsstärken herangezogen. Die von Wu nicht gegebenen relaxierten Moduli wurden durch Annahme trockener Inklusionen und Anwendung der Gassmannrelation ermittelt. Bei der Berechnung der Relaxationsstärken treten Differenzen ähnlicher Größen auf, was bei fehlerbehafteten Moduli zu einer Vergrößerung der Ungenauigkeit führen könnte. Wie ein Vergleich mit den Relaxationsstärken, die mit dem hier vorgestellten Programm berechnet wurden, zeigt, fallen die Abweichungen jedoch wesentlich geringer aus, als durch statistische Fehlerfortpflanzung zu erwarten wäre. Dies dürfte damit zusammenhängen, daß die Ungenauigkeiten in den Moduli systematischer Natur sind und bei der Differenzenbildung zum Teil aufgehoben werden.

In Abb. 32 ist nun das Ergebnis einer Rechnung für Moduli von typischen ultrabasischen Gesteinen und Schmelzen ($K_o=0.66$ Mb, $\mu_o=0.4$ Mb, $K_f=0.2$ Mb) in Abhängigkeit von der Schmelzkonzentration β und dem Querverhältnis ("aspect ratio") α dargestellt. Die Inklusionen sind kreisförmig gewählt, $a=b > c$, oben sind die relaxierten, unten die unrelaxierten Moduli gezeigt. Es sind zum Vergleich an einigen Kurven die Abweichungen der effektiven Moduli des Filmmodells von O'Connell und Budiansky (1977) eingetragen (senkrechte Balken). Die Theorie von O'Connell und Budiansky ging von unendlich dünnen Filmen aus, da im Prinzip nur die Komponente des Oberflächennormalenvektors \hat{n} (der in den Integralen in (3.3.5) etc. auftritt) berücksichtigt wird, die senkrecht auf der Fläche des Risses steht. Bei Querverhältnissen ≤ 0.01 ist die relative Abweichung des Filmmodells vom Modell mit endlichen Dicken, bezogen auf μ_o , nur gering, $< 2-3\%$, die Differenz zwischen beiden Modellen wird aber für $\alpha \geq 0.03$ signifikant (die Balken sind für große $\alpha > 0.1$ bzw. 0.2 nicht mehr eingetragen).

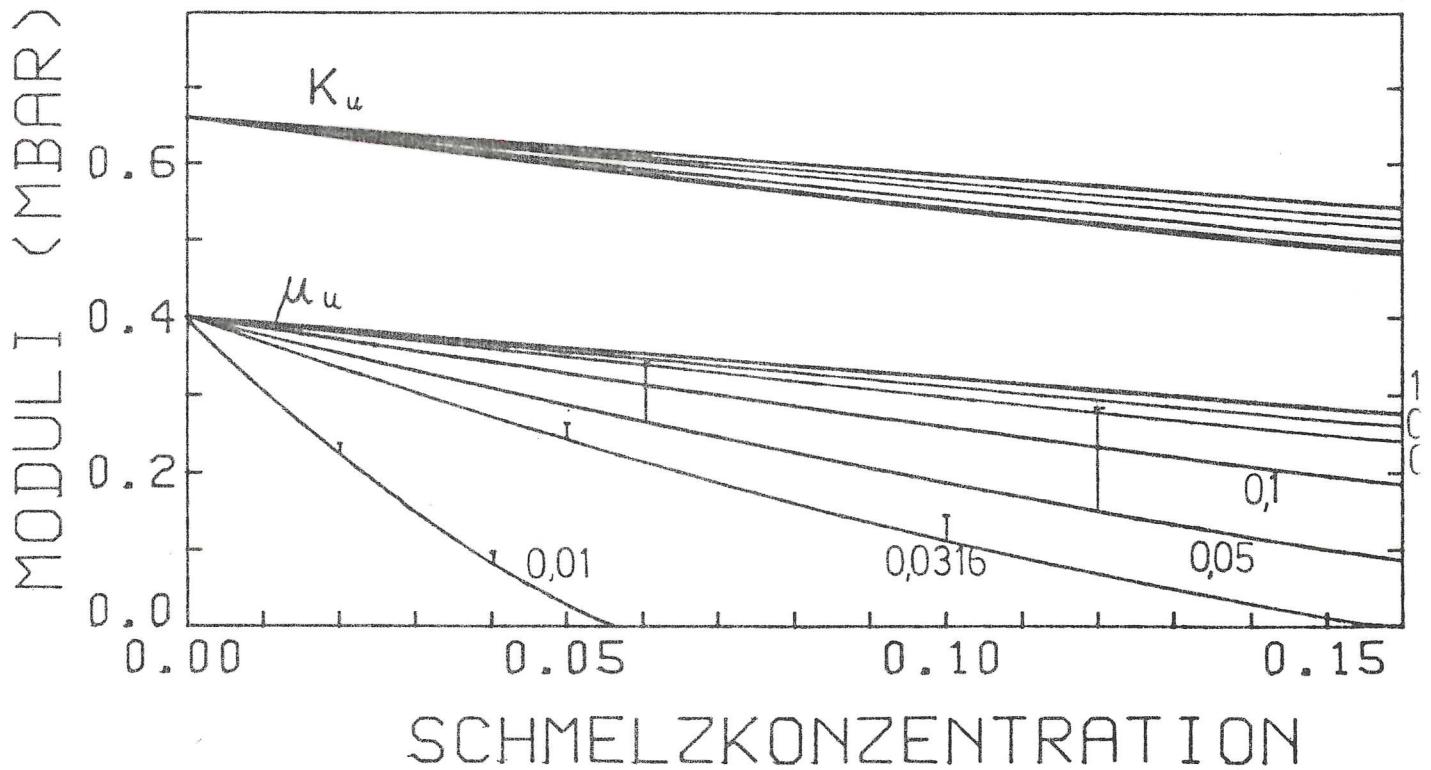
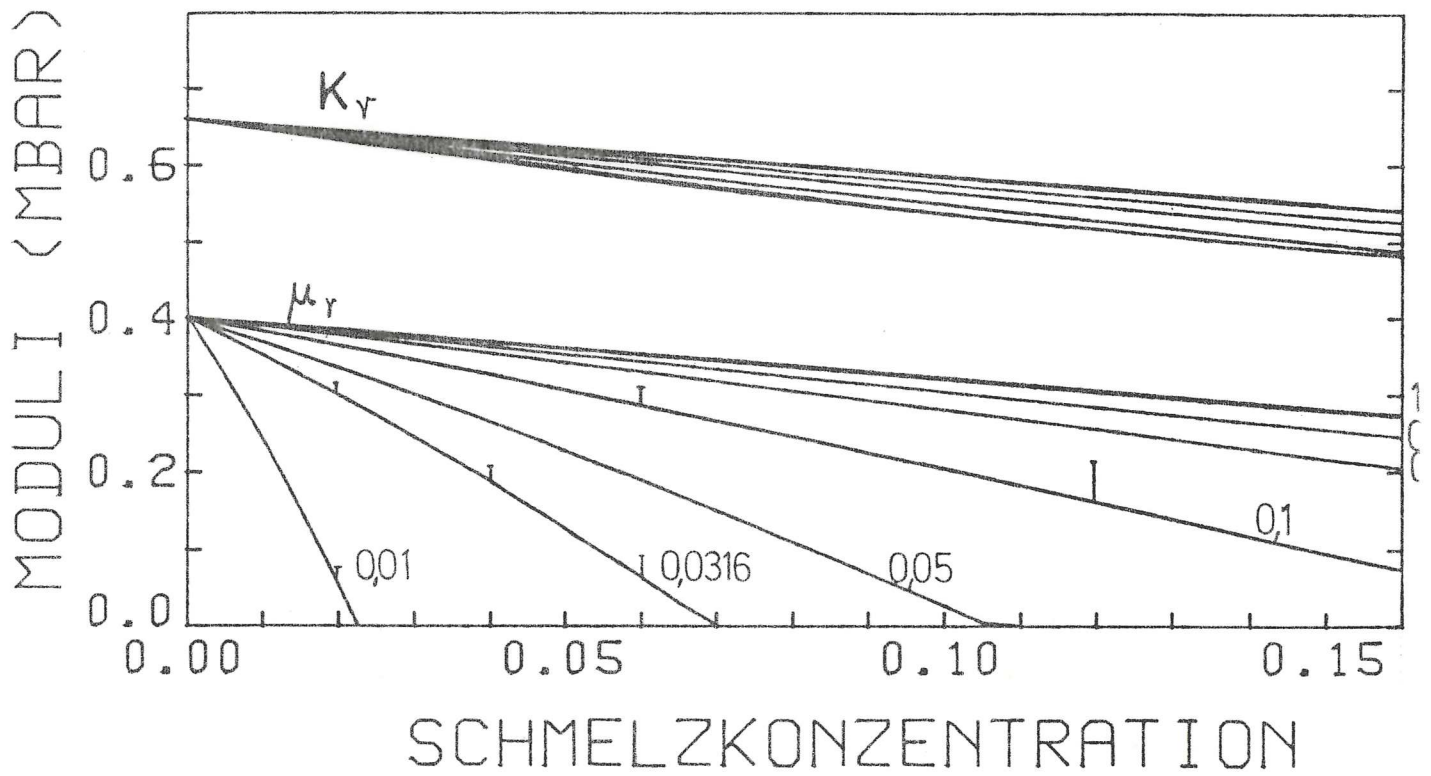


Abb. 32: Relaxierte (oben) und unrelaxierte (unten) Kompressions- und Schermoduli für sphäroidförmige Inklusionen. Die Zahlen an den Kurven geben das Querverhältnis an. Die Balken zeigen die Abweichungen vom Filmmmodell. Für die Moduli wurde angenommen: $K_o=0.66$ Mb, $\mu_o=0.4$ Mb, $K_f(\text{Schmelze})=0.2$ Mb, $\mu_f=0$. Das SCS wurde angewendet.

Aus Abb. 32 geht hervor, daß die effektiven Moduli für Inklusionen, die ein α zwischen 0.2 und 1 haben, sich nur wenig voneinander unterscheiden. Offensichtlich verhält sich ein Material, das kompakte Schmelztaschen unterschiedlicher Form enthält, nicht wesentlich anders als eines mit kugelförmigen Inklusionen. Diese Aussage gilt jedoch nur für konvexe Schmelztaschen, da das hier vorgestellte Modell keine kompakten Inklusionen berücksichtigen kann, die spitzzulaufende Kanten haben.

Abb. 33 zeigt eine andere Darstellungsweise des unrelaxierten Schermoduls. In einem Diagramm mit der Schmelzkonzentration als Abszisse und dem Querverhältnis als Ordinate sind Linien gleichen Modulabfalls eingetragen. Der lineare Teil der Kurven ist mit dem Filmmodell von O'Connell und Budiansky (1977) identisch. Die lineare gestrichelte Fortsetzung des Filmmodells zeigt die Abweichung zum Ellipsoidmodell mit endlichen Inklusionsdicken für $\alpha > 0.01$. Die Darstellung in diesem $\alpha - \beta$ -Diagramm wurde hier gewählt, da sie einen Vergleich mit dem weiter unten beschriebenen Modell über den Verbundenheitsgrad und über die elektrische Leitfähigkeit ermöglicht.

In Abb. 34 sind die maximal möglichen Q^{-1} -Werte für Scherung gemäß (3.1.19) aufgetragen. Da diese Q_{\max}^{-1} für kleine Q^{-1} der halben Relaxationsstärke entsprechen, sind sie mit $\Delta'_\mu/2$ bezeichnet, mit:

$$\frac{\Delta'_\mu}{2} = \frac{\mu_u - \mu_r}{2 \sqrt{\mu_u \cdot \mu_r}} \approx \frac{\Delta}{2} \quad \text{für kleine } \Delta/2 \quad (3.3.29)$$

Es sind wieder für $\alpha \leq 0.2$ die entsprechenden Werte des Filmmodells von O'Connell und Budiansky (1977) durch Balken angezeigt. Obwohl die Abweichungen in den Moduli für $\alpha \geq 0.03$ beträchtlich werden, macht sich die Diskrepanz in den Relaxationsstärken weniger stark bemerkbar. Offensichtlich heben sich die systematischen Abweichungen der Moduli bei der Differenzenbildung zur $\Delta'_\mu/2$ - Bestimmung zum Teil auf. Dies zeigt eine Überprüfung der Zahlenwerte selbst: die Diskrepanz der Differenzen $\mu_u - \mu_r$ beider Modelle ist um fast eine Größenordnung kleiner als die der Moduli selbst.

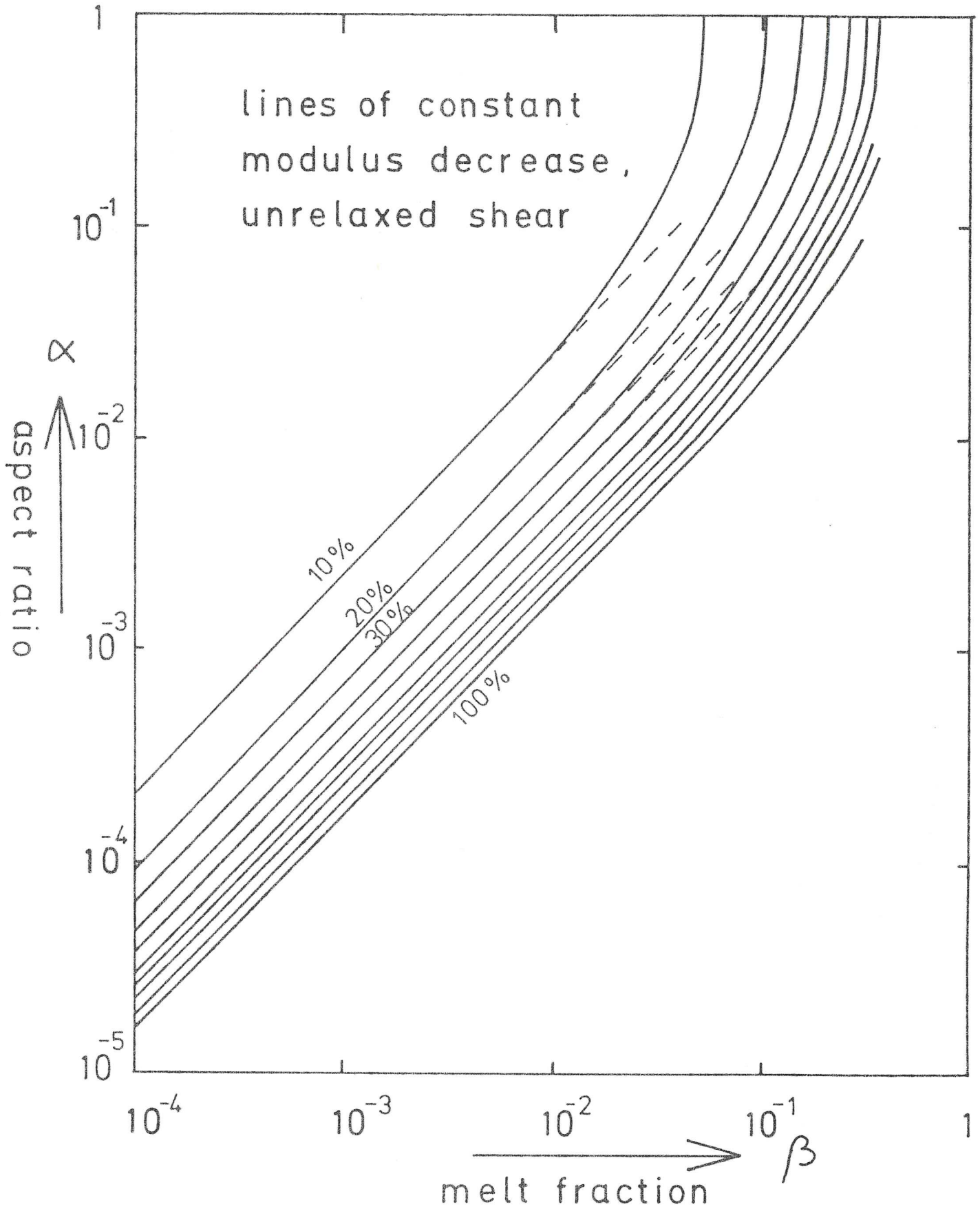


Abb. 33: Linien gleichen Schermodulabfalls in Prozent (%) von μ_0 für sphäroidförmige Inklusionen in Abhängigkeit vom Querverhältnis und der Schmelzkonzentration. Gestrichelt: Extrapolation des Filmmodells. Sonstige Moduli wie in Abb. 32.

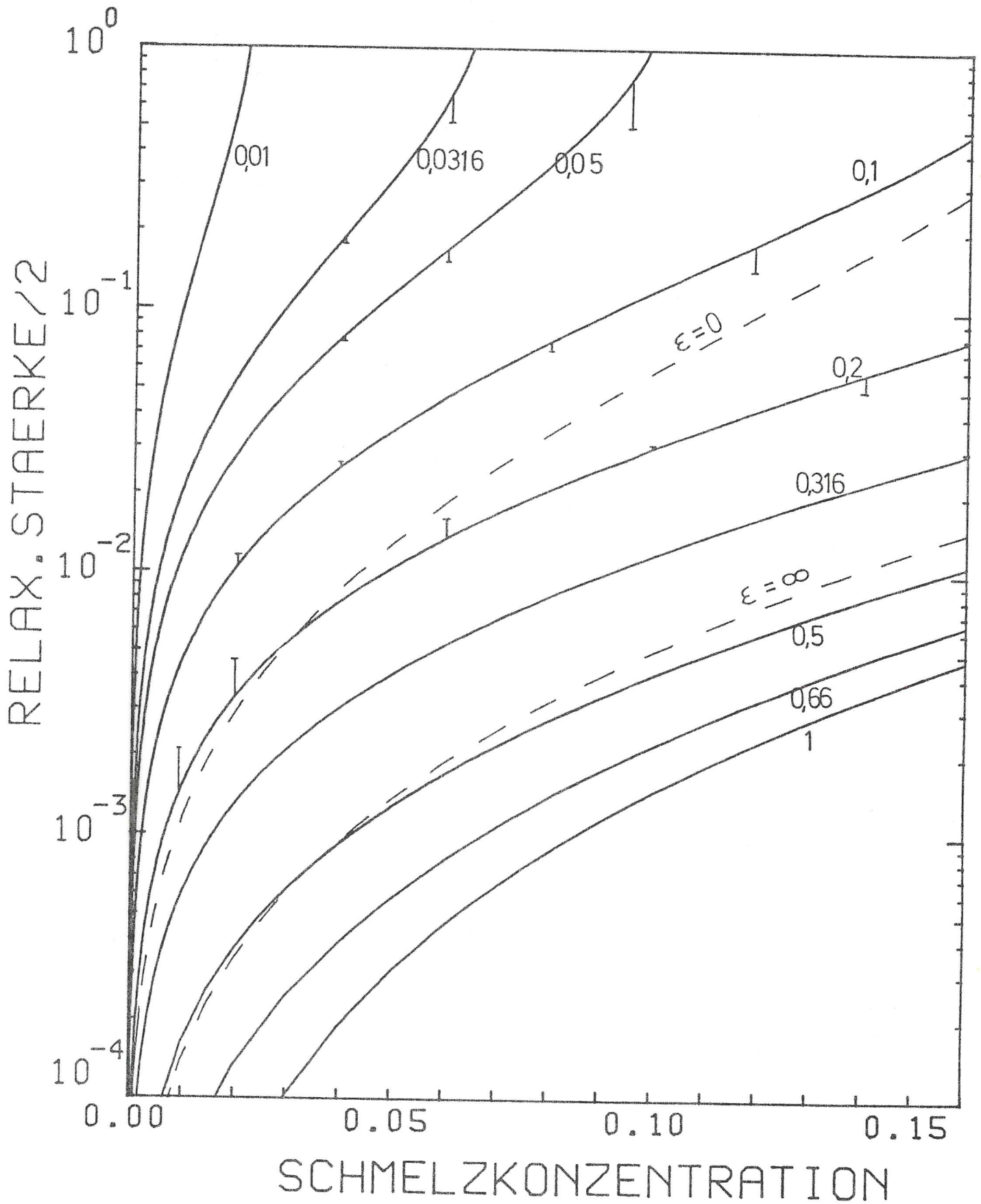


Abb. 34: Halbe Relaxationsstärke $\Delta'_\mu/2$ für sphäroidförmige Inklusionen (durchgezogene Kurven) und Kanalinklusionen (gestrichelt). Zahlen an den Kurven geben das Querverhältnis an, ϵ gibt die Form der Kanalquerschnitte an (vgl. Abb. 14). Sonstige Moduli wie in Abb. 32. Die Balken zeigen die Abweichungen vom Filmmodell ($\alpha \leq 0.2$).

Wie schon für das Filmmodell diskutiert wurde, lassen sich beliebig große Relaxationsstärken durch Wahl eines genügend kleinen Querverhältnisses erzeugen. Dies wird auch in Abb. 34 deutlich, in der Kurven bis hinunter zu einem α von 0.01 eingetragen sind. Betrachtet man dagegen Inklusionen mit Querverhältnissen > 0.1 , so werden schon wesentlich größere Schmelzkonzentrationen benötigt, um ein signifikantes $\Delta_{\mu}^1/2$ hervorzurufen. Interessant ist hierbei ein Vergleich zwischen den Relaxationsstärken und den Moduli selbst (Abb. 32, Abb. 34): während die Moduli sich im Bereich $0.2 \leq \alpha \leq 1$ nicht wesentlich voneinander unterscheiden, überstreichen die Relaxationsstärken mehr als eine Dekade.

In Abb. 34 fällt auf, daß selbst für kugelförmige Inklusionen die Relaxationsstärke für Scherung nicht verschwindet. Im Fall einer kugelförmigen Inklusion ist der Innendruck nicht mehr orientierungsabhängig, bei reiner Scherung ist er sogar Null. Eine durch unterschiedliche Innendrucke ausgelöste Relaxation sollte nicht erwartet werden. Der Unterschied zwischen den Moduli beruht jedoch auf dem Ansatz des SCS, das ja als erste Näherung die Wechselwirkung zwischen den Inklusionen berücksichtigen soll: Für den relaxierten Schermodul wird eine Inklusion eingebettet in ein Medium mit den Moduli $K_d, \mu_d = \mu_r$ betrachtet, beim unrelaxierten Schermodul wird hingegen als K-Modul des Mediums $K_u \neq K_d$ angesetzt, wodurch dann ein leicht unterschiedliches μ_u resultiert. Dieser Effekt hat durchaus seine physikalische Berechtigung. Betrachtet man eine kugelförmige Inklusion unter einer Scherbelastung (Abb. 35), so folgt aus dem Spannungsfeld in der direkten Umgebung der Kugel nach Eshelby (1957) für die Kompressionsspannung $1/3 \sigma_{ii}$ an den Punkten a, b:

$$\begin{aligned}
 \text{a: } & \frac{1}{3} \sigma_{ii} = +p && \text{mit} \\
 \text{b: } & \frac{1}{3} \sigma_{ii} = -p && p = \frac{5(1+\nu)}{7-5\nu}
 \end{aligned}$$

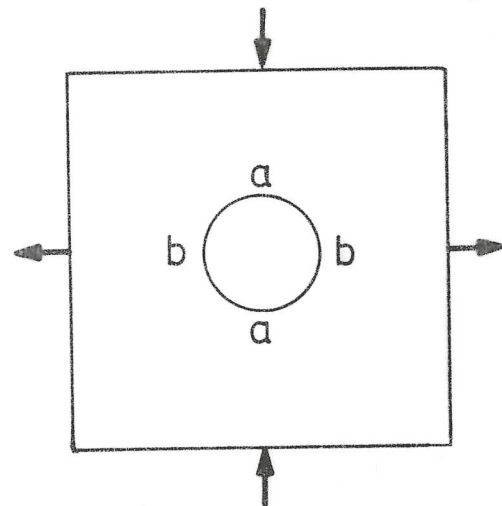


Abb. 35: Siehe Text.

d.h., im Bereich a herrscht vorwiegend Dilatation, um b dagegen Kompression. Befinden sich in diesen Bereichen isolierte Nachbarinklusionen, so werden sie

aufgrund der Wechselwirkung mit obiger Inklusion leicht unterschiedliche Innendrucke aufweisen. Geht man dann von der Möglichkeit des Flüssigkeitsaustauschs zwischen den Inklusionen aus, so ist eine Relaxation möglich. Hier wird schon eine Problematik deutlich: Kann man davon ausgehen, daß die hier betrachteten kompakten Schmelzinklusionen miteinander in Verbindung stehen? Wie weiter unten noch gezeigt wird, ist für kleine Konzentrationen damit zu rechnen, daß ein Großteil der Inklusionen sich nicht gegenseitig berühren, falls eine statistische Verteilung angenommen wird. Denkbar wäre jedoch, daß zusätzlich zu den Schmelzta-schen ein feines Kanalsystem für einen höheren Verbundenheitsgrad sorgt. Unter Berücksichtigung, daß die Schmelzinklusionen möglicherweise nur teilweise miteinander verbunden sind, stellen die Kurven in Abb. 34 obere Grenzen dar.

Schließlich sind in Abb. 34 zum Vergleich die Relaxationsstärken der beiden Extremmodelle für Kanäle von Mavko (1980) eingetragen (gestrichelt). $\epsilon = 0$ entspricht spitzzulaufenden, $\epsilon = \infty$ kreisförmigen Querschnitten.

In Abb. 36 wurde die Scherrelaxationsstärke in Abhängigkeit des unrelaxierten Schermoduls aufgetragen. Auch hier wird der Unterschied zum Filmmodell deutlich. Im Filmmodell besteht weitgehend unabhängig von α ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Modulabfall μ_u und der Relaxationsstärke, der durch die Kurven für $\alpha = 0.01$ und 0.001 gegeben ist. Läßt man auch endliche Inklusionsdicken zu, so erhält man zu jedem μ_u je nach α eine andere Relaxationsstärke. Bei gleichem Modulabfall und wachsendem α fällt $\Delta'_\mu/2$ also ab, bis man zu kugelförmigen Inklusionen gelangt. Diese setzen zwar noch den unrelaxierten Schermodul herab, bewirken jedoch nur eine sehr geringe Absorption bzw. Relaxationsstärke.

In der Kurve für flache Filme ($\alpha = 0.01$ und kleiner) äußert sich wieder die Mehrdeutigkeit des Filmmodells: ein bestimmter Modulabfall μ_u und die zugehörige Relaxationsstärke Δ lassen sich durch eine Vielzahl von Wertepaaren (α, β) hervorrufen. O'Connell und Budiansky (1977) behoben diese Mehrdeutigkeit, indem sie α und β in der Ribhäufigkeitsdichte $\epsilon \sim \beta/\alpha$ zusammenfaßten. Durch Abb. 36 ist nun für den Bereich $\alpha > 0.01$ diese Mehrdeutigkeit aufgehoben. Jeder unrelaxierte Schermodul läßt sich zwar durch eine Vielzahl von Wertepaaren (α, β) erzeugen, unter Hin-

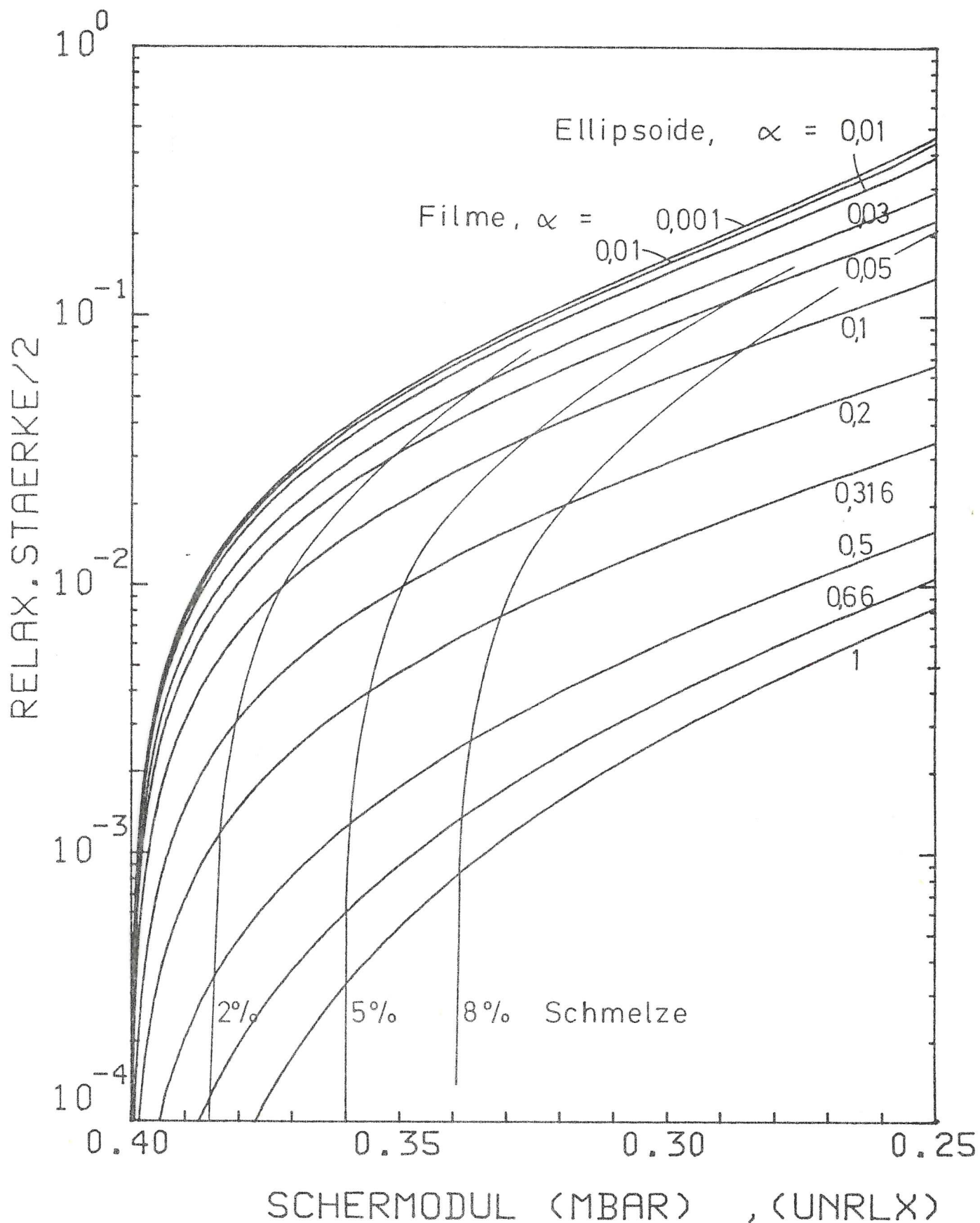


Abb. 36: Halbe Relaxationsstärke $\Delta'_U/2$ in Abhängigkeit vom unrelaxierten Schermodul für Filme und Sphäroidinkclusionen. Sonstige Moduli wie in Abb. 32. Für kleine α ($=0.01, 0.001$) wurde das Filmmodell (3.2.7) bis (3.2.10) benutzt.

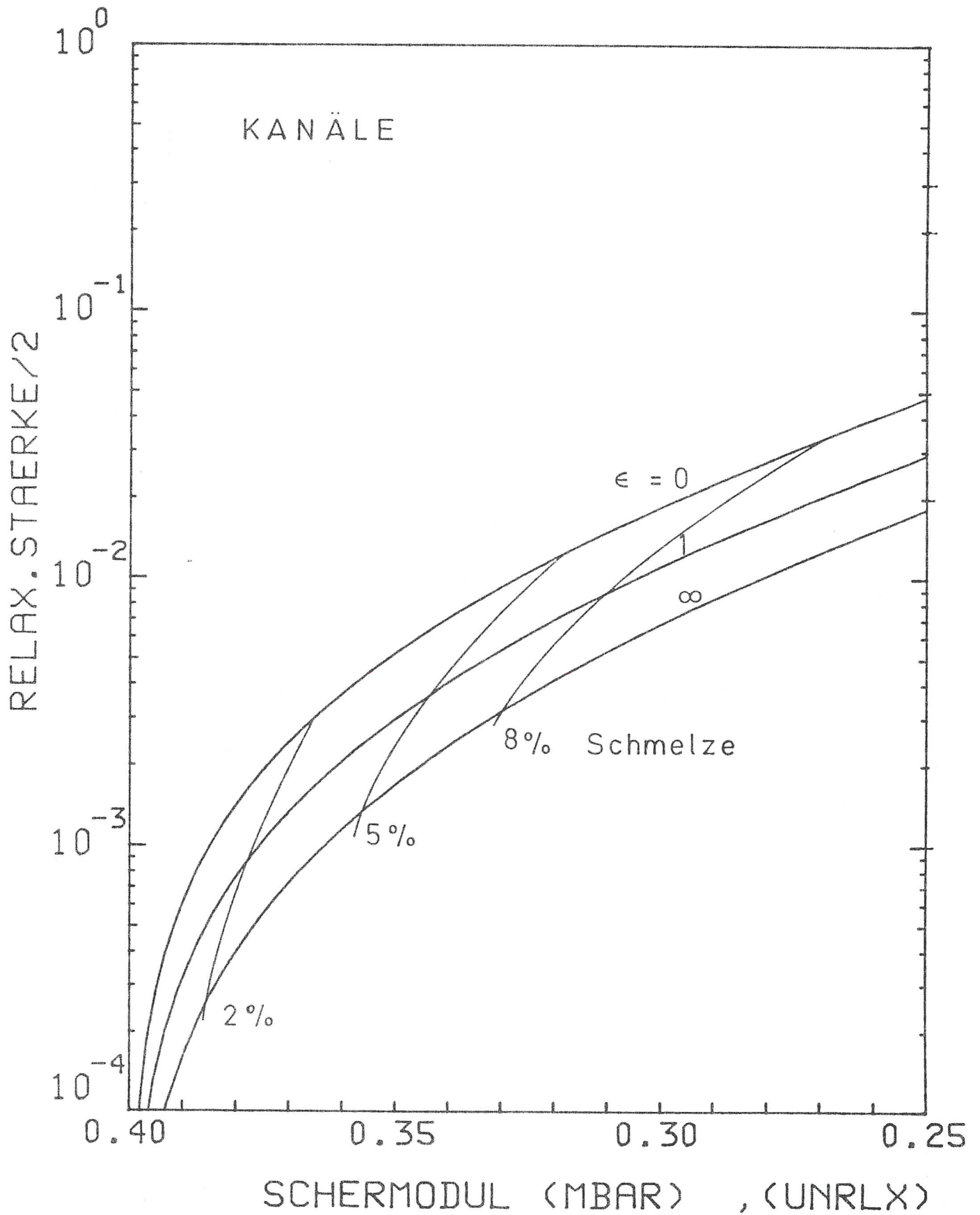


Abb. 37: Wie Abb. 36, jedoch für Kanalinklusionen mit dem Parameter ϵ für die Form der Querschnitte (vgl. Abb. 14).

zunahme der Relaxationsstärken, oder einfach des relaxierten Schermoduls, ist ein Wertepaar $(\mu_u, \Delta'_\mu/2)$ bzw. (μ_u, μ_r) eindeutig abhängig von (α, β) .

Ein interessanter Aspekt ergibt sich, wenn man die in Abb. 36 dargestellten Kurven gleicher Schmelzkonzentration mit berücksichtigt (für 2, 5, 8% Schmelze). Durch sie wird bei konstantem Modulabfall erkennbar, daß hohe Relaxationsstärken durch Filme mit geringer Schmelzkonzentration hervorgerufen werden können, während für geringe Relaxationsstärken Inklusionen mit hohen Schmelzkonzentrationen erforderlich sind.

Zum Vergleich sind in Abb. 37 die entsprechenden Kurven des Kanalmodells von Mavko (1980) eingetragen, wobei $\epsilon = 0$ für spitzkantige und $\epsilon = \infty$ für runde Querschnitte steht. Kennt man nur die Moduli μ_u, μ_r , oder $\mu_u, \Delta'_\mu/2$, so läßt sich das Kanalmodell kaum von einem mit sphäroidförmigen Inklusionen unterscheiden. Ein Vergleich mit Abb. 34 zeigt jedoch, daß die Relaxationsstärke für das Kanalmodell mit $\epsilon = 0$ etwas stärker mit zunehmender Schmelze ansteigt als für Sphäroidinklusionen.

Die behandelten Modelle wurden mit den speziellen ungestörten Moduli $K_o = 0.66$ Mb, $\mu_o = 0.4$ Mb berechnet. Man kann die Ergebnisse ohne weiteres durch Normierung mit K_o und μ_o auf andere Systeme übertragen, solange die Poissonzahl nicht zu stark von 0.25 abweicht. Die Wahl des K-Moduls von 0.2 Mb für Schmelze erfolgte unter Berücksichtigung einer Zusammenstellung von Werten für basaltische Schmelzen von Stolper et al. (1981), in der die meisten Werte in einem Bereich von 0.1 Mb bis 0.2 Mb liegen. Welchen Einfluß eine Veränderung des Moduls K_f auf die hier betrachteten Größen hat, zeigt als Beispiel Abb. 38. Es wurde hierfür der spezielle Fall $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.16$ gewählt. Der relaxierte Schermodul ist unabhängig von K_f , er ist identisch mit μ_u für den Grenzfall $K_f = 0$. μ_u ist im für basaltische Schmelzen interessanten Bereich mit $K_f \geq 0.1$ Mb weitgehend konstant, ebenso zeigt die Scherrelaxationsstärke $\Delta'_\mu/2$ keine drastischen Variationen. Interessanterweise erreicht die Relaxationsstärke für Kompression eine deutliche Amplitude für kleine K_f . Dies kann jedoch ein Effekt der unterschiedlichen Vorgehensweise bei der K-Berechnung sein: K_u wird direkt für gesättigte Inklusionen berechnet, für K_r wird dagegen zunächst K_d bestimmt, was im abgebildeten Fall

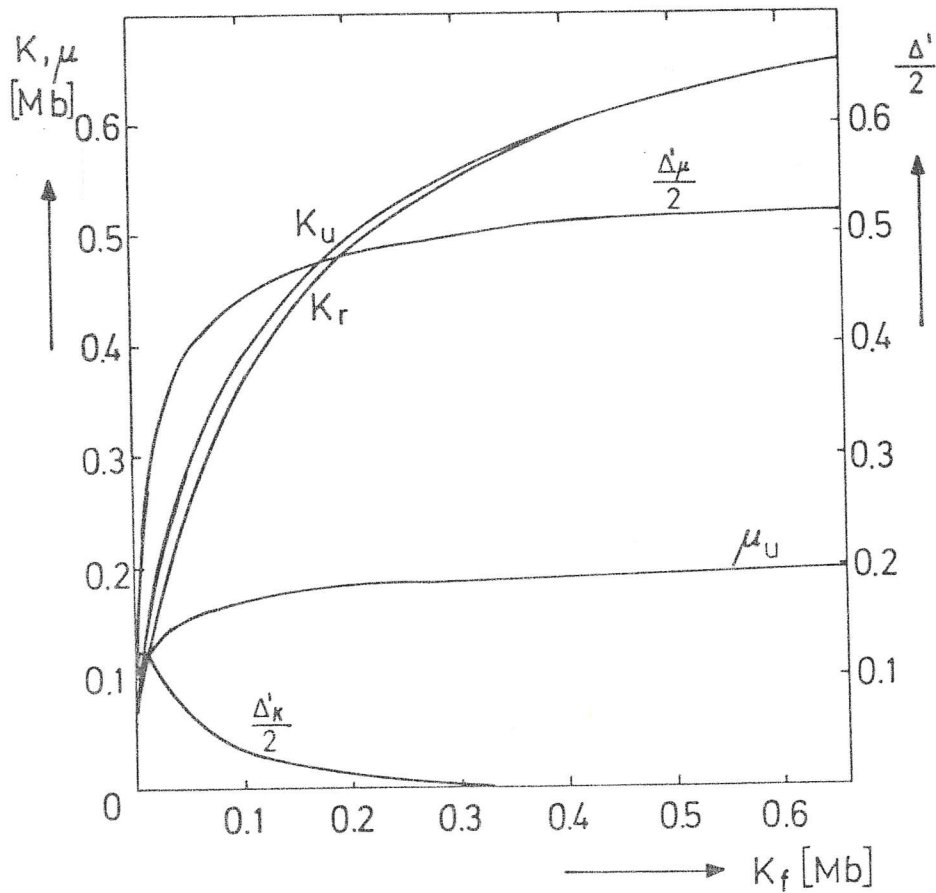


Abb. 38: Effektive Moduli K_u , K_r , μ_u (Ordinate links) und Relaxationsstärken für Scherung und Kompression (Ordinate rechts) in Abhängigkeit des Flüssigkeits-K-Moduls. Es gelten folgende Parameter: $\beta=0.16$, $a=b \neq c$ mit $\alpha=0.1$, $K_0=0.66$ Mb, $\mu_0=0.4$ Mb.

nur etwa 10% des K_0 beträgt, und aus diesem folgt dann über die Gassmannrelation K_r . K_r beträgt dann wieder ein Vielfaches von K_d . Bei der Differenzbildung $K_u - K_r$ kann sich dann ein beim Umweg über K_d entstandener systematischer relativer Fehler um ein Vielfaches verstärken. Es sei erinnert, daß das SCS zur Bestimmung von K_u und K_d nur eine Approximation darstellt, während die Gassmannrelation unter den gemachten Voraussetzungen eine exakte Beziehung ist.

Die in Abb. 38 dargestellten Kurven bleiben für andere α und β qualitativ weitgehend erhalten, lediglich die Scherrelaxation zeigt bei kleinem β einen flacheren Abfall (bei $K_f=0.1$ etwa auf die Hälfte).

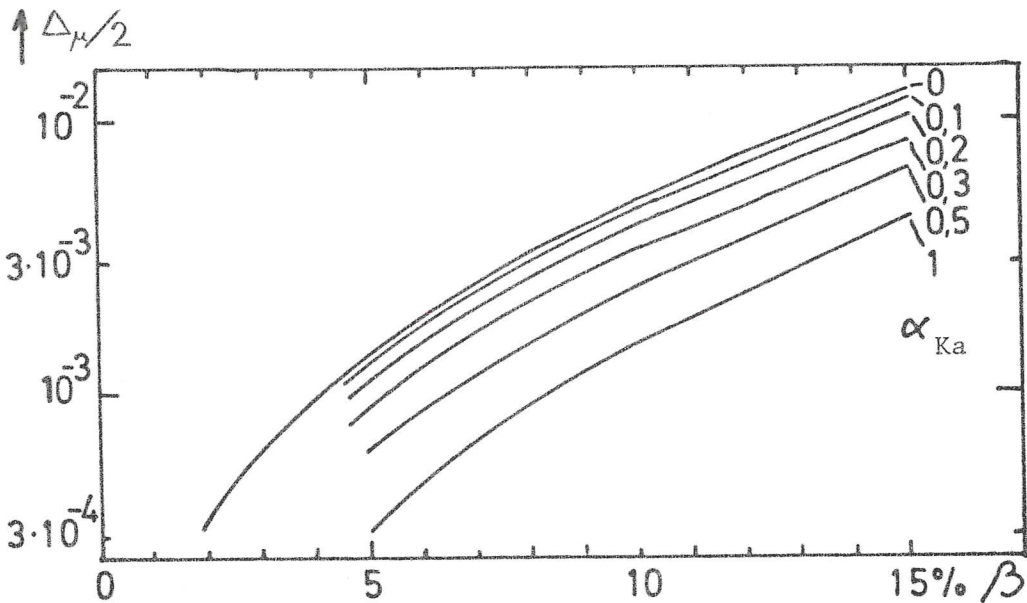
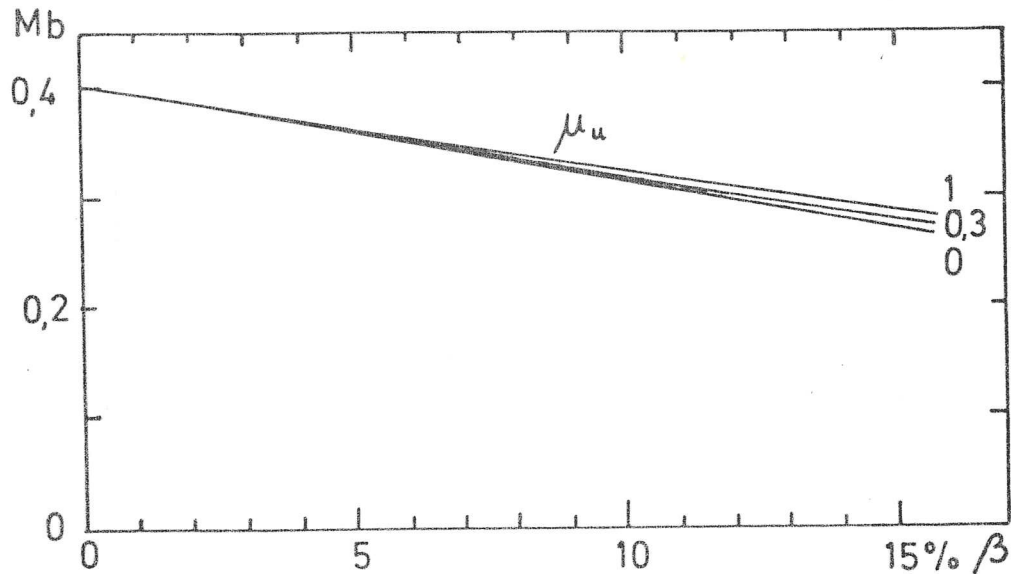


Abb. 39: Schermodulabfall (oben) und Relaxationsstärke $\Delta_{\mu}^{\prime}/2$ (unten) für prolate Inklusionen ($a \gg b=c$) mit $\alpha_{Ka}=b/a$.

Abb. 39 zeigt die unrelaxierten Schermoduli für langgestreckte, zigarrenförmige Inklusionen mit $a \gg b=c$, $\alpha_{Ka}=b/a$. $\alpha_{Ka}=0$ entspricht dem Kanalmodell von Mavko (1980) mit kreisförmigem Querschnitt. Da sich die Moduli für ein solches Kanalmodell nicht sehr stark von denen für kugelförmige Inklusionen unterscheiden, zeigt auch der Übergang von $\alpha_{Ka}=0$ (Kanal) zu $\alpha_{Ka}=1$ (Kugel) keine starken Auswirkungen. Der Modulabfall ist im gesamten Bereich schwächer als der für oblate Inklusionen mit $\alpha \leq 0.3$. Ebenso liegen die Relaxationsstärken unterhalb denen für

oblate Inklusionen mit $\alpha = 0.3$.

Die Ergebnisse in den bisherigen Abbildungen gelten für sphäroidförmige oder oblate Inklusionen mit $a=b \gg c$ (abgesehen von den prolaten Inklusionen in Abb. 39). Es wird nun anhand des numerischen Modells (Abb. 31) überprüft, ob es zu allen Kombinationen $a \gg b \gg c$ jeweils äquivalente Modelle mit $a'=b' \gg c'$ gibt, mit denen die in den letzten Abbildungen vorgestellten Ergebnisse allgemein auf ellipsoidförmige Inklusionen übertragbar sind. O'Connell und Budiansky (1974) führten für kreisförmige Filme ($a=b=:a'$) eine Bedingung für Reißdichten ein, die eine Erweiterung ihrer Modelle auf elliptische Filme ($a \neq b$) zuließ. Diese Bedingung kann umformuliert werden, so daß sie unter Beibehaltung von β und c lautet:

$$a' = 2 A/P \quad (3.3.1)$$

mit A =Fläche $\pi a b$, P =Umfang der durch a, b gegebenen Ellipse mit

$$P = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} \, d\psi$$

$$e^2 = 1 - b^2/a^2$$

P enthält ein vollständiges elliptisches Integral 2. Gattung. Der Zusammenhang (3.3.1) soll nun auch für Inklusionen mit endlicher Dicke $2c$ verifiziert werden.

Hält man a' fest, so ist durch (3.3.1) ein eindeutiger Zusammenhang zwischen a und b gegeben. Er ist in Abb. 40 (unten) dargestellt, wobei zu beachten ist, daß die Achsen unterschiedliche Maßstäbe haben. Die Kurve endet bei $b=a=a'$; wollte man sie verlängern, so würde $b > a$. Dieser Fall ist in der dargestellten

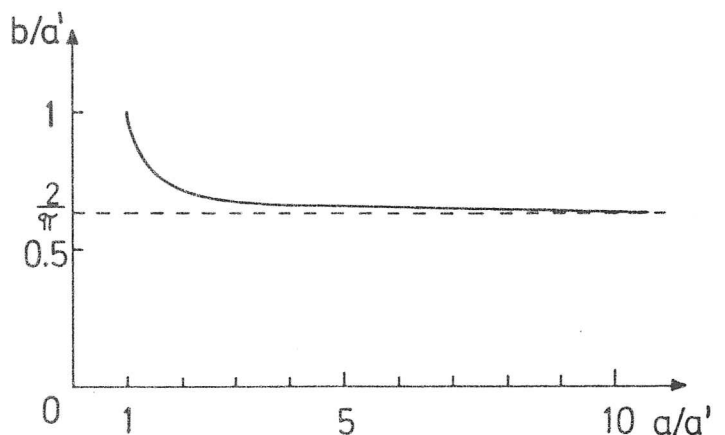
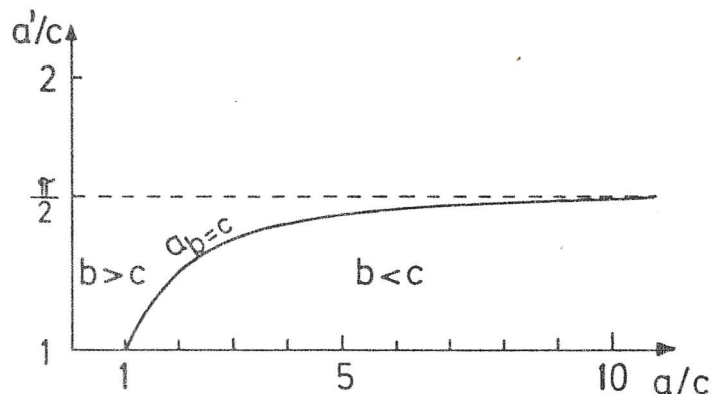


Abb. 40: Oben: Zusammenhang zwischen a' und dem $a=a_p=c'$, für das wegen $b=c$ prolate Ellipsoide vorliegen. Unten: Variation von a und b bei festem a' nach (3.3.1).

Kurve durch Vertauschen von a und b enthalten. Es gilt für die Wertebereiche von a und b : $a' \leq a < \infty$, $2/\pi a' < b \leq a'$. Um nun den Bereich aller möglichen a, b, c zu erfassen, wurde a und b gemäß (3.3.1) für ein festes a' variiert. Diese Variation wiederum wurde durch Veränderung von a' für eine ganze Reihe von Querverhältnissen $\alpha = c/a'$ mit festem c durchgeführt. Hierdurch ist sichergestellt, daß alle möglichen $a \geq b \geq c$ erfaßt sind, c wird dabei als Normierungsfaktor aufgefaßt. Für $a' > (\pi/2)c$ gilt für alle a : $b > c$, für $a' = (\pi/2)c$ wird im Grenzfall $a \rightarrow \infty$: $b=c$, es liegt dann eine kanalförmige Inklusion vor, für $a' < (\pi/2)c$ erhält man mit $b=c$ schon für kleinere a ($< \infty$) prolata Ellipsoide. Bezeichnet man dieses a mit $a_{b=c}$, so wird mit $a > a_{b=c}$: $b < c$. Dieser Fall wird durch Vertauschen von b und c in einem der vorigen Fälle eingeschlossen. Der Zusammenhang zwischen $a_{b=c}$ und a' ist in Abb. 40 oben dargestellt. $a_{b=c}$ trennt die Bereiche $b < c$ und $b > c$. Um nun alle Möglichkeiten zu erfassen, wird a im Bereich $a' \geq (\pi/2)c$ zwischen den Grenzen $a' \leq a < \infty$, im Bereich $c \leq a' \leq (\pi/2)c$ dagegen nur zwischen $a' \leq a \leq a_{b=c}$ variiert.

In Abb. 41 sind die unrelaxierten Schermoduli für verschiedene Querverhältnisse c/a' und Schmelzkonzentrationen aufgetragen, als Abszisse wurde b/a gewählt. Man erkennt, daß die Moduli für kleines $\alpha = c/a'$ (≤ 0.2) kaum von der Elliptizität oder b/a abhängig sind, ihre Varianz bleibt unter 1% (bezogen auf μ_0). Eine ähnlich ausgeprägte Unabhängigkeit von b/a ist auch für die Relaxationsstärke zu erkennen. Bei wachsendem c/a' wird der Einfluß von b/a größer, die Abweichungen im Modul steigen maximal für $c/a' = 0.4$ auf 2.4% und für $c/a' \geq 2/\pi$ auf ca. 3% für große β (15% - 20%). Bei der Relaxationsstärke ist dagegen mit wachsendem c/a' bei abnehmendem b/a ein Ansteigen von $\Delta'_\mu/2$ bis um den Faktor 1.3 ($c/a'=0.4$) bzw. 2 ($c/a' \geq 2/\pi$) zu beobachten.

Man kann zusammenfassen, daß die von O'Connell und Budiansky (1974) gegebene Bedingung (3.3.1) für die Übertragbarkeit kreisförmiger auf ellipsenförmige Filme bis hinauf zu $\alpha = c/a'$ Werten von 0.2 gültig ist (im Unterschied zu den elastischen Lösungen selbst). Für größere α ist sie nur anzuwenden, wenn man berücksichtigt, daß mit abfallendem b/a der unrelaxierte Schermodul um einige Prozent abfällt, während $\Delta'_\mu/2$ bis um den Faktor 2 ansteigen kann.

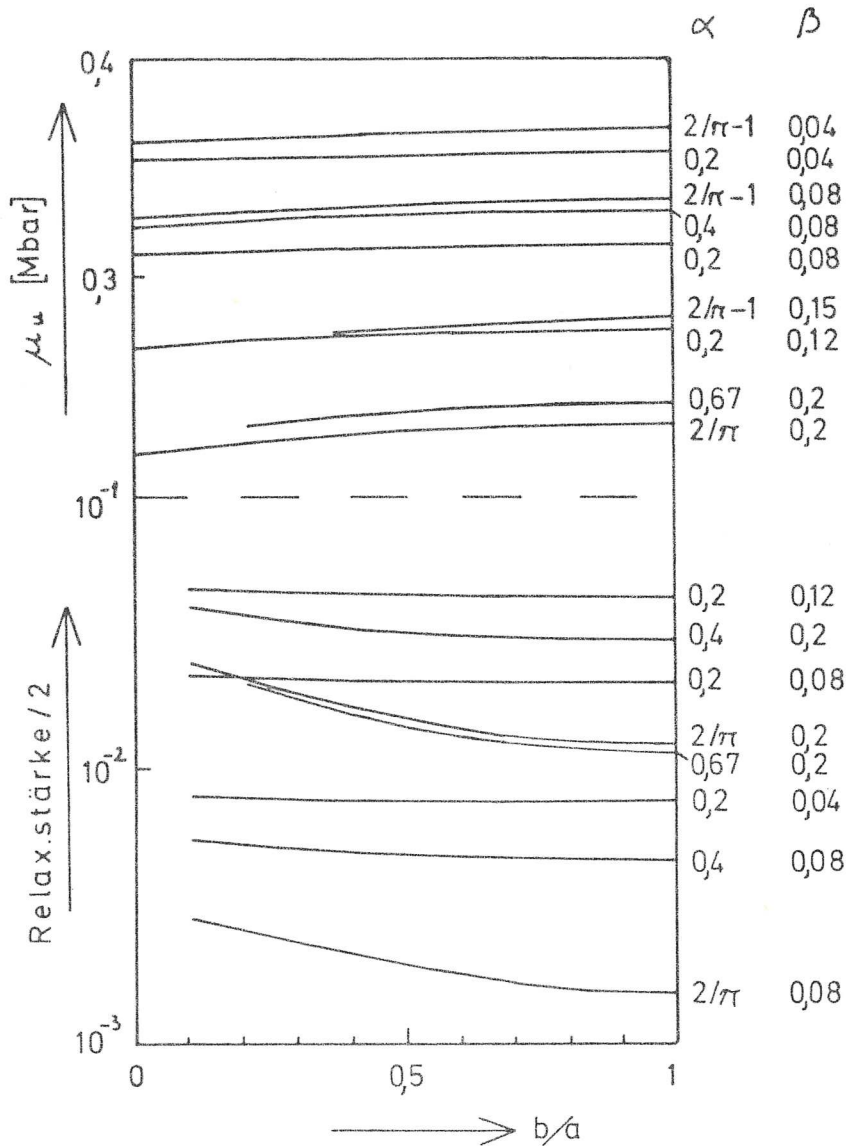


Abb. 41: Unrelaxierter Schermodul (oben) und halbe Relaxationsstärke (unten) für ellipsoidförmige Inklusionen mit drei ungleichen Halbachsen $a \geq b \geq c$ in Abhängigkeit von b/a für verschiedene Querverhältnisse $\alpha = c/a'$ und Schmelzanteil β .

Zusammenfassung von Kapitel 3.3.

In Kap. 3.3, werden die elastischen Moduli und Relaxationsstärken eines Mediums mit ellipsoidförmigen, flüssigkeitsgefüllten Inklusionen behandelt. Zunächst wird für beliebige Inklusionen das Reziproktheorem besprochen, mit dem sich in Anlehnung an Mavko (1980) Bestimmungsgleichungen für den trockenen K-Modul und den un/re-

laxierten Schermodul aufstellen lassen (Glg. 3.3.6; 3.3.10; 3.3.12). Das SCS läßt sich dann auf übersichtliche Weise einbeziehen. Für den gesättigten K-Modul wird, im Unterschied zu Mavko (1980) ebenfalls mit Hilfe des Reziprokttheorems, eine allgemeine Bestimmungsformel (Glg. 3.3.19) gefunden, die im Prinzip eine selbst-konsistente Form der Gassmannrelation darstellt. Die verschiedenen Ansätze zur Bestimmung des gesättigten K-Moduls werden miteinander verglichen, es ergeben sich Unterschiede im effektiven K-Modul kleiner als 1.5% bzgl. K_0 .

In den obigen Bestimmungsgleichungen treten die Inklusionswandverschiebungen bei äußerer Belastung auf. Zur Bestimmung dieser Größen für ellipsoidförmige Inklusionen wird die Theorie von Eshelby (1957) herangezogen und beschrieben. Unter Berücksichtigung dieser Theorie wird zur Lösung obiger Bestimmungsgleichungen ein Computerprogramm geschrieben, das für statistisch orientierte, ellipsoidförmige Inklusionen mit den Halbachsen $a \gg b \gg c$ die selbst-konsistenten unrelaxierten und relaxierten Moduli sowie die Relaxationsstärken berechnen kann. Dieses Modell stellt eine Erweiterung der Ergebnisse von Wu (1966) dar, da es 1) drei ungleiche Halbachsen berücksichtigen kann, und 2) Relaxation mit einschließt. Es kann ebenso als Erweiterung des Filmmodells von O'Connell und Budiansky (1977) angesehen werden, da endliche Filmdicken bis hin zu kugelförmigen Inklusionen einbezogen werden können (allerdings ohne explizite Berücksichtigung der Frequenzabhängigkeit).

Zunächst werden die effektiven Moduli für sphäroidförmige Inklusionen berechnet (Abb. 32). Es stellt sich heraus, daß das Filmmodell von O'Connell und Budiansky (1977) für Querverhältnisse ≥ 0.03 nicht mehr anwendbar ist. Weiter zeigt sich, daß Schmelzinklusionen mit Querverhältnissen zwischen 0.2 und 1 keine sehr stark voneinander abweichenden Moduli mehr hervorrufen.

Es wird die Darstellung der Moduli in Form von Isolinien in einem $\alpha - \beta$ -Diagramm eingeführt (Abb. 33).

Aus der Darstellung der Relaxationsstärken ergibt sich, daß Δ mit wachsendem α beträchtlich abnimmt (Abb. 34). Es wird eine Begründung dafür gegeben, daß selbst bei kugelförmigen Inklusionen mit Relaxation zu rechnen ist, obwohl die Flüssigkeitsinnendrucke

nicht mehr von den Inklusionsorientierungen abhängen. Die Relaxationsstärken werden schließlich mit denen des Mavkomodells verglichen.

Als eine sehr nützliche Darstellungsart erweist sich die Relaxationsstärke Δ in Abhängigkeit vom unrelaxierten Schermodul (Abb. 36). Es wird ersichtlich, daß für Filme Δ eine eindeutige Funktion von μ_u ist, während für größere Querverhältnisse $\Delta = f(\mu, \alpha)$ gilt. Bei Filmen kann also ein Wertepaar (Δ, μ_u) durch unterschiedliche α und β hervorgerufen werden, während bei größerem α jedem (Δ, μ_u) -Wertepaar eineindeutig ein (α, β) -Paar zuzuordnen ist. Es ergibt sich weiter, daß bei konstantem Modulabfall die Relaxationsstärke mit wachsender Schmelzkonzentration abnimmt (da das Querverhältnis dann zunehmen muß).

Das Kanalmodell von Mavko (1980) wird ebenfalls in der Darstellung $\Delta = f(\mu_u)$ gezeigt.

Der Einfluß des K-Moduls der Flüssigkeit auf die Ergebnisse wird diskutiert, er führt zu keinen signifikanten Einschränkungen.

Prolate ($a > b = c$) Ellipsoide werden behandelt, ihr Einfluß auf die Moduli ist vergleichbar mit oblaten Sphäroiden mit einem α zwischen 0.3 und 1.

Schließlich werden die effektiven Moduli und Relaxationsstärken für Ellipsoide mit $a \neq b \neq c$ berechnet. Nach O'Connell und Budiansky (1974) lassen sich ellipsenförmige Filme mit $a \neq b$ auf kreisförmige mit dem Radius a' zurückführen durch eine einfache Bedingung (Glg 3.3.1). Diese Bedingung wird für endliche Inklusionsdicken bis zu Querverhältnissen von 0.2 verifiziert, für größere α ist sie anzuwenden, wenn man eine leichte Abnahme der Moduli (um einige Prozent) und eine leichte Zunahme der Relaxationsstärken (bis um den Faktor 2) mit abnehmendem b/a -Verhältnis berücksichtigt.

3.4. Berücksichtigung von nur teilweise verbundenen Inklusionen

Die im letzten Kapitel dargestellten Ergebnisse über die Relaxationsstärken beruhen auf der Annahme, die Inklusionen stünden miteinander in Verbindung. Dies wurde durch die Annahme eines vollständigen Druckausgleichs bei der Relaxation durch Strömung impliziert. Wie in Kap. 2 diskutiert wurde, ist es jedoch nicht sicher, ob diese Bedingung immer erfüllt ist. Es wird daher im folgenden eine einfache Bedingung für die kritische Schmelzkonzentration β_c aufgestellt, ab der mit vollständiger Benetzung der inneren Oberfläche eines polykristallinen Gesteins mit Schmelze zu rechnen ist. Weiterhin wird ein einfaches statistisches Modell aufgestellt, das für Schmelzkonzentrationen kleiner β_c Abschätzungen über den Grad der Verbundenheit ermöglicht.

Es sei nun ein Gestein, zusammengesetzt aus Körnern mit ebenen Grenzflächen, angenommen. Hat das i -te Korn das Volumen V_i und n_i Flächen mit den Flächeninhalten F_{ij} , $j=1, \dots, n_i$, so liegt eine vollständige Benetzung vor, wenn jede Fläche von einer filmförmigen Schmelzinklusion der gleichen Fläche F_{ij} eingenommen ist. Mit c_{ij} als halber Dicke des j -ten Films am i -ten Korn sei ein zugehöriges Querverhältnis α_{ij} definiert:

$$\alpha_{ij} := \frac{c_{ij}}{\sqrt{F_{ij}/\pi}} \quad (3.4.1)$$

Mit dem Volumen des j -ten Films am i -ten Korn

$$v_{ij} = F_{ij} \cdot 2 \cdot c_{ij} = F_{ij} \cdot 2 \cdot \alpha_{ij} \sqrt{F_{ij}/\pi} \quad (3.4.2)$$

ergibt sich für die hier als kritisch (weil vollständig benetzt) bezeichnete Schmelzkonzentration:

$$\beta_c = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij}/2}{\sum_{i=1}^N V_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} F_{ij}^{\frac{3}{2}} \alpha_{ij} / \sqrt{\pi}}{\sum_{i=1}^N V_i} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^N \frac{\sum_{j=1}^{n_i} F_{ij}^{\frac{3}{2}} \alpha_{ij}}{V_i} w_i \quad (3.4.3)$$

mit der Wichtung $w_i = V_i / \sum_{k=1}^N V_k$, $N =$ Gesamtzahl der Körner. Es sei nun angenommen, daß die Varianz der Flächen F_{ij} und der Volumen V_i genügend klein sei, so daß die Verteilung der α_{ij} nicht mit F_{ij} und V_i korreliert ist. Die α_{ij} können dann als arithmetischer Mittelwert $\alpha = \bar{\alpha}_{ij}$ vor die Summe gezogen werden. Nimmt man eine entsprechende Unabhängigkeit auch zwischen w_i und dem die Kornform beschreibenden Term $\frac{\sum_{j=1}^{n_i} F_{ij}^{\frac{3}{2}}}{V_i} =: A_i$ an, so folgt für β_c :

$$\beta_c = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi'}} \sum_{i=1}^N \frac{\sum_{j=1}^{n_i} F_{ij}^{\frac{3}{2}}}{V_i} w_i = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi'}} \left(\frac{\sum_{j=1}^{n_i} F_{ij}^{\frac{3}{2}}}{V_i} \right) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi'}} \bar{A}_i \quad (3.4.4)$$

wobei der Strich für das arithmetische Mittel über alle Körner steht. Nimmt man für die Körner einfache Geometrien an, so läßt sich A_i abschätzen. A_i liegt für mehr kugelförmige Polyeder wie z.B. ein abgestumpftes Oktaeder bei 3.5 und steigt für spitzkantige Körper wie z.B. Oktaeder ($A_i \approx 5$), Würfel ($A_i \approx 6$) oder Tetraeder ($A_i \approx 10$) an. β_c läßt sich also abschätzen zu

$$2\alpha < \beta_c < 5\alpha \quad (3.4.5)$$

Liegt für die Querverhältnisse eine mit der Größe der Filme unkorrelierte Verteilung $V_\alpha(\alpha)$ vor, so ist für das α in (3.4.5)

$$\alpha' = \int_0^1 V_\alpha(\alpha) \cdot \alpha \, d\alpha \quad (3.2.12)$$

zu setzen.

Die in (3.4.5) abgeschätzte Schmelzkonzentration, bei der ein Körper seinen inneren Zusammenhalt verlieren würde, läßt sich mit dem Schermodulabfall des Filmmodells (Gln. 3.2.7 - 3.2.10; Abb. 18, Abb. 32) vergleichen. Der unrelaxierte Schermodul fällt auf Null bei $\beta = 5.9 \alpha$ (für kleine α), während μ_r bei $\beta = 2.4 \alpha$ gleich Null wird. Diese gute Übereinstimmung mit (3.4.5) scheint die Gültigkeit des selbst-konsistenten Konzepts bis hin zum vollständigen Modulzusammenbruch zu bestätigen.

Es soll nun für ellipsoidförmige Inklusionen und dünne Filme die Möglichkeit eines herabgesetzten Verbundenheitsgrades berücksichtigt werden. Für die Frage nach der Relaxation oder Absorption durch Flüssigkeitsströmung ist es von Bedeutung, ob eine Inklus-

sion isoliert ist, oder ob ein Druckausgleich mit Nachbarinklusionen möglich ist. Dies legt die Definition des Verbundenheitsgrades V_b als der mittleren Wahrscheinlichkeit einer Inklusion, mit mindestens einer Nachbarinklusion direkt in Verbindung zu stehen, nahe. Für die Leitfähigkeit ist es dagegen wichtig, ob durch das Schmelzsystem eine zusammenhängende Verbindung führt und wie groß im Mittel der Umweg ist, den der Strom nehmen muß. Um dieses Problem auf die Theorie von Widerstandsnetzen übertragen zu können (Kap. 4.2), benötigt man die mittlere Anzahl von Nachbarinklusionen \bar{n} , zu denen eine direkte Verbindung besteht.

Um nun einen Zusammenhang zwischen der Schmelzkonzentration, dem Querverhältnis und V_b bzw. \bar{n} zu finden, wird ein Modell für statistisch verteilte und orientierte ellipsoid- oder filmförmige Inklusionen aufgestellt. Die Ellipsoide seien der Einfachheit halber gleich groß und mit gleich großen Halbachsen a angenommen. Eine typische Konfiguration zweier solcher Ellipsoide ist in Abb. 42 dargestellt. Es sei V_g das gesamte Volumen, $V_p = \frac{4}{3} \pi a^3 \alpha$ das Volumen einer einzelnen Inklusion, N die Anzahl aller Inklusionen, v das mittlere, eine Inklusion umgebende, ungestörte Volumen und $\beta' = V_p/v$. β' berücksichtigt im Unterschied zu β keine Überschneidungen von Inklusionen, sondern zählt das Schnittvolumen doppelt. Die Wahrscheinlichkeit, in dem eine Inklusion umgebenden Volumen V genau i Mittelpunkte von Nachbarinklusionen zu finden, kann geschrieben werden (mit $V_g = v \cdot N$)

$$W = \left(\frac{V_g - V}{V_g} \right)^{N-i} \left(\frac{V}{V_g} \right)^i \binom{N}{i} = \left(1 + \frac{-V/v}{N} \right)^N \left(1 - \frac{V/v}{N} \right)^{-i} \frac{V^i}{v^i N^i} \binom{N}{i} \quad (3.4.6)$$

Mit $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^i} \binom{N}{i} = \frac{1}{i!}$; $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{V/v}{N} \right)^{-i} = 1$; $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-V/v}{N} \right)^N = e^{-V/v}$

ergibt sich für $N \rightarrow \infty$

$$W = e^{-V/v} \frac{V^i}{v^i} \frac{1}{i!} \quad (3.4.7)$$

(3.4.7) stellt eine Poissonverteilung dar. Die Wahrscheinlichkeit, im Zusatzvolumen dV den Mittelpunkt der $(i+1)$ -ten Nachbarinklusion zu finden, beträgt

$$\tilde{W} = e^{-V/v} \frac{V^i}{v^i} \frac{1}{i!} \frac{dV}{v} \quad (3.4.8)$$

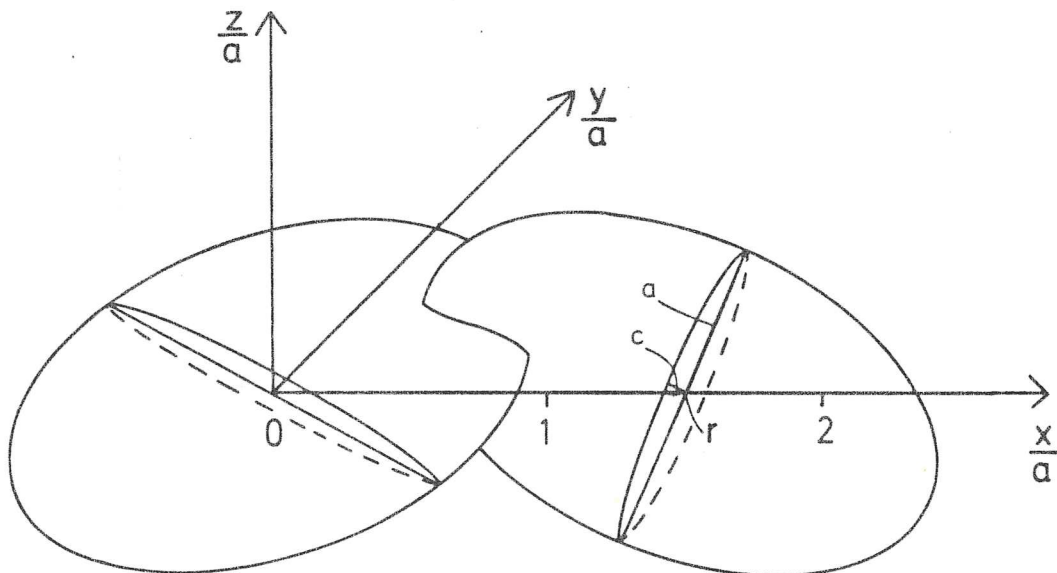


Abb. 42: Darstellung zweier, sich überschneidender Ellipsoide im Abstand r voneinander.

Ersetzt man v durch $\frac{4}{3} \pi a^3 \frac{\alpha}{\beta^i}$ (siehe oben) und V durch $\frac{4}{3} \pi (r \cdot a)^3$, wobei also r eine auf a normierte Entfernung von der gerade betrachteten Inklusion darstellt, so folgt aus (3.4.8) für die Wahrscheinlichkeitsdichte W_i , im Intervall $[r, r+dr]$ den Mittelpunkt der i -ten Nachbarinklusion zu finden

$$W_i dr = \exp\left(-\frac{r^3 \beta^i}{\alpha}\right) \frac{1}{r} \left(\frac{r^3 \beta^i}{\alpha}\right)^i \frac{3}{(i-1)!} dr \quad (3.4.9)$$

W_i ist in Abb. 43 für verschiedene i dargestellt.

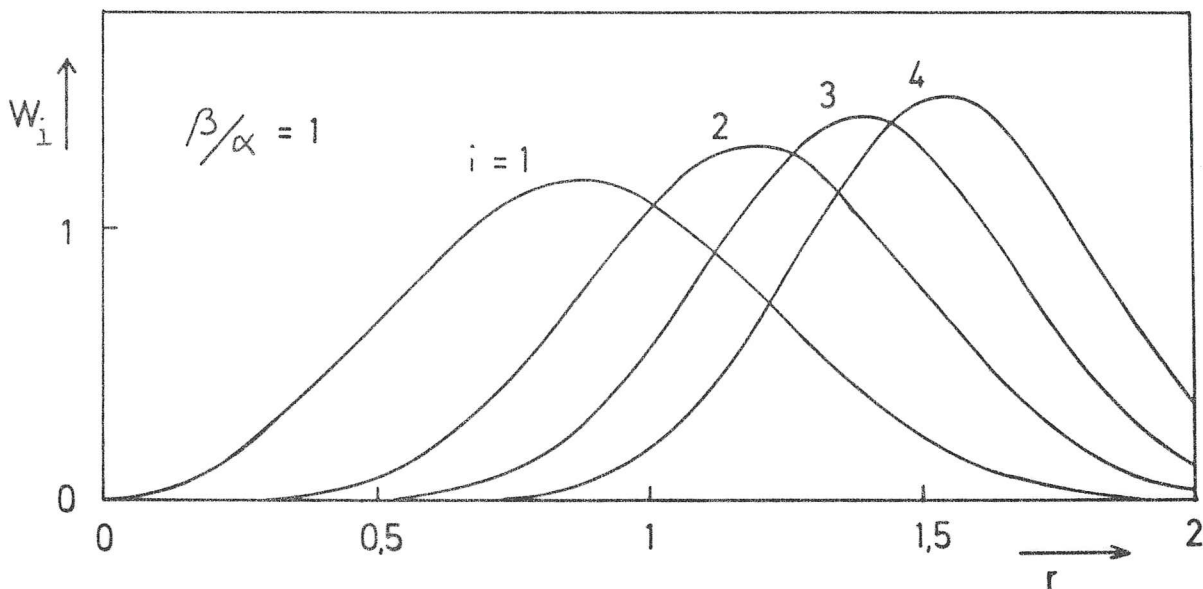


Abb. 43: Wahrscheinlichkeit, im Intervall $[r, r+dr]$ die i -te Nachbarinklusion zu finden für den Fall $\beta/\alpha = 1$.

Die Schmelzkonzentration β' ist noch um die mehrfach gezählten Schnittvolumen zu korrigieren. Hierzu ist vom anfänglichen Volumen einer Inklusion die Hälfte der makroskopischen Schmelzkonzentration zu subtrahieren, so daß sich als statistische Korrekturformel ergibt:

$$\beta = \frac{\beta'}{1 + 0.5 \beta'} \quad (3.4.10)$$

Man benötigt nun noch die Wahrscheinlichkeit, mit der sich zwei in der Entfernung r voneinander (Mittelpunkt zu Mittelpunkt) befindlicher Inklusionen überschneiden oder berühren. Eine analytische Herleitung dieser Wahrscheinlichkeit war selbst für rotationssymmetrische Inklusionen nicht möglich. Es wurde daher ein Computerprogramm geschrieben, das über sämtliche möglichen Orientierungen zweier solcher Inklusionen integriert und jeweils abfragt, ob eine Überschneidung vorliegt oder nicht. Selbst diese numerische Berechnung konnte mit vernünftigen Rechenzeiten am MINC-Rechner des Instituts nur für rotationssymmetrische Ellipsoide durchgeführt werden. Die sich hieraus ergebende Verbundenheitswahrscheinlichkeit $V_r(r)$ ist in Abb. 44 dargestellt. Für dünne Filme ($\alpha \leq 0.05$) fällt V_r für Abstände größer als die Halbachse a , d.h. $r > 1$, schnell ab, dickere Inklusionen haben auch für größere Abstände noch eine hohe Überlappungswahrschein-

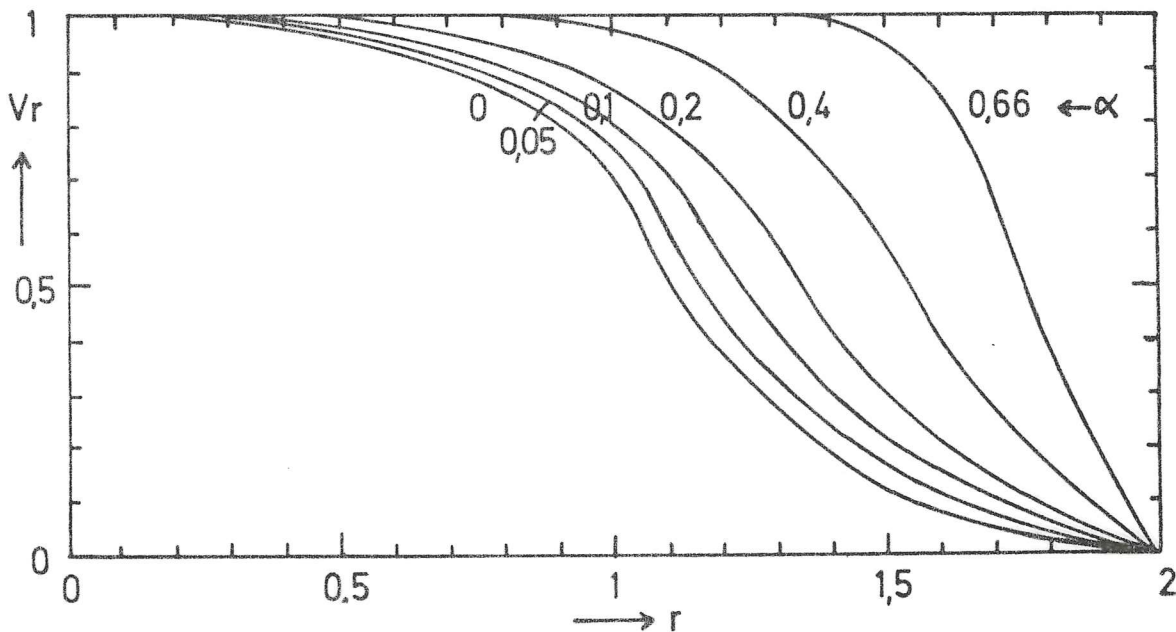


Abb. 44: Verbundenheitswahrscheinlichkeit zweier im Abstand r voneinander befindlicher Inklusionen. r ist auf die große Halbachse a normiert.

lichkeit . Für kleine α (< 0.1) kann man die endliche Dicke der Inklusionen zur Berechnung von $V_r(r)$ vernachlässigen. Die von β' und r abhängige Wahrscheinlichkeit, daß eine Inklusion sich mit dem i -ten Nachbarn, der sich im Entfernungsintervall $[r, r+dr]$ befindet, schneidet, ist durch das Produkt von (3.4.9) mit $V_r(r)$ gegeben. Durch Integration über alle möglichen Entfernungen, also von 0 bis 2, erhält man die Gesamtwahrscheinlichkeit einer Überschneidung mit der i -ten Nachbarinklusion:

$$V'_i(\beta') = \int_0^2 V_r(r) W_i(r, \beta') dr \quad (3.4.11)$$

Die Wahrscheinlichkeit schließlich, daß die betrachtete Inklusion sich mit irgendeinem Nachbarn überschneidet, der mittlere Verbundenheitsgrad also, lautet dann

$$V_b = 1 - (1-V'_1(\beta')) \cdot (1-V'_2(\beta')) \dots (1-V'_k(\beta')) \quad (3.4.12)$$

wobei k die letzte Nachbarinklusion ist, die in der Reichweite der nullten liegt. Für $i > k$ ist dann $r > 2$ oder der Abstand $> 2a$. $V_b(\beta')$ ist für verschiedene α in Abb. 45 dargestellt. Für $\beta' < 20\%$ ist die Abweichung von β gemäß (3.4.10) kleiner als 2% (bezogen auf β), man kann also $\beta = \beta'$ setzen. Die Abb. 45 zeigt, daß selbst für kugelförmige Inklusionen schon bei 7% Schmelze die Hälfte der Inklusionen mit mindestens einem ihrer Nachbarn in Verbindung steht. Bei kleinem α (z.B. ≤ 0.01) wird ein 90%iger Verbundenheitsgrad schon bei 1% Schmelze erreicht. Hierbei steigt k auf über 20. Aber selbst bei Berücksichtigung von nur wenigen Nachbarn wird ein vergleichbarer Verbundenheitsgrad erreicht.

Stellt man V_b in Abhängigkeit von β/α dar, so ergibt sich für $\alpha < 0.1$ eine Grenzkurve. Sie hat für kleine β/α die Form $V_b(\beta/\alpha) \approx 1.7 \beta/\alpha$, steigt für $\beta = 0.3\alpha$ auf $V_b = 50\%$ und erreicht $V_b = 90\%$ bei $\beta = \alpha$.

Da β/α ein Maß für die Rißhäufigkeitsdichte

$$\xi = \frac{3}{4\pi} \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.4.13)$$

nach O'Connell und Budiansky (1977) ist, läßt sich V_b für Filme auch direkt in Abhängigkeit von ξ darstellen (Abb. 45 unten).

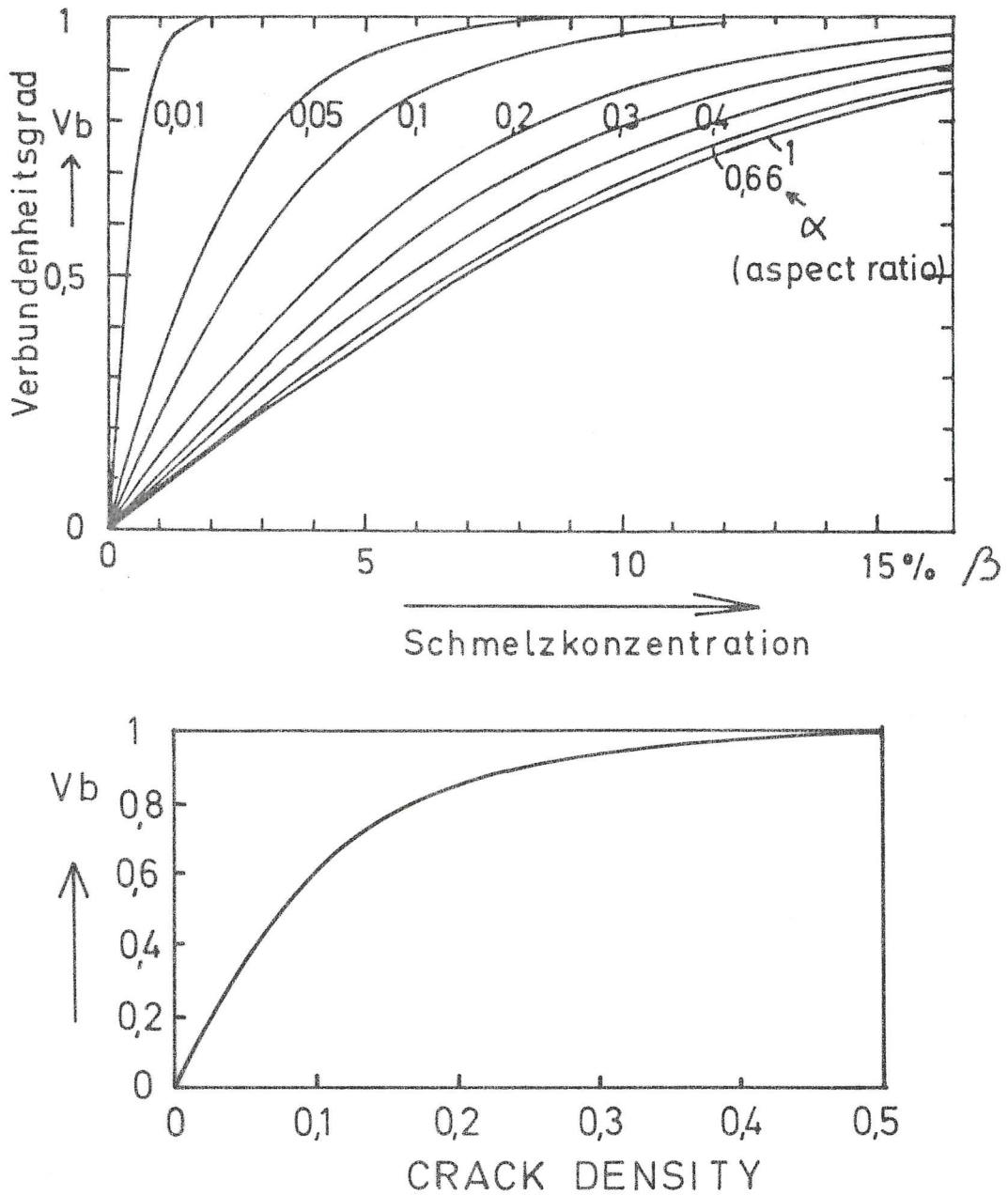


Abb. 45: Oben: Verbundenheitsgrad in Abhängigkeit von der Schmelzkonzentration für verschiedene Querverhältnisse. Unten: Verbundenheitsgrad in Abhängigkeit von der Rißdichte $\epsilon \sim \beta / \alpha$ für Filme.

Vergleicht man die von O'Connell und Budiansky berechneten Werte für ϵ für den Fall vollständiger Grenzflächenbenetzung bei verschiedenen Geometrien (Tab. 1), so liegen die zugehörigen, aus Abb. 45 (unten) folgenden Vb-Werte zwischen 93% und 99%. Hierdurch dürfte die Gültigkeit des statistischen Verbundenheitsmodells bei hohen Rißdichten weitgehend bestätigt sein.

Eine andere Darstellung von Vb ist in Abb. 47 gewählt. Mit der Schmelzkonzentration als Abszisse und dem Querverhältnis als Ordinate sind Kurven gleichen Verbundenheitsgrades gegeben. Die

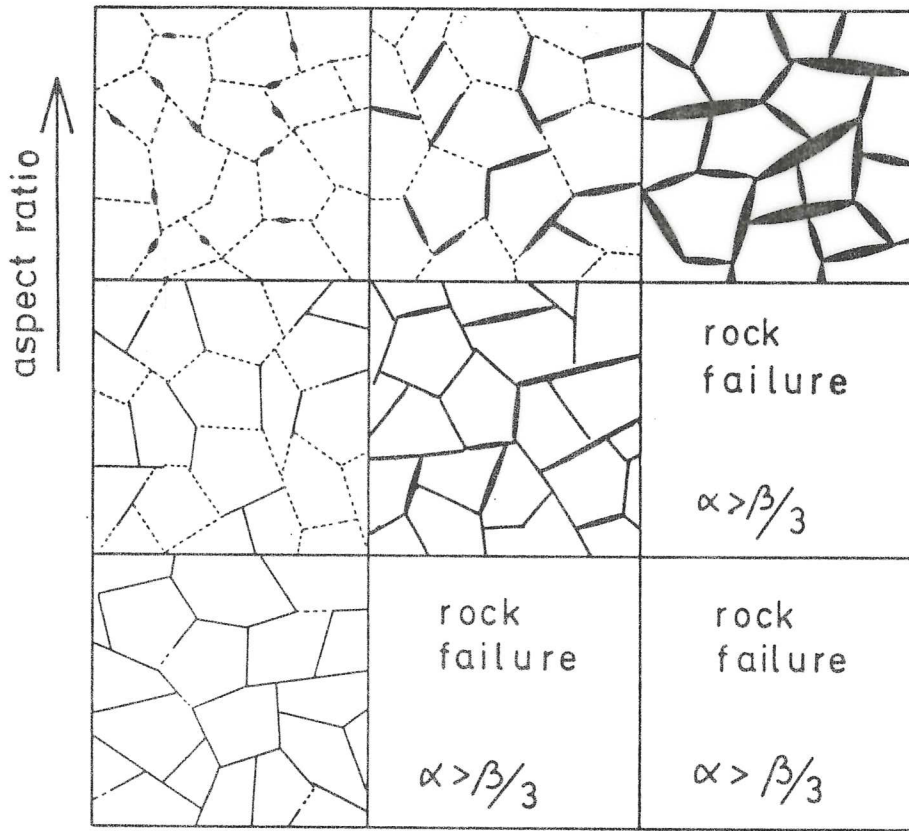


Abb. 46: Schematische Darstellung des Verbundenheitsgrades in Abhängigkeit vom Querverhältnis und von der Schmelzkonzentration.

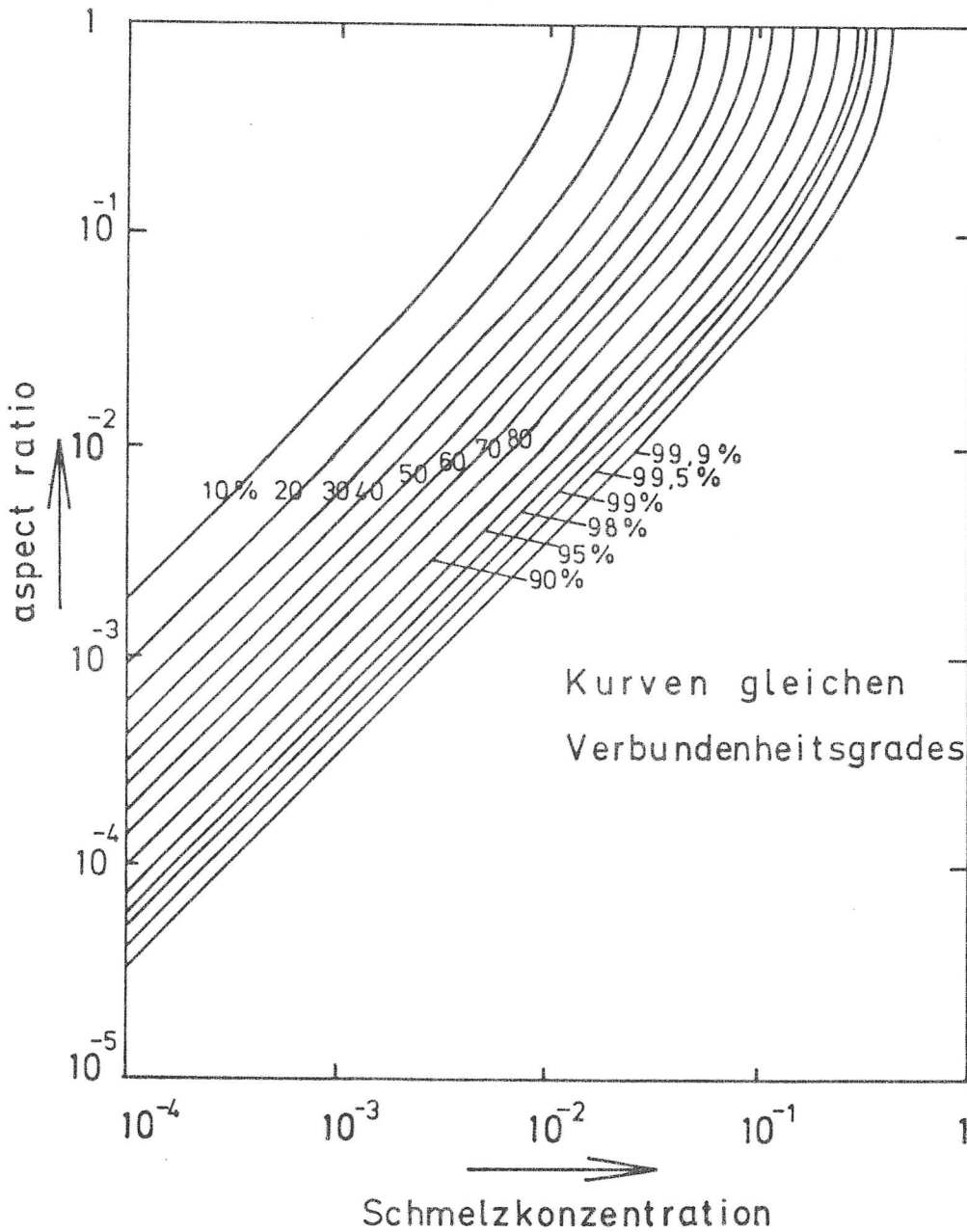


Abb. 47: Linien gleichen Verbundenheitsgrades Vb.

obere Abbildung 46 soll zur qualitativen Verdeutlichung dienen. Wie man aus den Abbildungen erkennt, wird die $\alpha - \beta$ -Ebene in drei Bereiche unterteilt: bei kleinem β und großem α sind die Inklusionen isoliert, im Bereich $0.1 < \beta/\alpha < 1$ nimmt der Verbundheitsgrad zu, bis für genügend große β (oder kleine α) das Schmelzsystem 100%-ig verbunden ist. Der Übergangsbereich von $V_b=10\%$ bis 90% umfaßt immerhin eine Dekade in β und könnte damit für reale Schmelzsysteme von Wichtigkeit sein. Die eingezeichnete Kurve mit $V_b=99.5\%$ läßt sich für $\beta < 0.1$ durch $\beta=2.4\alpha$ beschreiben. Dies war gerade der Wert, bei dem der relaxierte Schermodul verschwindet. Für $V_b \geq 99.9\%$ oder $\beta \geq 3\alpha$ (vgl. 3.4.5) ist also mit dem Verlust der Scherfestigkeit des Materials zu rechnen.

Vergleicht man Abb. 47 mit Abb. 33, so stellt man einen weitgehend parallelen Verlauf der V_b -Kurven mit den Linien gleichen unrelaxierten Schermoduls fest. Es ist offensichtlich nicht möglich, bei gegebenem Modulabfall μ_u durch Variation von α den Verbundheitsgrad zu verändern. Für Filme ist dieses Verhalten schon aus Abb. 23 und Abb.45 (unten) erkennbar, nach denen jeweils ein eindeutiger Zusammenhang zwischen μ_u und ξ bzw. V_b und ξ (ξ war die Rißhäufigkeitsdichte (3.4.13)) gegeben ist. Zwischen μ_u und V_b besteht daher offenbar eine eindeutige Beziehung $\mu_u = f(V_b)$.

Zur Bestimmung der mittleren Anzahl von Nachbarinklusionen, zu denen eine direkte Verbindung besteht, sind einfach die Wahrscheinlichkeiten, mit denen eine Überschneidung mit dem i -ten Nachbarn vorliegt, (3.4.11), über alle i zu summieren:

$$\bar{n}(\beta) = \sum_{i=1}^k V_i'(\beta) \quad (3.4.14)$$

Dabei ist k das gleiche wie in (3.4.12). Die numerische Lösung von (3.4.14) ist in Abb. 48 in Form von Linien gleichen \bar{n} 's (0.5 bis 4) in der $\alpha - \beta$ -Ebene dargestellt. Durch Vergleich mit Abb. 47 erkennt man den engen Zusammenhang zwischen V_b und \bar{n} . Für $\bar{n} > 4$ dürfte mit dem Verlust der Scherfestigkeit zu rechnen sein, was durch die Gerade $\alpha = \beta/3$ angedeutet wird, die näherungsweise für die kritische Schmelzkonzentration β_c angenommen wurde (vgl.3.4.5). Für \bar{n} wurde durch lineare Regression eine Näherungsformel bestimmt, die die numerisch berechneten \bar{n} bis auf 2% reproduziert.

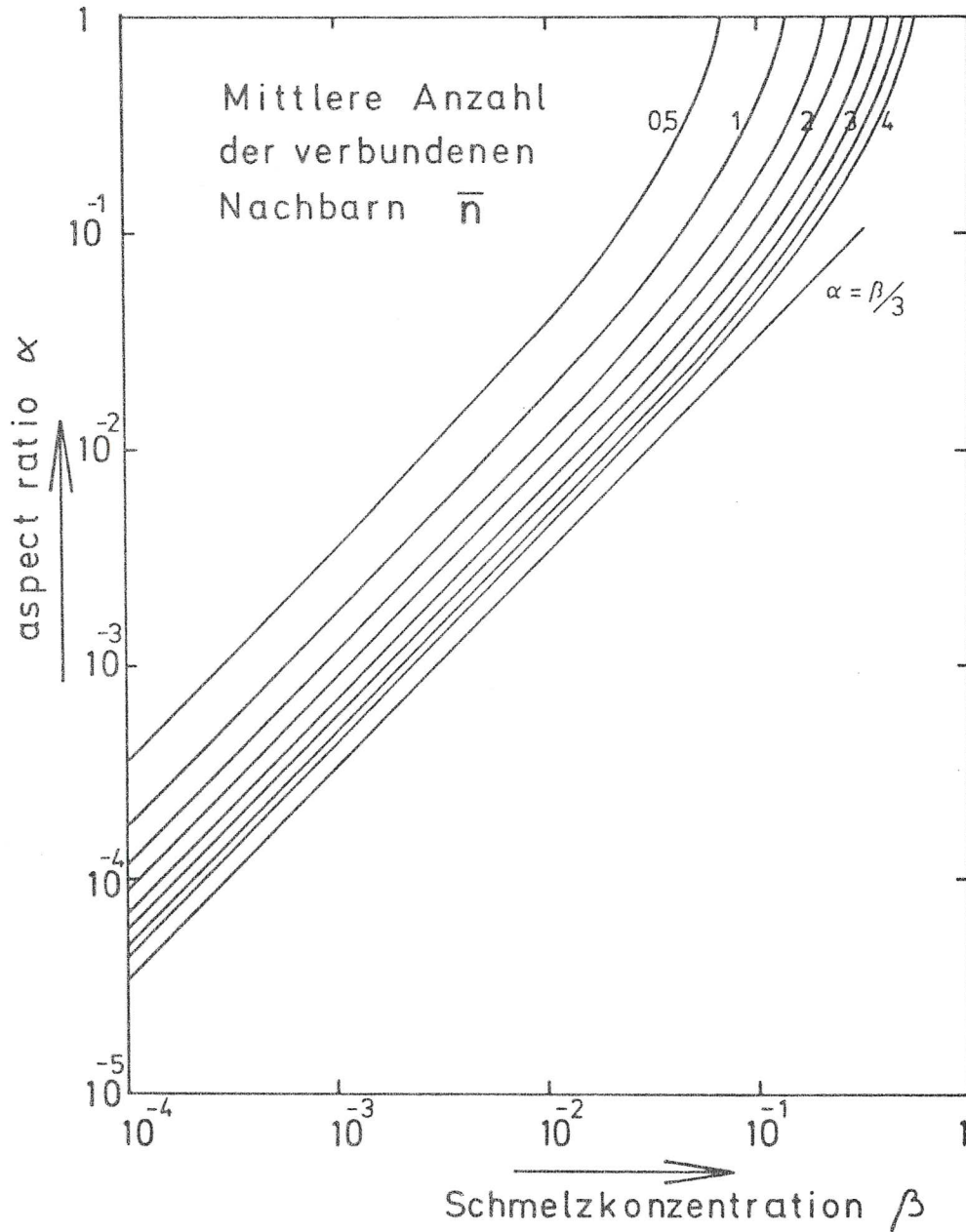


Abb. 48: Linien gleichen \bar{n} 's für statistisch verteilte und orientierte geometrisch gleiche Ellipsoide.

Demnach ist \bar{n} gegeben durch

$$\bar{n}(\alpha, \beta) \cong \left(c_1 + \frac{c_2}{\alpha} \right) \beta \quad (3.4.15)$$

mit $c_1 = 5.65$, $c_2 = 1.72$. Die mittlere Anzahl von Verbindungen mit Nachbarinklusionen steigt also linear mit der Schmelzkonzentration an.

Die einfache Form von (3.4.15) legt die Bestimmung einer ähnlich einfachen Formel für den Verbundenheitsgrad V_b nahe. Die Herleitung dieser Approximationsformel erfolgt in Anhang B, in dem auch

die Werte für $r_{10\%}$ gegeben werden. Man erhält demnach V_b mit einer Ungenauigkeit kleiner als 5% durch

$$V_b \approx 1 - \left(1 - \frac{(c_1 + \frac{c_2}{\alpha}) \beta}{\frac{1}{3} + r_{10\%}^3 \cdot \frac{\beta}{\alpha}} \right)^{\left(\frac{1}{3} + r_{10\%}^3 \frac{\beta}{\alpha} \right)} \quad (3.4.16)$$

In den obigen Überlegungen und Ergebnissen sind Verteilungen von Querverhältnissen nicht berücksichtigt. Es lassen sich aber mit einer Verteilungsfunktion $V_\alpha(\alpha) d\alpha$ für kleine α obige Ergebnisse anwenden, wenn jeweils für α ein repräsentatives α' mit

$$\alpha' = \int_0^\infty V_\alpha(\alpha) \alpha d\alpha \quad (3.2.12)$$

gesetzt wird.

Zusammenfassung von Kapitel 3.4.

In Kap. 3.4. wird für ein Schmelzsystem aus film- oder ellipsoidförmigen Inklusionen der Verbundenheitsgrad untersucht.

Zunächst wird für ein polykristallines Gestein eine Bedingung für eine kritische Schmelzfilmkonzentration β_c aufgestellt, ab der die gesamte innere Oberfläche benetzt sein muß (3.4.5). Mit diesem β_c geht der Schermodul des Filmmodells gegen Null. Das selbst-konsistente Filmmodell scheint demnach bis zum völligen Schermodulzusammenbruch gültig zu sein.

Es wird dann die Möglichkeit eines herabgesetzten Verbundenheitsgrades V_b in Betracht gezogen. Dieses V_b wird definiert, im Sinne von Relaxation durch Flüssigkeitsströmung zwischen Inklusionen, als die mittlere Wahrscheinlichkeit einer Inklusion, mit mindestens einer Nachbarinklusion direkt in Verbindung zu stehen. V_b wird für statistisch verteilte und orientierte, sphäroid- bis filmförmige Inklusionen in Abhängigkeit vom Querverhältnis und von der Schmelzkonzentration berechnet und dargestellt (Abb. 45, 47). Ein hoher Verbundenheitsgrad wird für Filme bei weniger als 1%, für kompakte Sphäroide bei mehreren Prozent Schmelze erreicht. Es wird festgestellt, daß zwischen μ_u und V_b eine weitgehende Abhängigkeit der Form $\mu_u = f(V_b)$ besteht, nach der bei geringen Mo-

dulabfällen, bei Annahme film- oder sphäroidförmiger Inklusionen, immer mit einem herabgesetzten Verbundenheitsgrad gerechnet werden muß.

Für Leitfähigkeitsprobleme wird die mittlere Anzahl von Nachbarn, zu denen eine Inklusion Verbindung hat, benötigt. Für dieses \bar{n} wird eine einfache Näherungsformel mit der Proportionalität $\bar{n} \sim \beta$ gefunden (3.4.15). Es wird schließlich auch noch für V_b eine Näherungsformel angegeben (3.4.16).

3.5. Zusammenstellung der Schmelzmodelle

3.5.1. Aufstellung eines umfassenden Gleichungssatzes

Nachdem in Kap. 3.3. und 3.4. einerseits elastische Schmelzmodelle beschrieben bzw. entwickelt worden sind und andererseits ein möglicher herabgesetzter Verbundenheitsgrad in Betracht gezogen wurde, sollen in diesem Abschnitt die Gleichungen für die einzelnen Modelle unter möglicher Berücksichtigung des Verbundenheitsgrades zu einem umfassenden Gleichungssystem zusammengefaßt werden. Dieser unten angegebene Gleichungssatz schließt dann die einzelnen Schmelzmodelle - Kanal-, Film- oder Sphäroidinkclusionen - als Spezialfälle mit ein, kann allgemein oder unter Annahme des für Filme und Sphäroide hergeleiteten statistischen Modells einen herabgesetzten Verbundenheitsgrad berücksichtigen und ermöglicht schließlich die Überlagerung verschiedener Schmelzgeometrien.

Die allgemeinen selbst-konsistenten Gleichungen für die Moduli, die noch keine spezielle Geometrie berücksichtigen, wurden in Kap. 3.3. aufgestellt. Es sind im einzelnen die Gleichungen (3.3.6), (3.3.10), (3.3.12), (3.3.19) bzw. (3.2.14). Will man gleichzeitig verschiedene Geometrien betrachten, so lassen sich die in den Gleichungen vorkommenden Summen über alle Inklusionen aufspalten in Teilsummen über jeweils geometrisch ähnliche Inklusionen. Die Bestimmung dieser Teilsummen kann dann durch Vergleich mit den jeweils für diese speziellen Geometrien gegebenen Gleichungen erfolgen: Gleichungen (3.2.13) - (3.2.20) liefern die Terme für Kanalinkclusionen, Glgn. (3.2.7) - (3.2.10) geben die Ausdrücke für Filme, die Formeln für sphäroidförmige Inklusionen ($a=b=c$) können dem Anhang von Wu (1966) entnommen werden. Die gesamte Schmelzkonzentration β läßt sich dadurch in die Anteile β_F für Filme, β_{Ka} für Kanäle und β_{El} für Ellipsoide unterteilen mit

$$\beta = \beta_F + \beta_{Ka} + \beta_{El} \quad (3.5.1)$$

Zur Berücksichtigung eines bestimmten Verbundenheitsgrades V_b werden die β_F , β_{Ka} , β_{El} jeweils in einen Anteil, bestehend aus isolierten Inklusionen, β_{Fi} , β_{Kai} , β_{Eli} und einen zusammenhängenden Anteil β_{Fv} , β_{Kav} , β_{Elv} unterteilt. Hierbei wird angenom-

men, daß schon die Verbindung zwischen zwei Inklusionen einen genügenden Druckausgleich bei äußerer Scherung ermöglicht, so daß sie als Teil des zusammenhängenden Schmelzsystems betrachtet werden können. Es gilt dann z.B. für ellipsoidförmige Inklusionen

$$\beta_{El} = (1 - v_b) \cdot \beta_{El_i} + v_b \cdot \beta_{El_v} \quad (3.5.2)$$

Zur Berechnung der unrelaxierten Moduli ist eine Unterscheidung zwischen isolierten und verbundenen Inklusionen nicht nötig. Die Bestimmung der relaxierten Moduli erfolgt analog dem im Anfang des Kap. 3.3. skizzierten Weg. Im Unterschied zur dortigen Annahme trockener Poren für μ_r werden jedoch die β_i -Poren als flüssigkeitsgefüllt und einem Innendruck ausgesetzt betrachtet. Die Terme für die β_i -Poren erhalten dadurch eine andere Form als die der β_v -Poren und sind durch die Lösungen für die unrelaxierten Moduli gegeben. Das mit der μ_r -Bestimmung gleichzeitig zu berechnende K' (siehe unten) ist wegen der Annahme teilweise trockener und teilweise gesättigter, isolierter Poren nur eine Hilfsgröße. K_r ergibt sich mit K' über eine Zwischenlösung, bei der die Moduli K_{iso} , μ_{iso} für $\beta = \beta_i$, also $\beta_v = 0$ bestimmt werden (über den unrelaxierten Formelsatz) und der β_v -Anteil anschließend mit Hilfe der Gassmannrelation berücksichtigt wird. Die Gassmannrelation ist hierbei erforderlich, da sie selbst bei unterschiedlichen Geometrien im β_v -Anteil einen konstanten Innendruck voraussetzt, während der dem Ansatz nach (3.3.19) zu Grunde liegende Innendruck von der Inklusionsgeometrie abhängt. Die Bestimmung von K_u und K_r erfolgt daher auf prinzipiell unterschiedliche Weise. Solange also die halbe Relaxationsstärke bzgl. K ($\Delta_K/2 = (K_u - K_r)/2K_r$) keine signifikante Größenordnung erreicht, sollte sie mit Vorsicht genommen werden.

Der gesamte Formelsatz lautet nun:

Unrelaxiert:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{K_u} &= \frac{1}{K_o} + \frac{\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_o}}{1 + \theta_F^{-1}(K_u, \mu_u, \nu_u) \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_u}\right)} \left(\beta_{Fi} + \beta_{Fv} \right) \\ &+ \frac{\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_o}}{1 + \theta_{Ka}^{-1}(K_u, \mu_u, \nu_u) \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_u}\right)} \left(\beta_{Ka_i} + \beta_{Ka_v} \right) + \\ &\vdots \end{aligned} \right.$$

$$+ \frac{\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_o}}{1 + \Theta_{El}^{-1}(K_u, \mu_u, \nu_u) \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_u}\right)} \left(\beta_{El_i} + \beta_{El_v} \right) \quad (3.5.3)$$

$$\frac{1}{\mu_u} = \frac{1}{\mu_o} + A_F(K_u, \mu_u, \nu_u, D(K_u, \mu_u)) (\beta_{Fi} + \beta_{Fv}) + A_{Ka}(K_u, \mu_u, \nu_u) \cdot (\beta_{Kai} + \beta_{Kav}) + A_{El}(K_u, \mu_u, \nu_u, K_f) (\beta_{El_i} + \beta_{El_v}) \quad (3.5.4)$$

$$\nu_u = \frac{3 K_u - 2 \mu_u}{6 K_u + 2 \mu_u} \quad (3.5.5)$$

Relaxiert:

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K_o} + \frac{\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_o}}{1 + \Theta_F^{-1}(K', \mu_r, \nu) \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K'}\right)} \beta_{Fi} + \Theta_F(K', \mu_r, \nu) \beta_{Fv} + \frac{\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_o}}{1 + \Theta_{Ka}^{-1}(K', \mu_r, \nu) \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K'}\right)} \beta_{Kai} + \Theta_{Ka}(K', \mu_r, \nu) \beta_{Kav} + \frac{\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_o}}{1 + \Theta_{El}^{-1}(K', \mu_r, \nu) \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K'}\right)} \beta_{El_i} + \Theta_{El}(K', \mu_r, \nu) \beta_{El_v} \quad (3.5.6)$$

$$\frac{1}{\mu_r} = \frac{1}{\mu_o} + A_F(K', \mu_r, \nu, D(K', \mu_r)) \beta_{Fi} + A_F(K', \mu_r, \nu, D=1) \beta_{Fv} + A_{Ka}(K', \mu_r, \nu) \beta_{Kai} + B_{Ka}(K', \mu_r, \nu) \beta_{Kav} + A_{El}(K', \mu_r, \nu, K_f) \beta_{El_i} + A_{El}(K', \mu_r, \nu, K_f=0) \beta_{El_v} \quad (3.5.7)$$

$$\nu = \frac{3 K' - 2 \mu_r}{6 K' + 2 \mu_r} \quad (3.5.8)$$

$$\frac{1}{K_{iso}} = \frac{1}{K_u} \quad \text{wobei} \quad \beta = \frac{\beta_i}{1 - \beta_v} \quad \text{gesetzt wird} \quad (3.5.9)$$

$$\frac{1}{\mu_{iso}} = \frac{1}{\mu_u} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad (3.5.10)$$

$$K_r = K_{iso} \frac{K' + F}{K_{iso} + F} \quad ; \quad F = \frac{K_f (K_{iso} - K')}{\beta_v (K_{iso} - K_f)} \quad (3.5.11)$$

Die in den einzelnen Gleichungen auftretenden Terme sind in Anhang C gegeben. Die geschweiften Klammern fassen jeweils die auf Grund des SCS simultan zu lösenden Gleichungen zusammen. (3.5.3) bis (3.5.5) ergeben die unrelaxierten Moduli, aus (3.5.6) bis (3.5.8) resultiert der relaxierte Schermodul. Der relaxierte K-Modul folgt für $\beta_i \neq 0$ aus (3.5.9) bis (3.5.11); ist $\beta_i = 0$, die Schmelze also vollständig zusammenhängend, so ist K' identisch mit dem K-Modul K_d für trockene Inklusionen und $K_{iso} = K_0$; K_r ergibt sich dann direkt mit $K' = K_d$ aus der Gassmannrelation (3.5.11).

Als Maß für die Absorption sind hier nochmals die halben Relaxationsstärken zusammengefaßt, die sich aus den Lösungen des obigen Gleichungssatzes direkt ergeben:

$$\frac{\Delta_\mu}{2} = \frac{\mu_u - \mu_r}{2 \mu_r} \quad \frac{\Delta_K}{2} = \frac{K_u - K_r}{2 K_r} \quad (3.5.12)$$

$$\frac{\Delta'_\mu}{2} = \frac{\mu_u - \mu_r}{2 \sqrt{\mu_u \mu_r}} \quad \frac{\Delta'_K}{2} = \frac{K_u - K_r}{2 \sqrt{K_u K_r}} \quad (3.5.13)$$

(3.5.13) gibt direkt das Q_{\max}^{-1} für den Fall, daß die Absorption durch einen einzelnen Debye-peak gegeben ist, (3.5.12) und (3.5.13) nähern sich jedoch für kleine Relaxationsstärken oder grosse Q an.

3.5.2. Berücksichtigung eines herabgesetzten Verbundenheitsgrades

3.5.2.1. Allgemeine Auswirkungen eines herabgesetzten Verbundenheitsgrades auf die Moduli und Relaxationsstärken

Betrachtet man den im letzten Abschnitt gegebenen Gleichungssatz jeweils nur für eine Schmelzgeometrie, so läßt sich der Einfluß eines variablen Verbundenheitsgrades auf die Moduli und Relaxationsstärken direkt untersuchen. Bezeichnet man den in Kap. 3.4. definierten Verbundenheitsgrad wieder mit V_b , so sind die Schmelzanteile gegeben durch

$$\beta_i = (1 - V_b) \beta \quad ; \quad \beta_v = V_b \beta \quad (3.5.14)$$

wobei β_i , β_v die Anteile für die jeweils betrachtete Geometrie darstellen.

Es ist klar, daß der Verbundenheitsgrad auf die unrelaxierten Moduli keinen Effekt hat. Die Abweichung der relaxierten von den unrelaxierten Moduli wird dagegen mit zunehmendem V_b wachsen.

Ersetzt man auf der rechten Seite vom Gleichungssatz (3.5.3) bis (3.5.8) die effektiven Moduli durch die ungestörten, läßt man also das SCS fallen, so ergibt sich für den relaxierten Schermodul eine einfache Beziehung

$$\mu_r = \frac{\mu_u}{1 + V_b \frac{\mu_u - \mu_v}{\mu_v}} \quad (3.5.15)$$

wobei μ_v der relaxierte Schermodul für das entsprechende vollständig verbundene Schmelzsystem ist. Für kleine Relaxationsstärken $\Delta_v := (\mu_u - \mu_v) / \mu_v$ kann μ_r als lineare Funktion von V_b approximiert werden:

$$\mu_r(V_b) \approx \mu_u (1 - V_b \Delta_v) \approx \mu_u - (\mu_u - \mu_v) V_b \quad (3.5.16)$$

Löst man die selbst-konsistenten Gleichungen jeweils für verschiedene Geometrien, so läßt sich für größere Relaxationsstärken eine leichte Abweichung von der Linearität feststellen. μ_r läßt sich dann angenähert durch

$$\mu_r(V_b) \approx \mu_u - (\mu_u - \mu_v) V_b (1 - \delta (1 - V_b)) \quad (3.5.17)$$

beschreiben, wobei δ ein Maß für die Abweichung von der Linearität ist. Für spitzkantige Kanäle ergibt sich z. B. für δ : $\delta \approx 1.6\beta$.

Interessanter dürfte die Abhängigkeit der halben Relaxationsstärke $\Delta'/2$ vom Verbundenheitsgrad sein. Es sei wieder definiert:

$$\frac{\Delta'}{2} = \frac{\mu_u - \mu_r}{2 \sqrt{\mu_u \mu_r}} \quad ; \quad \frac{\Delta'_v}{2} = \frac{\mu_u - \mu_v}{2 \sqrt{\mu_u \mu_v}}$$

wobei $\Delta'_v/2$ für ein entsprechendes, vollständig verbundenes Schmelzsystem gelten soll. Aus (3.5.17) ergibt sich dann als Näherung:

$$\frac{\Delta'}{2} = \frac{\Delta'_v}{2} v_b (1 - \delta' (1 - v_b)) \tag{3.5.18}$$

mit $\delta' = \delta + \frac{\Delta'_v}{2} \sqrt{\frac{\mu_u}{\mu_v}} (1 - \delta v_b) + \dots$

In der linearen Approximation ist $\Delta'/2$ also gegeben durch

$$\frac{\Delta'}{2} \approx v_b \frac{\Delta'_v}{2} \tag{3.5.19}$$

Für kleine Schmelzkonzentrationen bzw. Relaxationsstärken steigt also die Relaxationsstärke linear mit v_b an. In Abb. 49 ist $\delta'/2$ in Abhängigkeit von der halben Relaxationsstärke $\Delta'_v/2$ für die Film- bzw. Kanalgeometrie dargestellt. Man erkennt, daß für kleine $\Delta'_v/2$ die Abweichung von der Linearität vernachlässigbar wird und (3.5.19) eine gute Approximation darstellt.

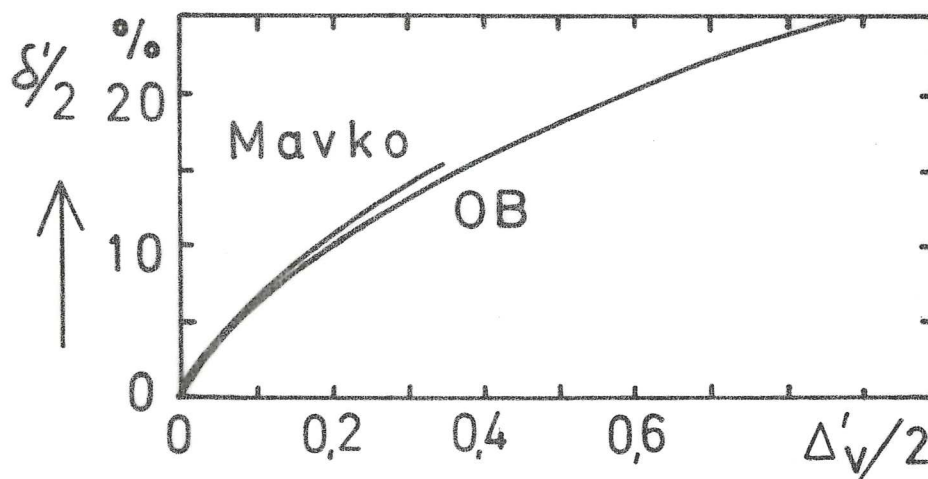


Abb. 49: Maximale relative Abweichung der halben Relaxationsstärke von der linearen Beziehung (3.5.19) für Kanäle (Mavko) und Filme (OB).

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß für nicht zu große $\Delta'_V/2$ (< 0.1) im Fall von nur teilweise verbundenen Inklusionen der relaxierte Modul bzw. $\Delta'_V/2$ mit Hilfe der linearen Beziehung (3.5.16) bzw. (3.5.19) berechnet werden kann. Ob für größere $\Delta'_V/2$ eine Korrektur gemäß (3.5.17) bzw. (3.5.18) erforderlich ist, mag hingegen ohne größere Bedeutung sein, da, wie unten gezeigt wird, in einem solchen Fall schon mit einem relativ vollständig verbundenen Schmelzsystem gerechnet werden muß.

3.5.2.2. Anwendung des statistischen Modells über den Verbundenheitsgrad sphäroidförmiger Inklusionen auf die Relaxationsstärke

In Kap. 3.4. wurde ein Zusammenhang zwischen dem Querverhältnis α , der Schmelzkonzentration β und dem Verbundenheitsgrad V_b für film- oder sphäroidförmige Inklusionen gefunden. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, welchen Einfluß ein variabler Verbundenheitsgrad auf den relaxierten Modul und die Relaxationsstärke hat. Es liegt daher nahe, den relaxierten Modul und die Relaxationsstärke in Abhängigkeit von α , β und $V_b(\alpha, \beta)$ zu berechnen.

Bezüglich einer möglichen analogen Betrachtung des Kanalmodells sei hier auf einen grundlegenden Unterschied hingewiesen: Die Moduli des Film- bzw. Ellipsoidmodells hängen von einer (β/α) bzw. zwei (α, β) unabhängigen Variablen ab. Der hier benutzte zugehörige Verbundenheitsgrad hat die identischen Größen als unabhängige Variable, so daß er ohne weiteres in das Filmmodell mit einbezogen werden kann. Definiert man für Kanäle analog zu Filmen ein Querverhältnis α_{Ka} als Quotient Durchmesser zu Länge eines Kanals, so ließe sich mit α_{Ka} und β , ähnlich wie bei Filmen, eine Art Verbundenheitsgrad einführen. Dieser Verbundenheitsgrad wäre dann von zwei Größen, α_{Ka} und β , abhängig, während die unrelaxierten Moduli des Kanalmodells nur von β , nicht von α_{Ka} , abhängen. Zu einem μ_u gäbe es dann beliebig viele μ_r und Relaxationsstärken, je nach α_{Ka} . Beim Filmmodell dagegen bleibt der Zusammenhang zwischen μ_u und μ_r bzw. $\Delta'_V/2$ eindeutig.

Anders ausgedrückt, beim Kanalmodell läßt sich ein vollständiger Verbundenheitsgrad bei gegebenem β dadurch erreichen, daß man α_{Ka}

genügend klein wählt. Der unrelaxierte Modul bleibt davon unbeeinflusst. Bei Filmen oder Ellipsoiden hat dagegen eine Veränderung von α einen erheblichen Einfluß auf μ_u . Dies legt nun nahe, in erster Linie den herabgesetzten Verbundenheitsgrad für Filme und Ellipsoide zu untersuchen. Für Kanäle sei daher ein 100%-iger Verbundenheitsgrad angenommen. Diese Vereinfachung wird durch theoretische thermodynamische Überlegungen von Bulau et al. (1979) gestützt, nach denen ein Schmelzkanalsystem im strukturellen Gleichgewicht einen 100%-igen Zusammenhang hat. Die sich dann für Kanäle ergebenden μ_r bzw. $\Delta'/2$ stellen somit Unter- bzw. Obergrenzen dar, die durch freie Wahl von β_{KaV}/β jeweils über- bzw. unterschritten werden können.

Es sind nun mit dem in Kap. 3.4. bestimmten $Vb(\alpha, \beta)$ und den daraus nach (3.5.14) folgenden Schmelzanteilen β_{El_i} und β_{El_v} die elastischen Moduli und Relaxationsstärken durch Lösung des Gleichungssatzes (3.5.3) bis (3.5.13) berechnet worden. Hierbei sind die Schmelzanteile β_F und β_{Ka} gleich Null gesetzt worden. Die resultierenden Moduli zeigen nur eine geringe Abweichung vom Fall $Vb=1$ (welcher in Abb. 32 dargestellt war). In logarithmischer Darstellung ist allerdings für die halbe Relaxationsstärke $\Delta'/2$ ein deutlicher Effekt zu erkennen (Abb. 50). Die gezeigten dickeren unteren Kurven beinhalten den von β abhängigen Verbundenheitsgrad, die schwächeren Kurven gelten dagegen für $Vb=1$ (und sind identisch mit denen aus Abb. 34). Bei steigendem Schmelzanteil geht der Verbundenheitsgrad gegen 100%, so daß die Kurven konvergieren. Für kleine β oder kleine $\Delta'/2$ sind jedoch deutliche Unterschiede zu erkennen, bei $\Delta'/2 \approx 10^{-2}$ z.B. differieren sie schon um etwa einen Faktor von 2.

Stellt man die $\Delta'/2$ in Abhängigkeit vom unrelaxierten Schermodul dar (Abb. 51), so ist ebenfalls ein deutlicher Effekt durch den herabgesetzten Verbundenheitsgrad (durchgezogene Kurven) zu erkennen. Wird durch Schmelze ein Abfall des Schermoduls von z.B. 10% hervorgerufen, so ist nach dem Verbundenheitsmodell aus Kap. 3.4. offensichtlich noch keine vollständige Verbundenheit erreicht. Die Relaxationsstärken für Filme werden für dieses Beispiel um 30% - 40% herabgesetzt, für Ellipsoide mit $\alpha = 0.3$ sogar um ca. 50% .

Um schließlich einen direkten Vergleich der Relaxationsstärke mit dem Verbundenheitsgrad und dem weiter unten folgenden Leit-

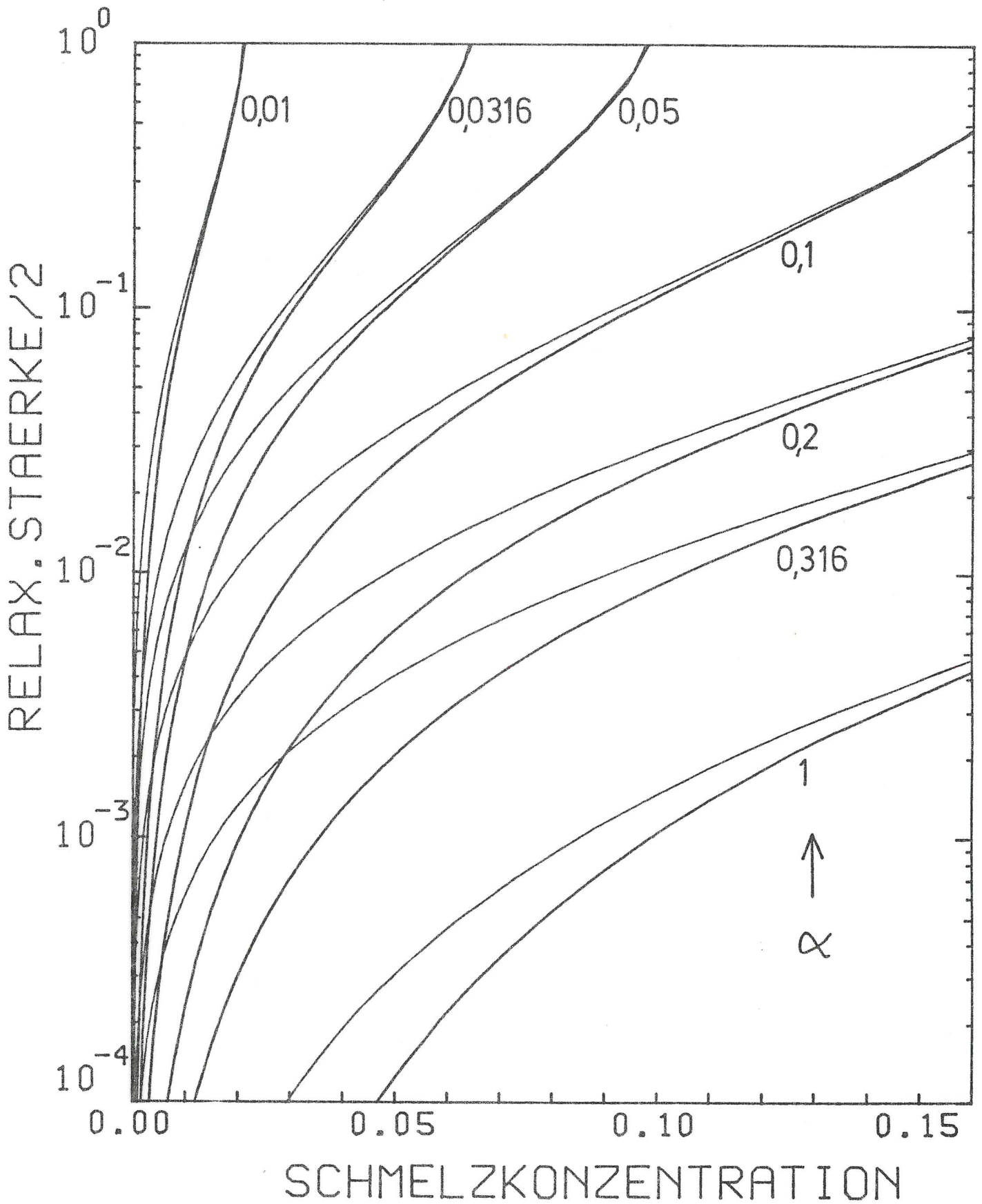


Abb. 50: Halbe Relaxationsstärke $\Delta_{\mu}^{\prime}/2$ mit herabgesetztem (jeweils untere dicke Kurven) und mit vollständigem Verbundenheitsgrad (dünne Kurven) für sphäroidförmige Inklusionen. Sonstige Moduli wie in Abb. 32.

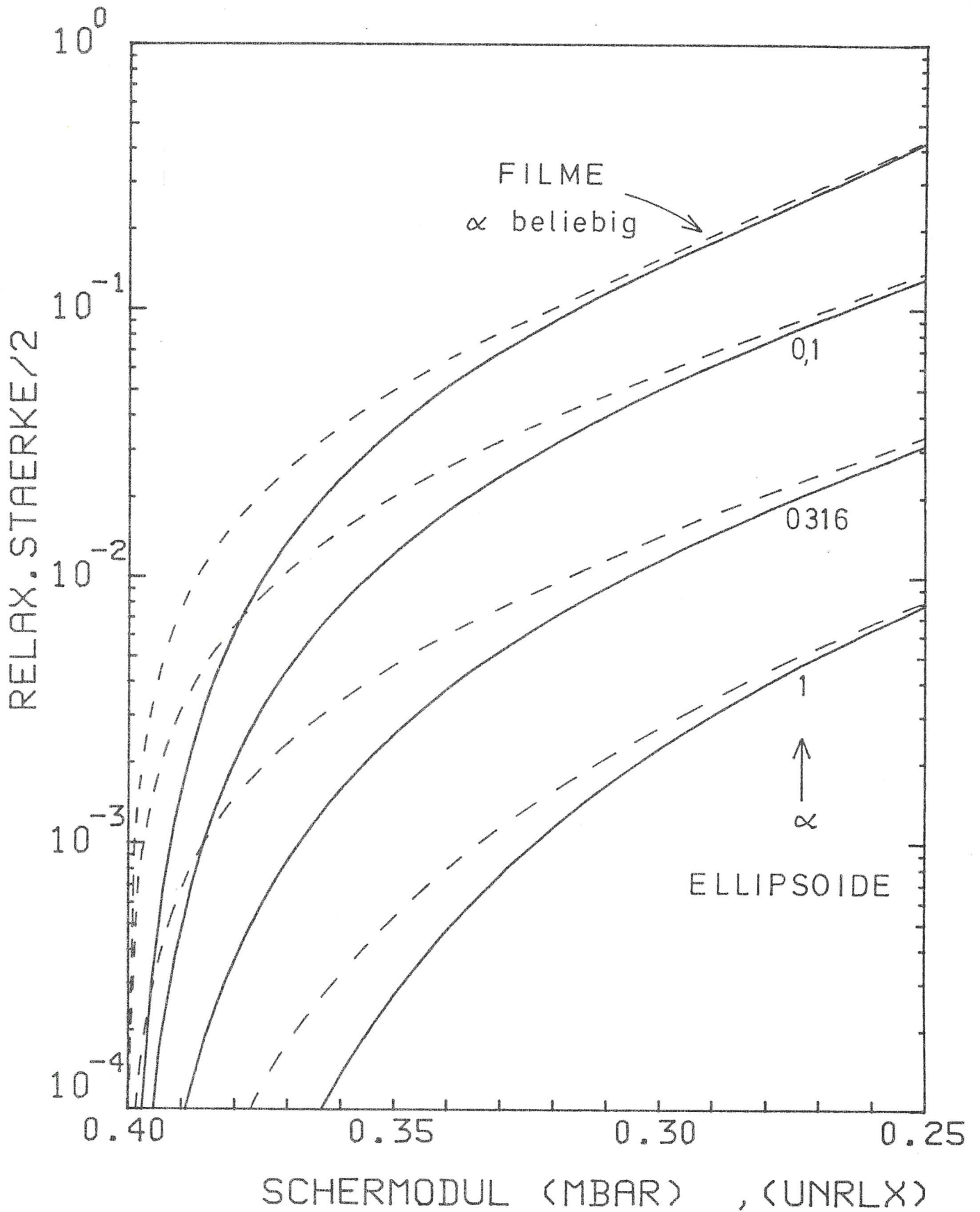


Abb. 51: Halbe Relaxationsstärke $\Delta_{\mu}^{\prime}/2$ mit (durchgezogene Kurven) und ohne (gestrichelt) Berücksichtigung eines herabgesetzten Verbundenheitsgrades in Abhängigkeit des abfallenden unrelaxierten Schermoduls.

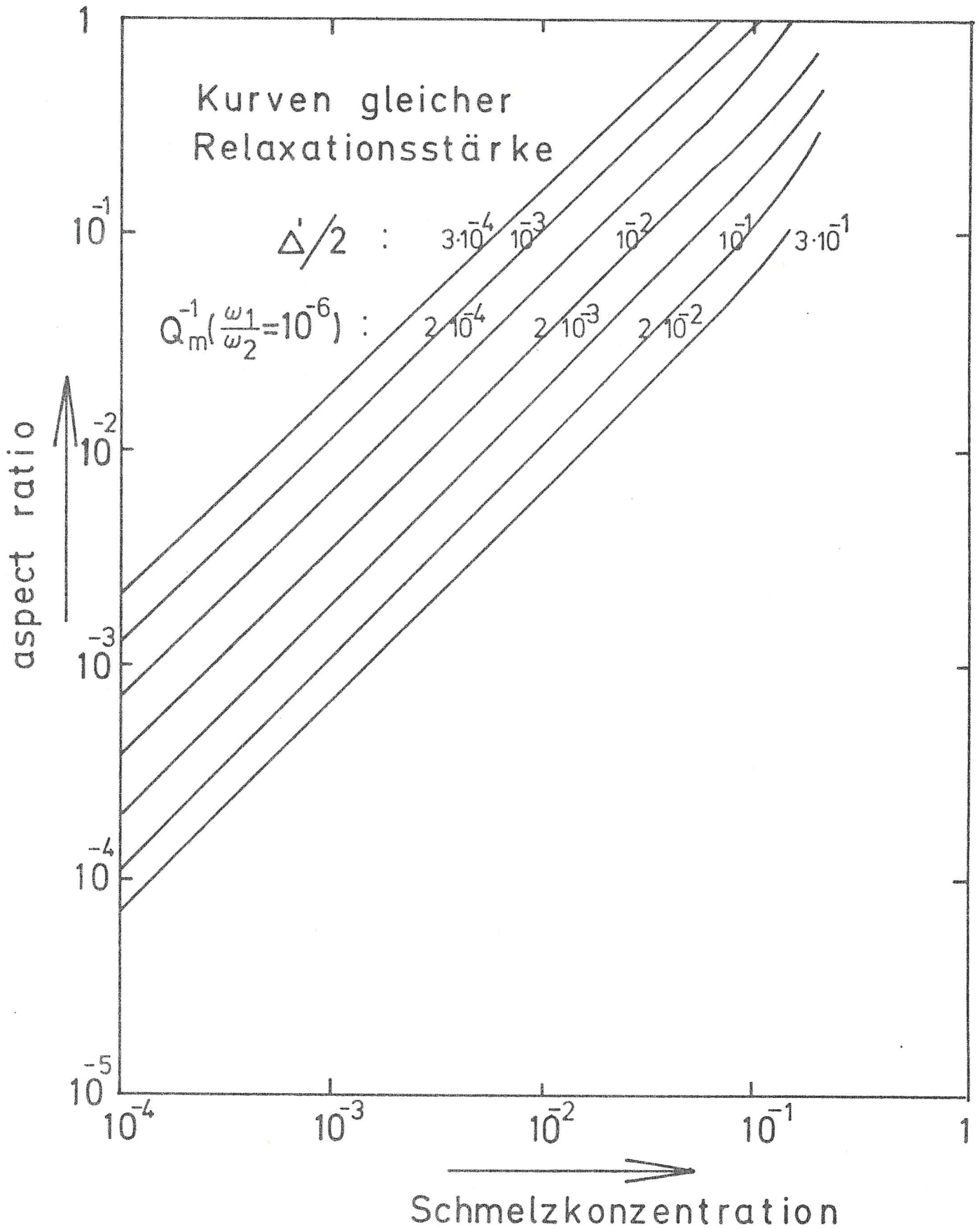


Abb. 52: Linien gleicher halber Relaxationsstärke $\Delta'_{\mu}/2$ in Abhängigkeit vom Querverhältnis und der Schmelzkonzentration. Ein für kleine β und große α herabgesetzter Verbundenheitsgrad ist berücksichtigt. Q_m^{-1} entspricht dem maximalen Q^{-1} bei einem 6 Dekaden breiten Absorptionsband.

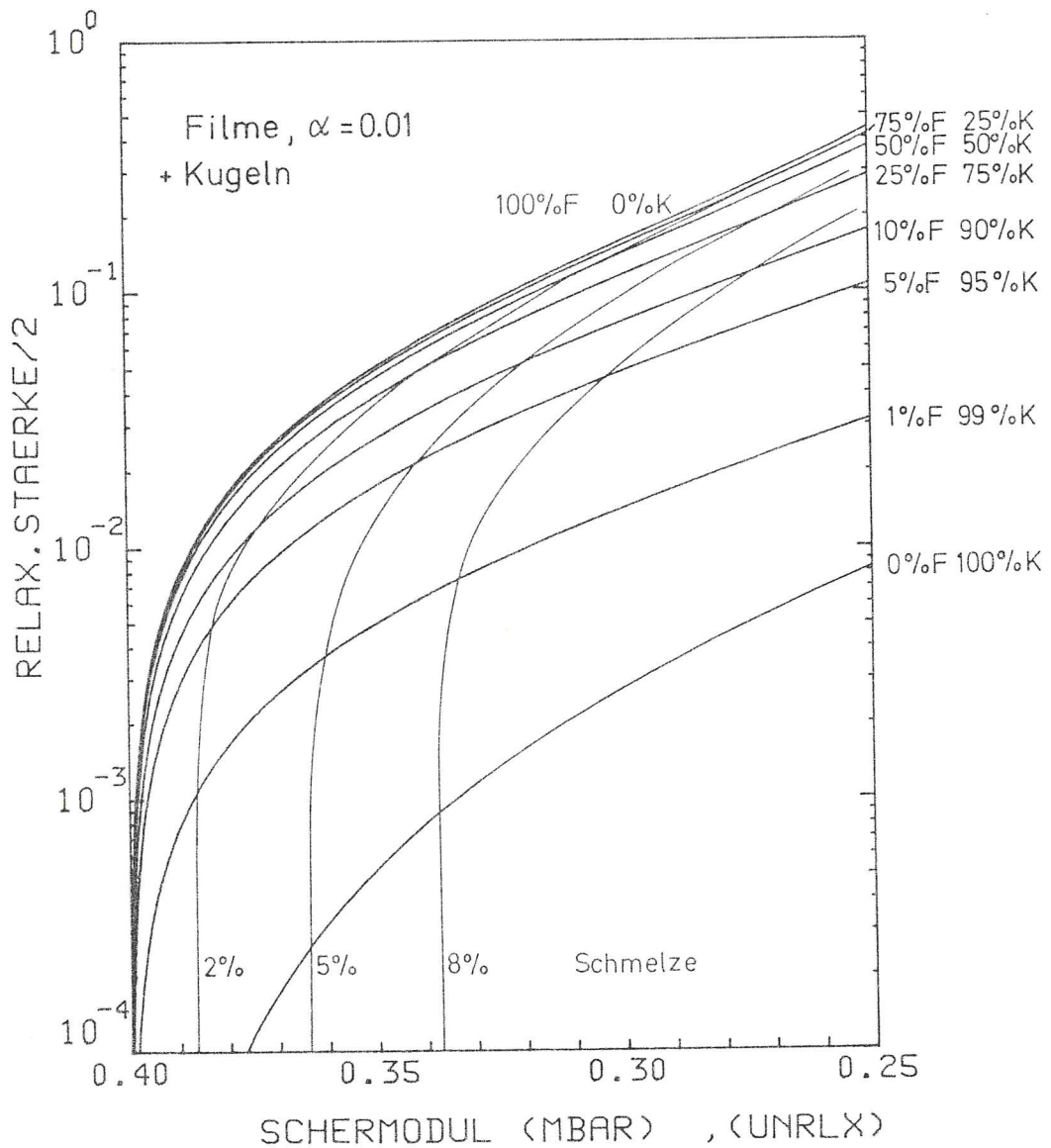
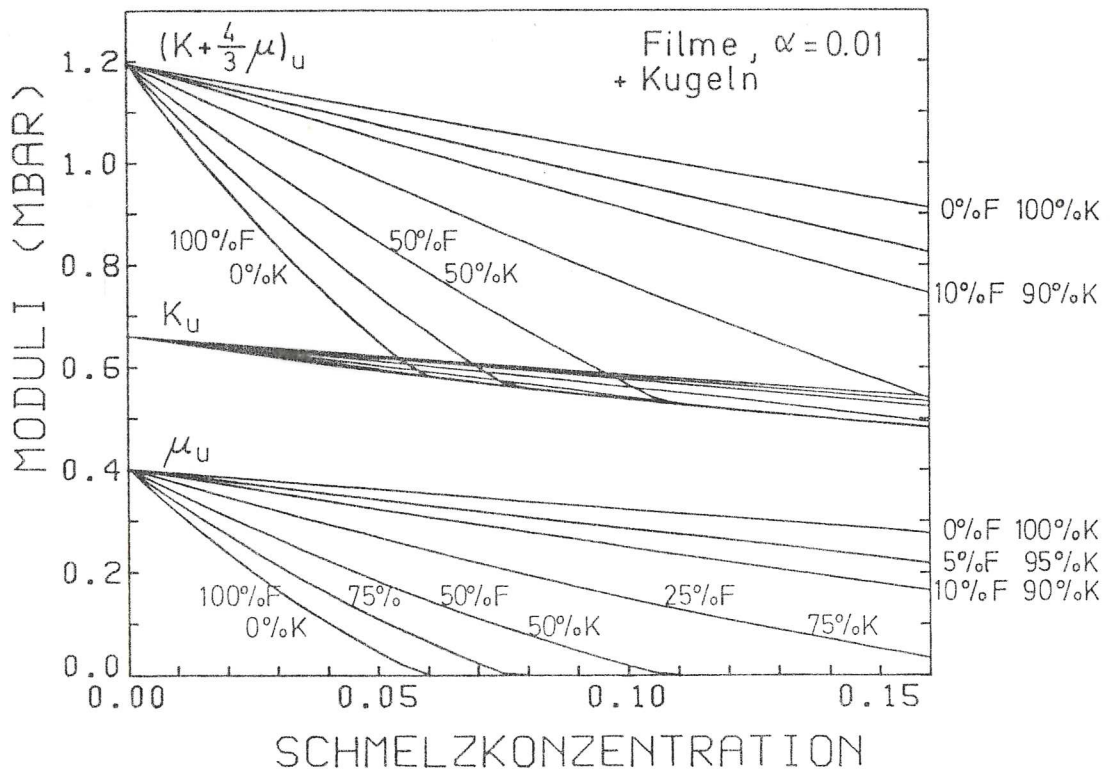
fähigkeitsmodell zu ermöglichen, sind in Abb. 52 Kurven gleicher, von $V_b(\alpha, \beta)$ abhängiger Relaxationsstärken aufgetragen. In diesem Diagramm sind zusätzlich an den Kurven die maximalen Q^{-1} -Werte angegeben, die bei einem sechs Dekaden breiten Absorptionsband (im Unterschied zum Debye-peak) auftreten würden.

3.5.3. Überlagerung verschiedener Schmelzgeometrien

Der Gleichungssatz (3.5.3) bis (3.5.13) erlaubt eine Überlagerung verschiedener Schmelzgeometrien unter Berücksichtigung des SCS. Aus der Vielzahl von möglichen Superpositionen seien hier folgende, prinzipiell unterschiedliche gewählt: Filme + kompakte Schmelztaschen, Filme + Kanäle, Kanäle + kompakte Schmelztaschen. Für das Filmmodell sollte das Querverhältnis nicht wesentlich kleiner als 0.01 gewählt werden, da in der Natur kaum zu erwarten ist, daß gegenüberliegende Filmseiten über die gesamte Filmfläche, deren Ausdehnung dem 1000- oder mehr fachen der Filmdicke entsprechen soll, vollkommen frei und ungestört sind. Es wurde daher willkürlich ein $\alpha = 0.01$ gewählt, stellvertretend auch für breitere Verteilungen in α gemäß (3.2.12). Für die kompakten Schmelztaschen, die sich etwa beim Aufschmelzen ganzer Gesteinskörner bilden können, wurde der Übersichtlichkeit halber eine Kugelgeometrie gewählt. Für die Kanalgeometrie schienen die spitzzulaufenden ($\epsilon = 0$, Abb. 14) Kanäle am geeignetsten. In den folgenden Modellen wurde immer ein 100%-iger Verbundenheitsgrad gewählt.

Zunächst sei ein Schmelzsystem, bestehend aus Filmen und Kugeln, betrachtet. Abb. 53 zeigt die unrelaxierten Moduli, μ , K , $K + \frac{4}{3}\mu$ (= Modul für p-Wellenausbreitung) in Abhängigkeit von der Schmelzkonzentration für den Übergang Kugeln (100% K, 0% F) zu Filmen (0% K, 100% F). Wie zu erwarten, fällt mit zunehmendem Filmanteil an der Gesamtschmelze der Schermodul drastisch ab. Umgekehrt, je größer der Schmelzanteil in Kugeln relativ zu dem in Filmen ist, um so mehr Gesamtschmelze benötigt man zur Erklärung eines gegebenen Modulabfalls.

In Abb. 54 ist nun die halbe Relaxationsstärke $\Delta_{\mu}'/2$ für Scherung gegen den durch Schmelze abfallenden unrelaxierten Schermodul aufgetragen. Es ist ein drastischer Anstieg von $\Delta_{\mu}'/2$ bei nur geringem Anteil von Schmelze in Filmen zu erkennen. 1% der Gesamtschmel-



Oben: Abb. 53 ; unten: Abb. 54 ; Text: siehe nächste Seite.

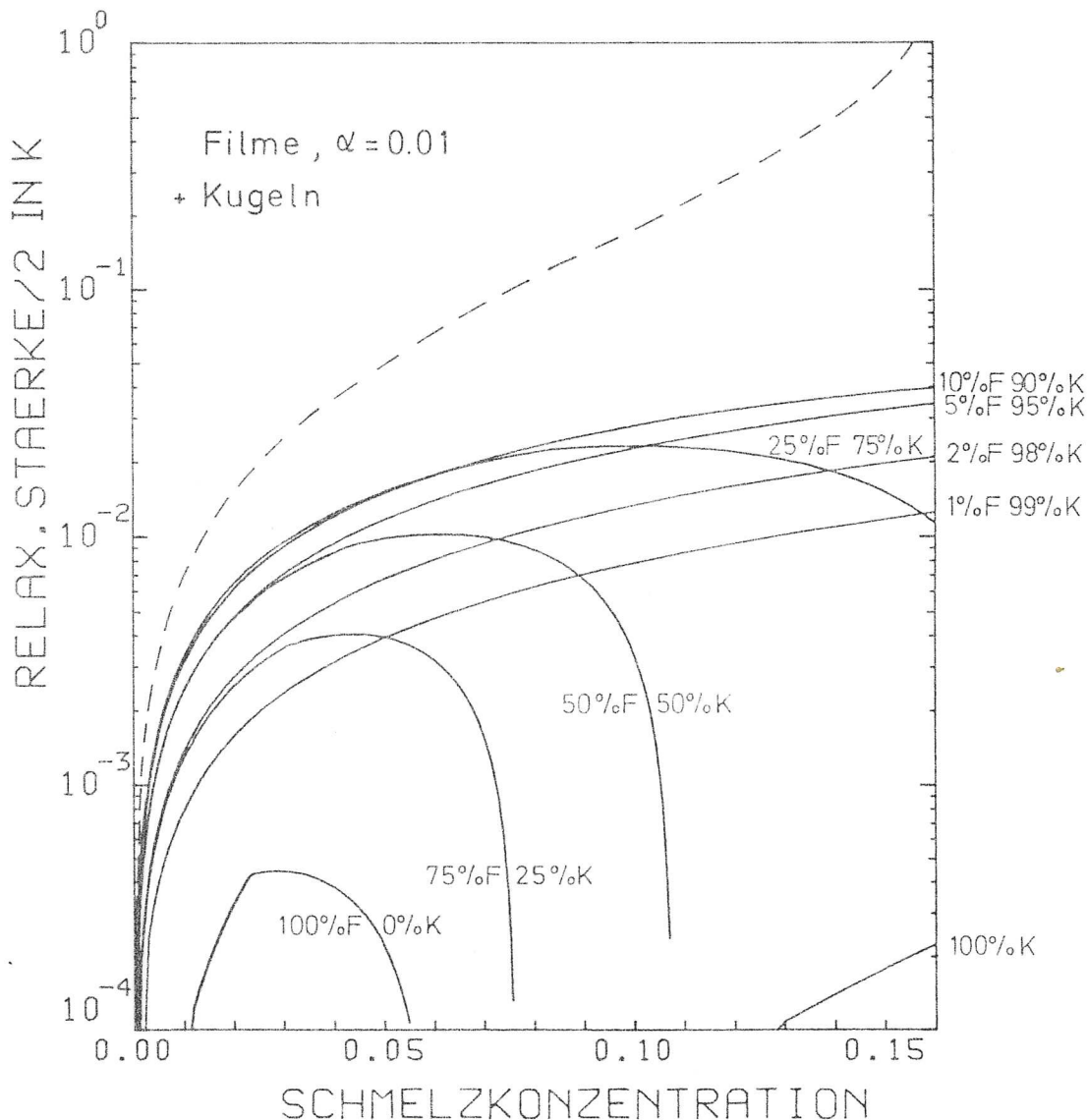


Abb. 55: Halbe Relaxationsstärken für Kompression ($\Delta_K'/2$) für die Überlagerung von Filmen (F) mit Kugeln (K). Moduli wie in Abb. 53. Gestrichelt: $\Delta_\mu'/2$ für 10% F und 90% K.

Abb. 53 (vorige Seite): Unrelaxierte Moduli für die Überlagerung von Filmen (F) mit dem Querverhältnis 0.01 mit Kugeln (K). Prozentzahlen beziehen sich auf die Gesamtschmelze. $K_0 = 0.66 \text{ Mb}$, $\mu_0 = 0.4 \text{ Mb}$, $K_f = 0.2 \text{ Mb}$, $\alpha = 0.01$.

Abb. 54 (vorige Seite): Scherrelaxationsstärke $\Delta_\mu'/2$ für die Überlagerung von Filmen (F) mit Kugeln (K) in Abhängigkeit vom abfallenden unrelaxierten Schermodul. Moduli wie in Abb. 53. Zusätzliche Kurven: Linien gleichen Schmelzanteils, gültig für die $\Delta_\mu'/2$ Kurven.

ze in Filmen erhöht die Relaxationsstärke um z.T. mehr als eine Dekade. Dieser starke Anstieg wird verständlich, wenn man bedenkt, daß ohne das SCS kugelförmige Inklusionen überhaupt keine Relaxation aufweisen würden (vgl. Kap. 3.3.). Es wird aus der Abbildung deutlich, daß bei gegebenem Modulabfall ein großer Schmelzanteil in Kugeln benötigt wird, um die Relaxationsstärke merklich herabzusetzen. In welchem Maße dann die Schmelzkonzentration ansteigt, kann den drei eingezeichneten Kurven gleichen Gesamtschmelzanteils entnommen werden. Man hat also auch hier wieder den Fall, daß bei gegebenem Schermodul die Relaxationsstärke abnimmt, während mit zunehmendem Kugelanteil die Gesamtschmelzkonzentration zunimmt. Es sollte angemerkt werden, daß die Lage der Kurven mit hohem Kugelanteil (95% K oder 99% K) empfindlich vom Querverhältnis der Filme abhängt.

Ein sehr interessanter Aspekt ergibt sich bei der Betrachtung der Relaxationsstärken für Kompression. Um den Mechanismus der Relaxation bei Kompression zu verstehen, sei zunächst nur eine Inklusionsgeometrie angenommen. Die Ursache für den Unterschied zwischen K_u und K_r , also für die Relaxation, liegt in der aus dem SCS folgenden Kopplung der entsprechenden Gleichungen mit denen für die Schermoduli μ_u und μ_r . Ohne Berücksichtigung des SCS bzw. der Wechselwirkung zwischen den Inklusionen würden bei Kompression in den Inklusionen keine unterschiedlichen Drücke, also auch keine Relaxation auftreten (im Gegensatz zur Scherung). Wie schon anhand von Abb. 35 diskutiert wurde, treten in der Umgebung von Inklusionen Spannungskonzentrationen auf, die zu einem inhomogenen hydrostatischen Druck im gesamten Medium führen. Dies ist auch für Kompression bei dicht verteilten Inklusionen der Fall. Die in einem solchen heterogenen Feld verteilten Inklusionen weisen dann auch unterschiedliche Flüssigkeitsdrücke auf, welche sich durch Relaxation ausgleichen können.

Liegt nun also Schmelze in Form von Filmen vor (100% F, 0% K; Abb. 55), so steigt mit zunehmendem β die Relaxationsstärke in K zunächst an. Wenn bei steigendem β erst μ_r , dann auch μ_u Null erreichen, verliert die Kopplung zwischen den K- und den Schermoduli zunehmend ihre Wirkung. K_u und K_r nähern sich wieder an, die Relaxationsstärke fällt ab, bis schließlich $K_u = K_r$ oder $\Delta'_K/2 = 0$ für $\mu_u = \mu_r = 0$. Physikalisch entspricht das System mit $\mu = 0$ dann

eher dem einer Suspension mit festen Partikeln. Relaxation durch Flüssigkeitsströmung ist bei außen angelegtem, hydrostatischem Druck dann nicht mehr möglich.

Man erkennt nun in Abb. 55, daß bei zunehmendem Schmelzanteil in Kugeln β_{Ku} die halbe Relaxationsstärke $\Delta_K^1/2$ stark ansteigt. Sie erreicht bei einem Film/Kugel-Verhältnis $\beta_F/\beta_{Ku} \approx 10/90$ einen maximalen Verlauf mit Werten zwischen 0.01 und 0.04 für einen Schmelzanteil zwischen 2% und 15%. Erhöht man den Kugelanteil weiter, so fällt die Relaxationsstärke wieder drastisch ab. Es existiert also offenbar ein optimales Verhältnis zwischen β_F und β_{Ku} , bei dem die Relaxationsstärke um Größenordnungen höher ausfällt als jeweils für die Film- oder Kugelgeometrie getrennt. Dieses Verhalten läßt sich leicht verstehen, wenn man bedenkt, daß bei äußerer Kompression unterschiedliche Porengeometrien auch unterschiedliche Porendrücke hervorrufen, die sich dann ausgleichen können.

Ein solcher Mechanismus wurde schon von Johnston et al. (1979) und Budiansky und O'Connell (1980) diskutiert. Budiansky und O'Connell berechneten für ein β_{Ku} von 5% und eine Rißdichte von 0.1 (vgl. 3.4.13) einen Absorptionspeak unter Annahme von $K_f = 0.5 K_o$. Das resultierende $Q_{K_{max}}^{-1}$ ($= \Delta_K^1/2$) erreicht etwa 15% des entsprechenden $Q_{\mu_{max}}^{-1}$. Es sei angemerkt, daß diese Werte mit Hilfe des den Gleichungssatz (3.5.3) bis (3.5.13) lösenden Programms erfolgreich reproduziert werden konnten. Das von Budiansky und O'Connell berechnete Verhältnis Q_K^{-1}/Q_{μ}^{-1} variiert wegen der unterschiedlichen Lage der Debye-peaks auf der Frequenzachse zwischen 5% und 50%. Das von Budiansky und O'Connell berechnete Q_K^{-1}/Q_{μ}^{-1} -Verhältnis stellt einen sehr speziellen Fall dar, es wird im folgenden gezeigt, daß Q_K^{-1}/Q_{μ}^{-1} sehr empfindlich von β , β_F/β_{Ku} und K_f abhängt.

In Abb. 55 ist $\Delta_{\mu}^1/2$ für 10% F, 90% K gestrichelt dargestellt. Man sieht, daß auf Grund der unterschiedlichen Steigungen von $\Delta_{\mu}^1/2$ und $\Delta_K^1/2$ (10% F, 90% K) ihr Verhältnis über einen weiten Bereich variiert.

Weiterhin sind die $\Delta_{\mu}^1/2$ Kurven, von denen nur die für 10%F, 90%K gezeigt ist, stark vom Film/Kugel-Verhältnis abhängig. Die $\Delta_K^1/2$ -Kurven weisen dagegen für β_F/β_{Ku} -Verhältnisse um 0.1 nur geringe

Veränderungen auf, wie der Abb. 55 zu entnehmen ist.

Schließlich kommt hinzu, daß die Höhe der $\Delta'_K/2$ Kurven im Unterschied zu entsprechenden $\Delta'_\mu/2$ Kurven empfindlich vom K-Modul der Schmelze abhängt. Der Einfluß von K_f auf $\Delta'_K/2$ läßt sich für das β_F/β_{Ku} Verhältnis 10/90 kurz so beschreiben:

$$\begin{aligned} \Delta'_K/2 (K_f = 0.33 \text{ Mb}) &\approx 0.25 \Delta'_K/2 (K_f = 0.2 \text{ Mb}) \\ &\approx 0.1 \Delta'_K/2 (K_f = 0.1 \text{ Mb}), \end{aligned}$$

während die Kurvenform weitgehend erhalten bleibt. Budiansky und O'Connell (1980) erhalten mit $K_f = 0.5 K_o$ ($\hat{=} K_f = 0.33 \text{ Mb}$) eine relativ niedrige Relaxationsstärke, während sie z.B. mit $K_f = 0.1 \text{ Mb}$ bis hinauf zu 5% Schmelze in weitgehender Übereinstimmung mit $\Delta'_\mu/2$ verläuft.

Es sei angemerkt, daß die dargestellten $\Delta'_K/2$ Kurven für $\beta_F/\beta_{Ku} \approx 10/90$ genähert auch für andere α gelten, wenn dann für β_F und β_{Ku} gilt:

$$\beta_F/\beta_{Ku} = 10\alpha, \quad (\alpha \leq 0.03) \quad (3.5.20)$$

Bei geeigneter Wahl von Parametern (kleines K_f , Film/Kugel-Verhältnis von $\beta_F/\beta_{Ku} \approx 10\alpha$, β nicht zu groß) ist es also durchaus möglich, daß die Relaxationsstärke in K die Größenordnung der in μ erreicht. Das Verhältnis Δ'_K/Δ'_μ hängt jedoch empfindlich von den oben aufgeführten Parametern ab, so daß zwingende Voraussagen für in situ-Bereiche im Augenblick nicht möglich scheinen.

Im nächsten Modell wurden Filme und Kanäle mit spitzkantigem Querschnitt nach Mavko (1980) überlagert. Da auch in diesem Fall der Einfluß der Filme auf den Modulabfall stärker ist, als der der Kanäle, nehmen die Moduli mit zunehmendem Filmanteil deutlich ab (Abb. 56). Insgesamt ist der überstrichene Bereich jedoch schmaler als der der Film-Kugel-Superposition, da der Modulabfall bei Kanälen stärker als bei Kugeln ist.

Eine ähnliche Überlagerung von Kanälen und Filmen wurde für ein Kanal- Film-Verhältnis $\beta_{Ka}/\beta_F = 70/30$ von Mavko (1980) durchgeführt.

Betrachtet man nun wieder die halbe Relaxationsstärke für Scherung in Abhängigkeit des unrelaxierten Schermoduls (Abb. 57), so

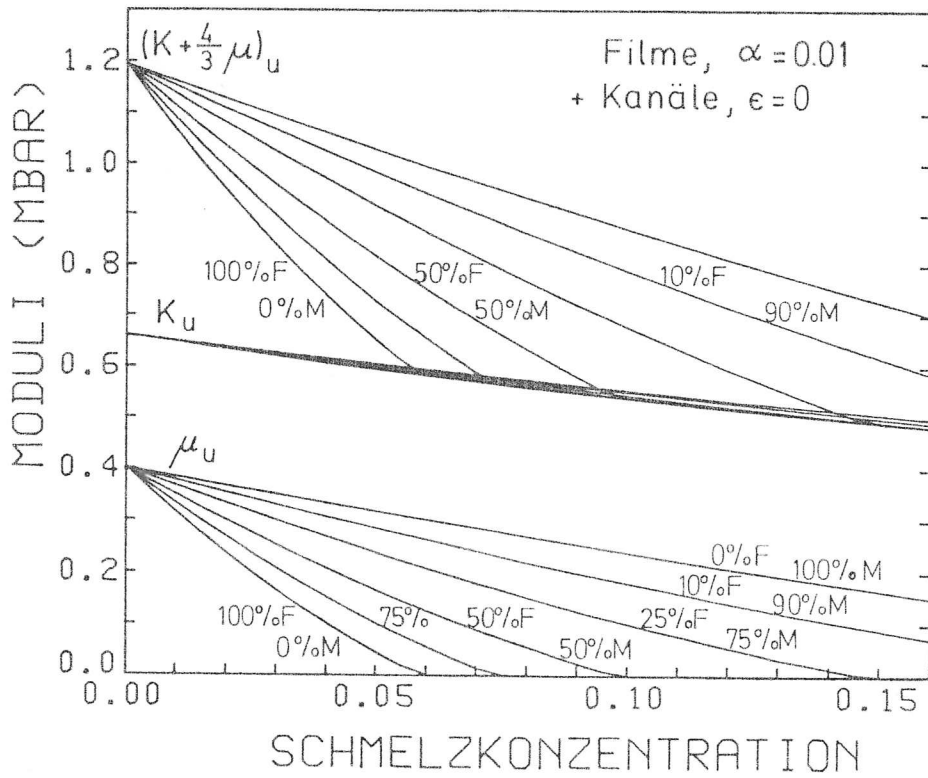


Abb. 56: Überlagerung von Filmen (F) und Kanälen (M) mit spitzkantigem Querschnitt. Sonst wie Abb. 53.

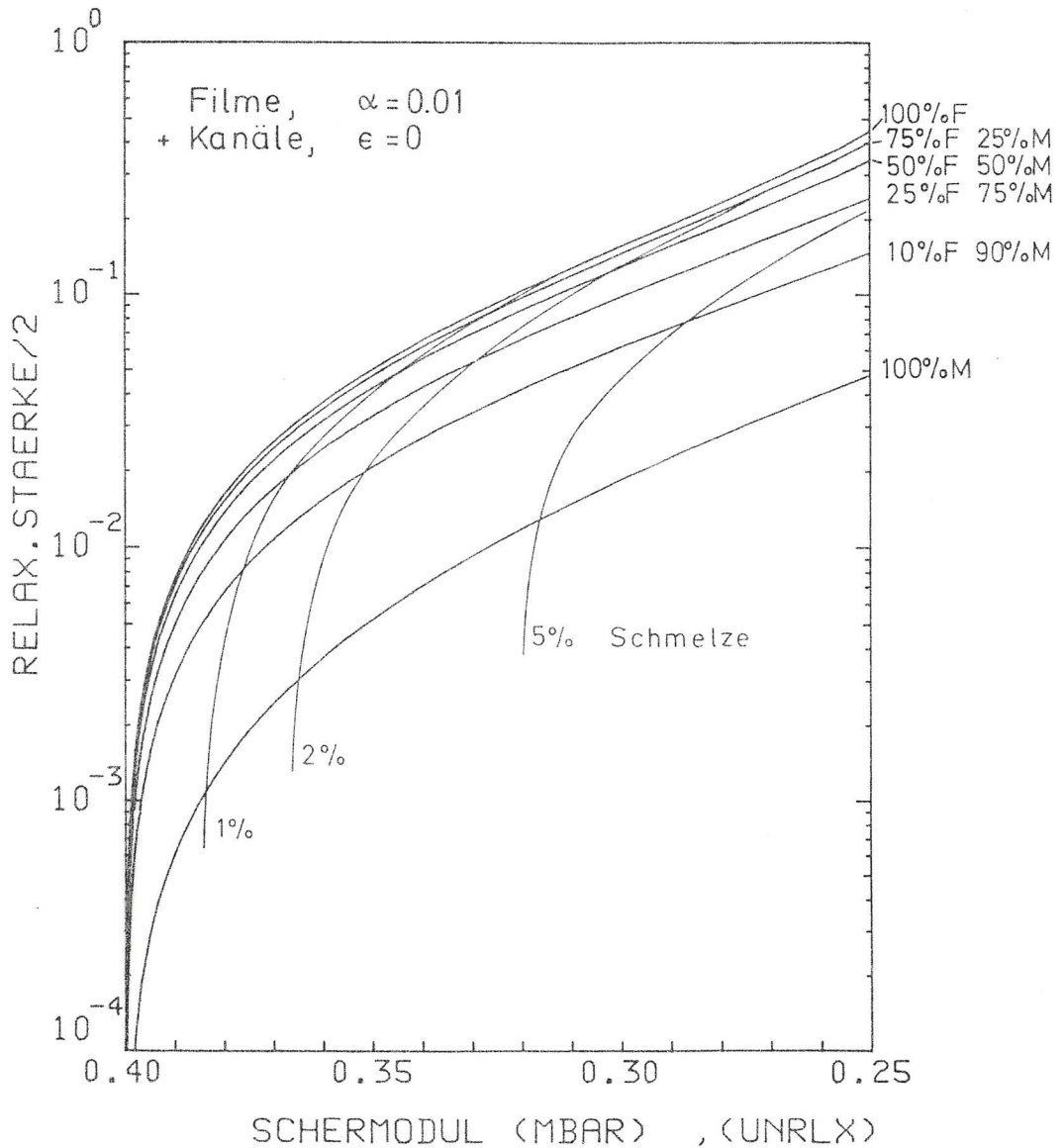


Abb. 57: Überlagerung von Filmen (F) und Kanälen (M). Sonst wie Abb. 54.

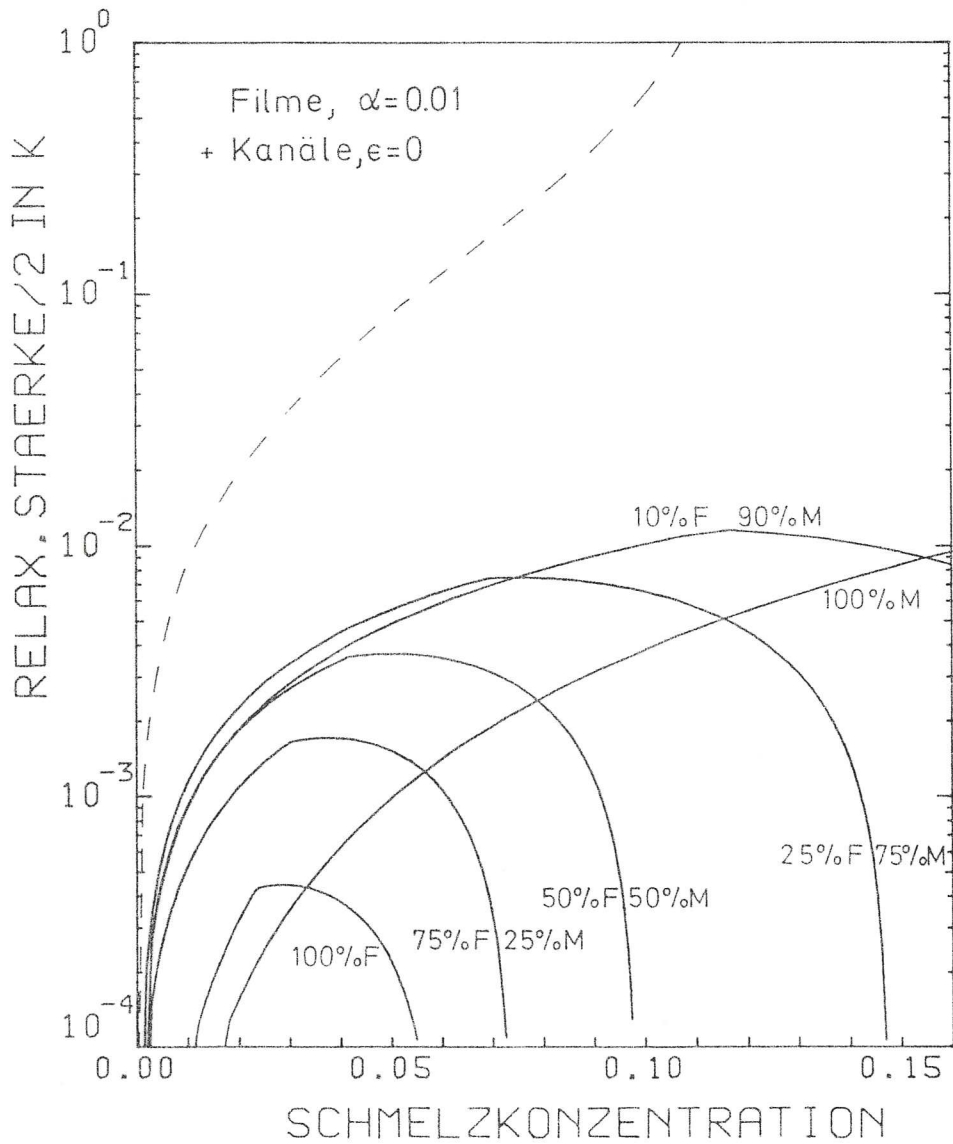


Abb. 58: Überlagerung von Filmen (F) und Kanälen (M).
Gestrichelt: $\Delta'_\mu/2$ für 10% F, 90% M. Sonst wie Abb.55.

ist hier ebenfalls - wenn auch nicht mehr so deutlich wie in Abb. 54 - erkennbar, daß ein relativ geringer Schmelzanteil in Filmen ausreicht ($\beta_F > 10 \alpha \beta_{Ka}$), die Relaxationsstärke signifikant anzuheben.

Auch für Filme und Kanäle wurde die Kompressionsrelaxationsstärke in Abhängigkeit von der Schmelzkonzentration berechnet. Sie ist in Abb. 58 dargestellt. Wieder liegt die Relaxationsstärke für eine Kombination von Kanälen und Filmen ($\beta_{Ka} / \beta_F \approx 90/10$) deutlich - bis zum Teil eine Dekade - höher als die für die einzelnen Geometrien selbst. Sie erreicht allerdings nicht die Größenordnung derjenigen des Film-Kugel-Modells. Im Gegensatz dazu übertrifft die Scherrelaxationsstärke (gestrichelt) jedoch die entsprechende Kurve des Film-Kugel-Systems deutlich. Das Verhältnis Δ_K' / Δ_μ' fällt also um einiges niedriger aus als das des Film-Kugel-Modells. Selbst für kleine K_F (≈ 0.1 Mb) liegt das Verhältnis unterhalb von 40%.

Im letzten Modell werden Schmelzkanäle mit Kugelinklusionen überlagert, repräsentativ für ein Schmelzsystem mit Schmelztaschen in Kornzwickeln, die durch Schmelzkanäle längs Kornkanten verbunden sind. Die Moduli (Abb. 59) überstreichen bei Variation des Kanal-Kugel-Schmelzverhältnisses β_{Ka} / β_{Ku} nur einen relativ engen Bereich. Dieser wäre noch enger, würde man entweder anstelle von Kugeln spitzkantige Schmelztaschen (z.B. Abb. 5c,d), oder aber anstelle spitzkantiger Kanäle zylinderförmige berücksichtigen.

Abb. 60 zeigt die Scherrelaxationsstärke in Abhängigkeit des unrelaxierten Schermoduls. Sie steigt bei gegebenem Modul mit wachsendem β_{Ka} / β_{Ku} um etwa eine Dekade an, während sich die Schmelzkonzentration ungefähr halbiert.

Abb. 61 zeigt schließlich wieder die kompressive Relaxationsstärke für die kombinierten Geometrien Kanal-Kugel. Sie liegt für kleine Schmelzanteile ($\leq 8\%$) um einen Faktor 2 bis 10 höher als die für Kanäle selbst. Die $\Delta_K' / 2$ Kurven haben für einen relativ großen Bereich von β_{Ka} / β_{Ku} Verhältnissen ($1/3 \leq \beta_{Ka} / \beta_{Ku} \leq 3$) einen ähnlichen Verlauf. Innerhalb dieses β_{Ka} / β_{Ku} -Intervalls variiert jedoch die Höhenlage der Scherrelaxationsstärke deutlich (gestrichelte Kurven). Dies führt in diesem Fall dazu, daß das Δ_K' / Δ_μ' -Verhältnis bei $\beta_{Ka} / \beta_{Ku} = 25/75$ den Wert 1 sogar schwach

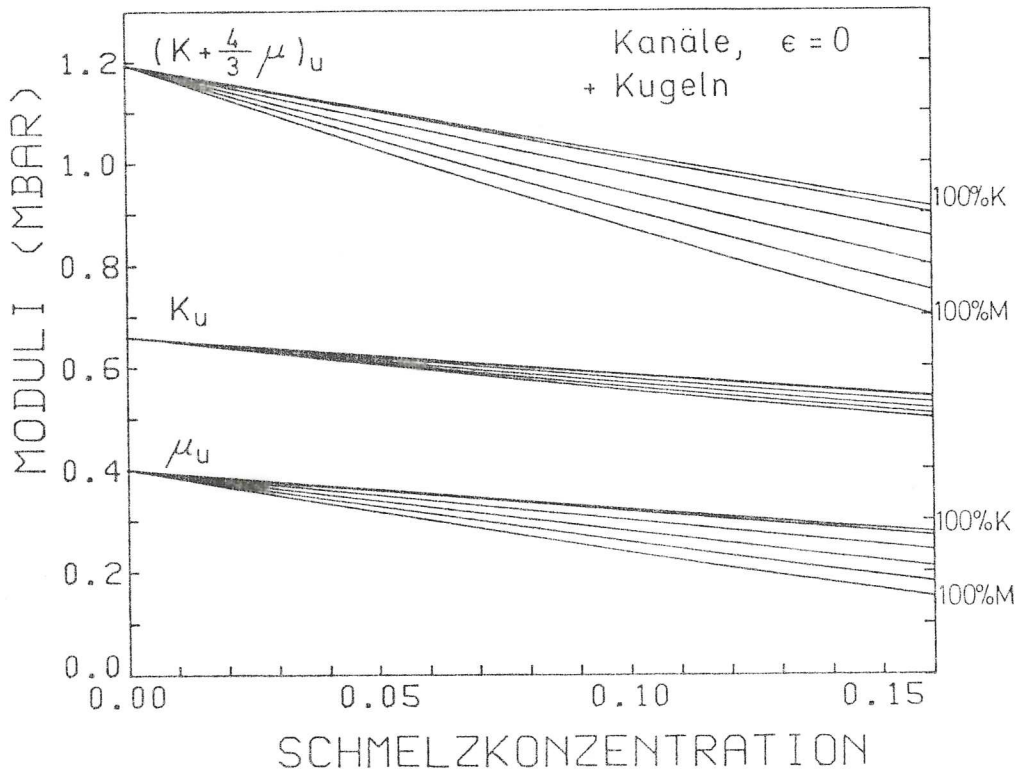


Abb. 59: Überlagerung von Kanälen (M) und Kugeln (K).
Sonst wie Abb. 53.

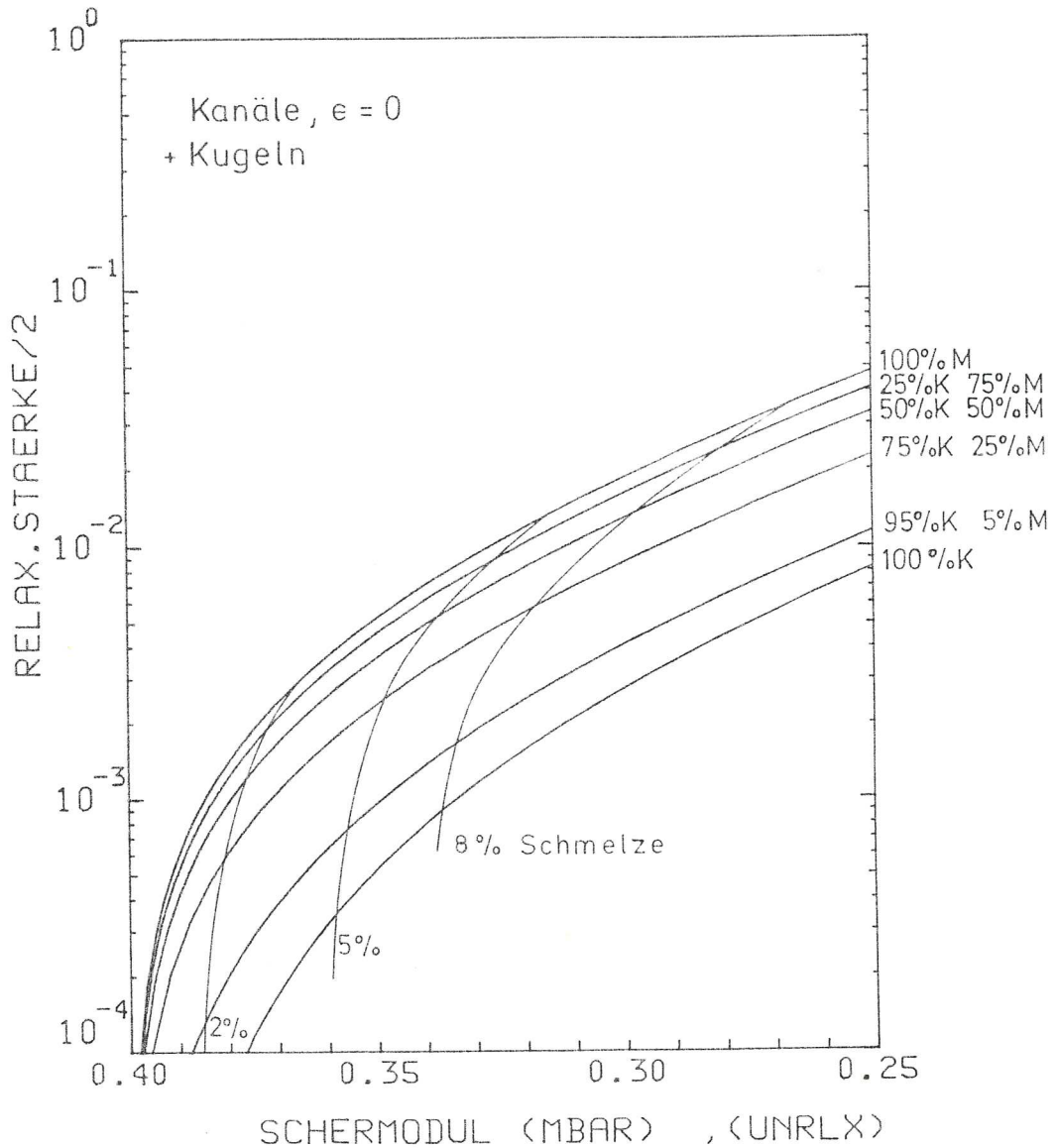


Abb. 60: Überlagerung von Kanälen (M) und Kugeln (K).
Sonst wie Abb. 54.

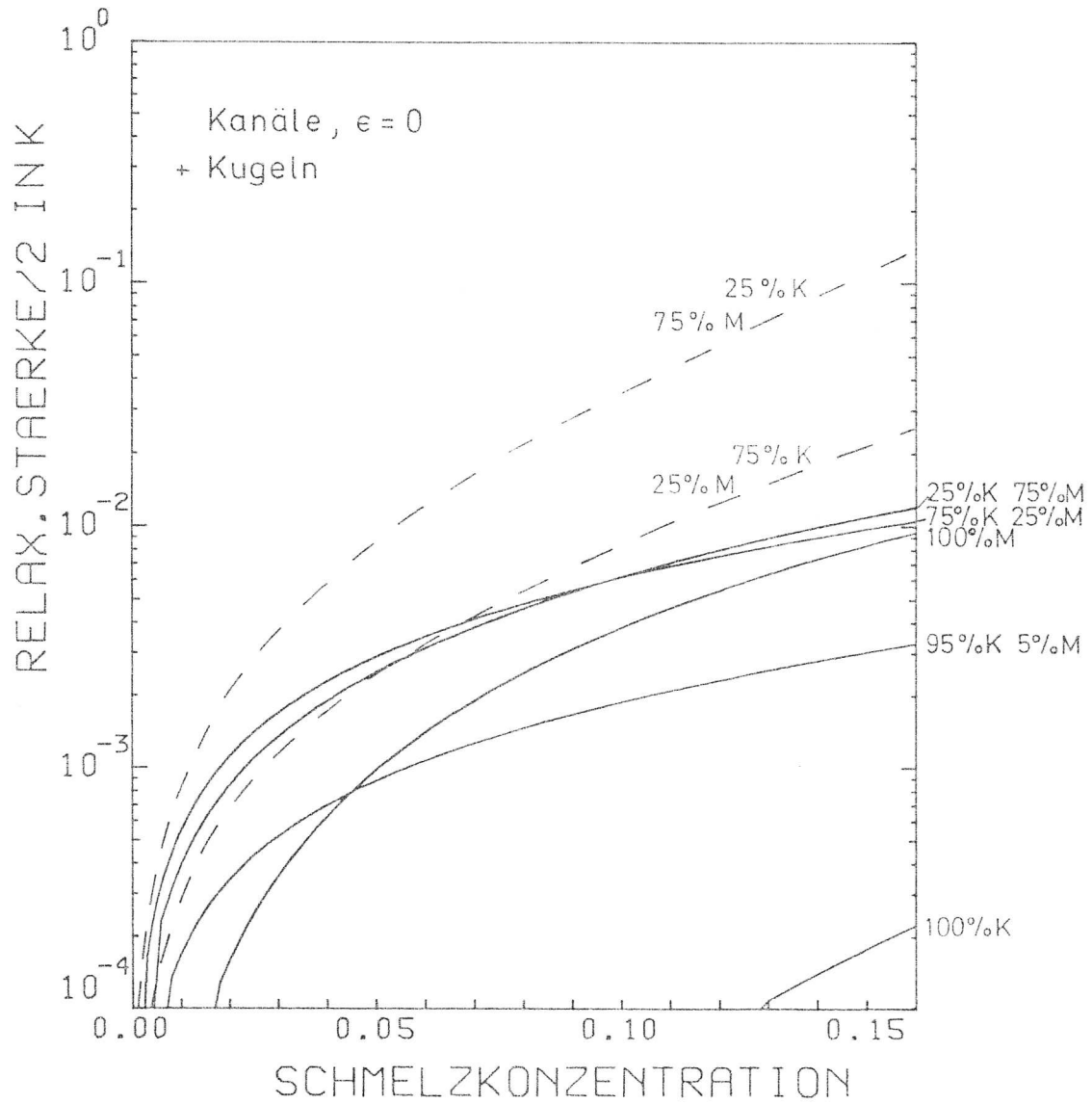


Abb. 61: Überlagerung von Kanälen (M) und Kugeln (K).
Durchgezogene Kurven: $\Delta'_K/2$; gestrichelte Kurven: $\Delta'_\mu/2$.
Sonst wie Abb. 55.

übertrifft (für $\beta < 7\%$). Es sei erwähnt, daß auch hier die Δ_K' -Kurven für kleinere K_f noch höher ausfallen würden (für $K_f = 0.1$ Mb z.B. um einen Faktor 1.5 bis 2.5).

Führt man eine Überlagerung von Kugeln mit zylindrischen Kanälen - im Unterschied zu den spitzkantigen aus den letzten drei Abbildungen - durch, so stellt sich heraus, daß Δ_K' nicht oder nur schwach größer ist als für Kanäle selbst. Ähnlich dürfte der Fall aussehen, würde man spitzkantige Kanäle mit eben solchen Schmelztaschen superponieren.

Der hier in Kap. 3.3. bis Kap. 3.5. vorgestellte Satz von Elastizitäts- und Anelastizitätsmodellen für partielle Schmelze sollte einen Überblick über die Effekte unterschiedlicher Schmelzgeometrien geben. Die Frequenzabhängigkeit, bei deren Betrachtung noch weitere Geometrieparameter und die Schmelzviskosität berücksichtigt werden müßten, wurde nicht explizit untersucht. Sie läßt sich jedoch mit den in Kap. 3.2. zusammengestellten Relaxationsfrequenzen und den Betrachtungen über Relaxationszeitverteilungen in Kap. 3.1. bei Bedarf abschätzen.

3.5.4. Zusammenfassung von Kapitel 3.5.

In Kapitel 3.5. wird ein umfassender Satz von an/elastischen Schmelzmodellen zusammengestellt, der, kombiniert mit dem weiter unten aufgestellten Satz von Leitfähigkeitsmodellen, zur Interpretation von unterschiedlichen Beobachtungsdatensätzen herangezogen werden kann.

In Kap. 3.5.1. wird zunächst ein allgemeiner selbst-konsistenter Gleichungssatz formuliert, der die Berechnung von elastischen Moduli und Relaxationsstärken für partiell geschmolzenes Material mit vollständig oder teilweise verbundenen, kanal-, film- oder sphäroidförmigen Inklusionen oder Überlagerungen derselben ermöglicht (Gln. 3.5.3 - 3.5.13).

In Kap. 3.5.2 werden die allgemeinen Auswirkungen eines herabgesetzten Verbundenheitsgrades V_b auf den relaxierten Modul und die Relaxationsstärke behandelt. Es erweist sich für die meisten Fälle als ausreichend, den relaxierten Modul und die Re-

laxationsstärke proportional zu V_b zu setzen (Glg. 3.5.16 und 3.5.19).

Weiterhin wird der in Kap. 3.4. für Film- und Sphäroidinkclusionen hergeleitete, vom Querverhältnis α und der Schmelzkonzentration β abhängige Verbundenheitsgrad mit in die Berechnung der Moduli und Relaxationsstärken einbezogen. Für kleine Relaxationsstärken oder Modulabfälle ergeben sich für $\Delta/2$ schon beträchtliche Abweichungen vom vollständig verbundenen Fall.

In Kap. 3.5.3. werden schließlich die effektiven Moduli und Relaxationsstärken für folgende Überlagerungen verschiedener Inklusionsgeometrien berechnet: Filme + Kugelinkclusionen, Filme + Kanäle, Kanäle + Kugeln. Für den Fall Filme + Kugeln zeigt sich, daß schon ein sehr geringer Filmanteil ausreicht, die Relaxationsstärke drastisch anzuheben. Es wird ebenfalls die Relaxationsstärke für Kompression berechnet, diskutiert und dargestellt. Es zeigt sich, daß sie für bestimmte Kombinationen von Film/Kugel-Schmelzverhältnisse ($\beta_F / \beta_{Ku} \approx 10\alpha$) um Größenordnungen höher ausfällt als für die einzelnen Geometrien selbst. Unter bestimmten Bedingungen erreicht Δ_K sogar die Größenordnung von Δ_μ .

Es wird der von Budiansky und O'Connell (1980) beschriebene Zusammenhang zwischen Q_{Scherung}^{-1} und $Q_{\text{Kompression}}^{-1}$ diskutiert. Dabei stellt sich heraus, daß das von Budiansky und O'Connell beschriebene Q_μ^{-1} / Q_K^{-1} - Verhältnis einen Spezialfall darstellt, da es im allgemeinen empfindlich von β , β_F / β_{Ku} und K_f abhängt.

Es werden schließlich noch die beiden übrigen Film + Kanal- und Kanal + Kugel-Überlagerungen besprochen, deren Verhalten sich prinzipiell nicht vom Film-Kugel-Fall unterscheidet. Es wird hierbei noch angemerkt, daß bei der Kanal-Kugel-Überlagerung Δ_K sogar Δ_μ übertreffen kann.

In Kap. 3.5.4. wird schließlich eine Zusammenfassung dieses Kapitels gegeben.

3.6. Überlagerung von Hochtemperatur-Relaxationsmechanismen im Festkörper mit solchen durch Schmelze

Bei der Erstellung von elastischen Schmelzmodellen geht man für die Gesteinselastizität im allgemeinen von einem ungestörten, ideal elastischen Material aus (Kap. 3.3. - 3.5.; O'Connell und Budiansky, 1977; Mavko, 1980; u.a.). Aus Experimenten ist jedoch bekannt (Berckhemer et al., 1982a; Kampfmann, 1980; Woigard und Gueguen, 1978), daß bei Temperaturen nahe der Solidustemperatur die Festkörperabsorption, insbesondere die sogenannte "high temperature background absorption", eine bedeutende Rolle spielt.

Um nun zu bestimmen, in welcher Form sich Festkörper- und Schmelzmechanismen überlagern, ist die genaue Kenntnis dieser einzelnen Absorptionsprozesse erforderlich. Nimmt man jedoch zunächst an, die Relaxationsmechanismen seien voneinander unabhängig, so läßt sich eine einfache Betrachtung durchführen:

Es seien folgende Relaxationsspektren definiert (vgl. Kap. 3.1.) (die Indizes bedeuten: o: Festkörper, f: Schmelze (flüssig)), δM = Moduldefekt, V = normierte Verteilungsfunktion der Relaxationszeiten)

$$\begin{aligned} \delta M_o V_o(\tau), & \text{ resultierend aus Festkörpermechanismen,} \\ \delta M_f V_f(\tau), & \text{ " " Schmelze,} \end{aligned}$$

und das Gesamtspektrum

$$\delta M V(\tau) = \delta M_o V_o(\tau) + \delta M_f V_f(\tau) \quad (3.6.1)$$

Für die Moduldefekte folgt dann, da die einzelnen V normierte Spektren darstellen:

$$\delta M = \delta M_o + \delta M_f \quad (3.6.2)$$

Nach Gleichung (3.1.24) folgen für den Real- und Imaginärteil des komplexen Moduls:

$$\begin{aligned} M_1(\omega) &= M_u - \delta M + \delta M \int_0^{\infty} V(\tau) \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau \\ &= M_u - \delta M + \delta M_o \int_0^{\infty} V_o(\tau) \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau \\ &\quad + \delta M_f \int_0^{\infty} V_f(\tau) \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

$$M_2(\omega) = \delta M \int_0^{\infty} V(\tau) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau =$$

$$\delta M_o \int_0^{\infty} V_o(\tau) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau + \delta M_f \int_0^{\infty} V_f(\tau) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau$$

(3.6.4)

Um die Auswirkungen der beiden einzelnen Relaxationsmechanismen auf die Moduli zu betrachten, wird, ausgehend von der unrelaxierten Elastizität des Zweiphasensystems M_u , angenommen, daß entweder nur Relaxation im Festkörper oder aber nur Relaxation durch Flüssigkeitsmechanismen (Strömung zwischen Inklusionen) auftritt. Der jeweils andere Relaxationsmechanismus wird dabei als unrelaxiert oder nicht wirksam betrachtet. Man kann also schreiben:

$$M_{1o} = M_u - \delta M_o + \delta M_o \int_0^{\infty} V_o \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau ; \quad M_{2o} = \delta M_o \int_0^{\infty} V_o \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau$$

(3.6.5)

$$M_{1f} = M_u - \delta M_f + \delta M_f \int_0^{\infty} V_f \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau ; \quad M_{2f} = \delta M_f \int_0^{\infty} V_f \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau$$

(3.6.6)

Es sei erinnert, daß man zwischen der Relaxation des Systems infolge von Schmelzinklusionen und der Herabsetzung der (unrelaxierten) Elastizität durch Schmelze streng unterscheiden muß. Daher wurde in Glg. (3.6.5) zwar davon ausgegangen, daß Relaxation durch Schmelze nicht wirksam ist, daß jedoch die unrelaxierte Elastizität M_u des Systems durch Schmelze herabgesetzt sein kann.

Mit den Definitionen für die Absorption

$$Q^{-1} = \frac{M_2}{M_1} ; \quad Q_o^{-1} = \frac{M_{2o}}{M_{1o}} ; \quad Q_f^{-1} = \frac{M_{2f}}{M_{1f}}$$

(3.6.7)

findet man mit (3.6.1) bis (3.6.6) durch einfache Algebra für Q^{-1} in erster Näherung

$$Q^{-1} \approx Q_o^{-1} \left(1 + \frac{M_u - M_{1f}}{M_{1o}} \right) + Q_f^{-1} \left(1 + \frac{M_u - M_{1o}}{M_{1f}} \right)$$

(3.6.8)

und für die Moduli:

$$M_1 = M_{1o} + M_{1f} - M_u ; \quad M_2 = M_{2o} + M_{2f}$$

(3.6.9)

Aus (3.6.8) wird deutlich, daß sich die Mechanismen direkt durch Addition überlagern lassen, wenn sowohl die Relaxationsstärke des einen, als auch die des anderen Mechanismus klein gegen 1 ist, bzw. wenn Q^{-1} selbst $\ll 1$. Beim Überschreiten der Solidustemperatur überlagert sich also dem schon bei Subsolidus-Temperaturen vorhandenen Q_O^{-1} -Spektrum das Q_f^{-1} -Spektrum linear bzw. gemäß (3.6.8).

Q_O^{-1} und Q_f^{-1} können als weitgehend unabhängig voneinander betrachtet werden, wenn nur ein geringer Schmelzanteil vorliegt und gleichzeitig die Schmelze nicht die für die Festkörperprozesse wichtigen Raumbereiche einnimmt. Wenn nun Q_O^{-1} und Q_f^{-1} nicht unabhängig voneinander auftreten, dann kommen im wesentlichen als verantwortliche Mechanismen für Q^{-1} die Korngrenzenrelaxation, hervorgerufen durch Wanderung von sich an Korngrenzen häufenden Dislokationen und Fehlstellen und für Q_f^{-1} die Scherrelaxation und die Flüssigkeitsströmung bei Korngrenzen benetzender Schmelze in Frage. Das Auftreten von Schmelzfilmen wird an den entsprechenden Grenzflächen die Festkörperrelaxation aufheben und durch Flüssigkeitsrelaxation ersetzen.

Handelt es sich beim Festkörpermechanismus um die schon von \hat{K}_e (1949) vorgeschlagene viskose Korngrenzenrelaxation, so würde diese oberhalb der Solidustemperatur durch viskose Scherrelaxation durch Schmelze ersetzt. Die Relaxationsstärke ist bei beiden Mechanismen weitgehend gleich (vgl. Kap. 3.2.2.). Die Viskositäten und (beim Festkörpermechanismus effektiven) Querverhältnisse dürften jedoch eine unterschiedliche Temperaturabhängigkeit aufweisen, so daß sich die Relaxationsspektren für Q_O^{-1} und Q_f^{-1} deutlich in Form und Frequenzlage unterscheiden müßten.

Sind nun die Mechanismen in der beschriebenen Weise voneinander abhängig, so wird sich im Unterschied zum unabhängigen Fall das Q_O^{-1} -Spektrum beim Überschreiten der Solidustemperatur selbst verändern. Da die Relaxationsstärken weitgehend gleich sein sollten, dürfte eine beim Überschreiten der Solidustemperatur auftretende Abschwächung der Festkörperrelaxationsstärke durch die ansteigende Relaxationsstärke durch Schmelze kompensiert werden.

Vorausgesetzt, daß Q_f^{-1} gegenüber Q_O^{-1} nicht vernachlässigbar ist, wird sich Q_f^{-1} jedenfalls deutlich vom Temperatur-Frequenzverhalten eines thermisch aktivierten Q_O^{-1} unterscheiden. Es ist nämlich nicht zu erwarten, daß die Geometrieparameter in den Gleichungen für Q_f^{-1} , wie z.B. das Querverhältnis, eine Abhängigkeit proportional zu $\exp(-H/(kT))$ haben (H: Aktivierungsenthalpie, k: Boltzmann-

konstante, T: absolute Temperatur).

Der frequenzabhängige Modul M_1 in (3.6.9) läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$M_1(\omega, \beta) = M_0 - \Delta M_u(\beta) - \Delta M_0(\omega) - \Delta M_f(\omega, \beta) \quad (3.6.10)$$

wobei M_0 der unrelaxierte Modul des ungeschmolzenen Gesteins bzw. der Gesteinsmatrix ist, β die Schmelzkonzentration darstellt und die Modulabfälle folgendermaßen definiert sind:

$$\Delta M_u = M_0 - M_u ; \Delta M_0 = M_u - M_{10} ; \Delta M_f = M_u - M_{1f}$$

Im Unterschied zu M_0 ist M_u der unrelaxierte Modul des partiell geschmolzenen Gesteins. In der Darstellung (3.6.10) wird der erste und dritte Term durch den Festkörper und der zweite und vierte durch die Schmelze bestimmt.

Der unrelaxierte Festkörpermodul M_0 fällt nur sehr schwach mit der Temperatur ab. Nach einer Zusammenstellung von Geschwindigkeits- und Dichtedaten von Birch (1969) erniedrigt sich der Schermodul für polykristallinen Forsterit zwischen 1000°C und 1500°C nur um etwa 10%. Dieser Abfall wird zum Teil dem Term ΔM_0 in (3.6.10) zuzuschreiben sein (Birch gibt in seiner Aufstellung keine Frequenzabhängigkeit der Geschwindigkeiten an). Den Messungen

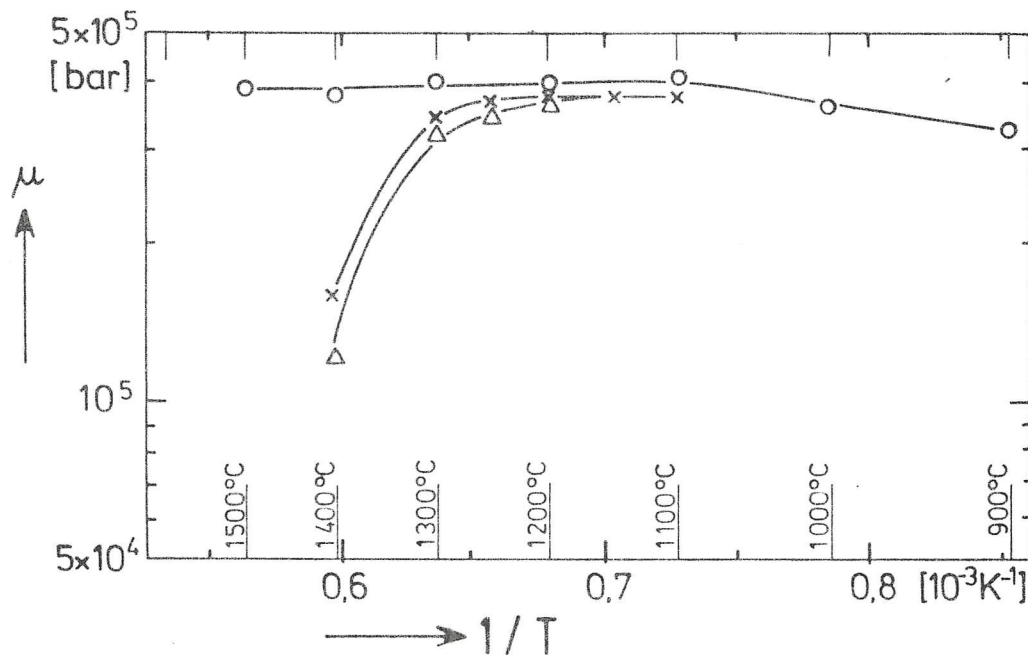


Abb. 62: Schermodul von Dunit (Δ, x) und Forsterit (o) bei 1 Hz aus Labormessungen von Berckhemer et al. (1982a).

von Kampfmann (1980) und Berckhemer et al. (1979) zu Folge bleibt der unrelaxierte E-Modul von Dunit bzw. Peridotit im Subsolidusbereich über mehrere 100 Grad weitgehend konstant. Nach Berckhemer et al. (1982a) ist für polykristallinen ungeschmolzenen Forsterit bei hohen Frequenzen sogar eine leichte Erhöhung des Schermoduls zu beobachten. Abb.62 zeigt als Beispiel den Modulabfall von partiell schmelzendem Dunit im Vergleich mit einem nicht schmelzenden polykristallinen Forsterit (Berckhemer et al., 1982a).

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß beim Überschreiten der Solidustemperatur der Abfall des unrelaxierten Moduls ΔM_u im wesentlichen auf die Schmelze zurückzuführen ist.