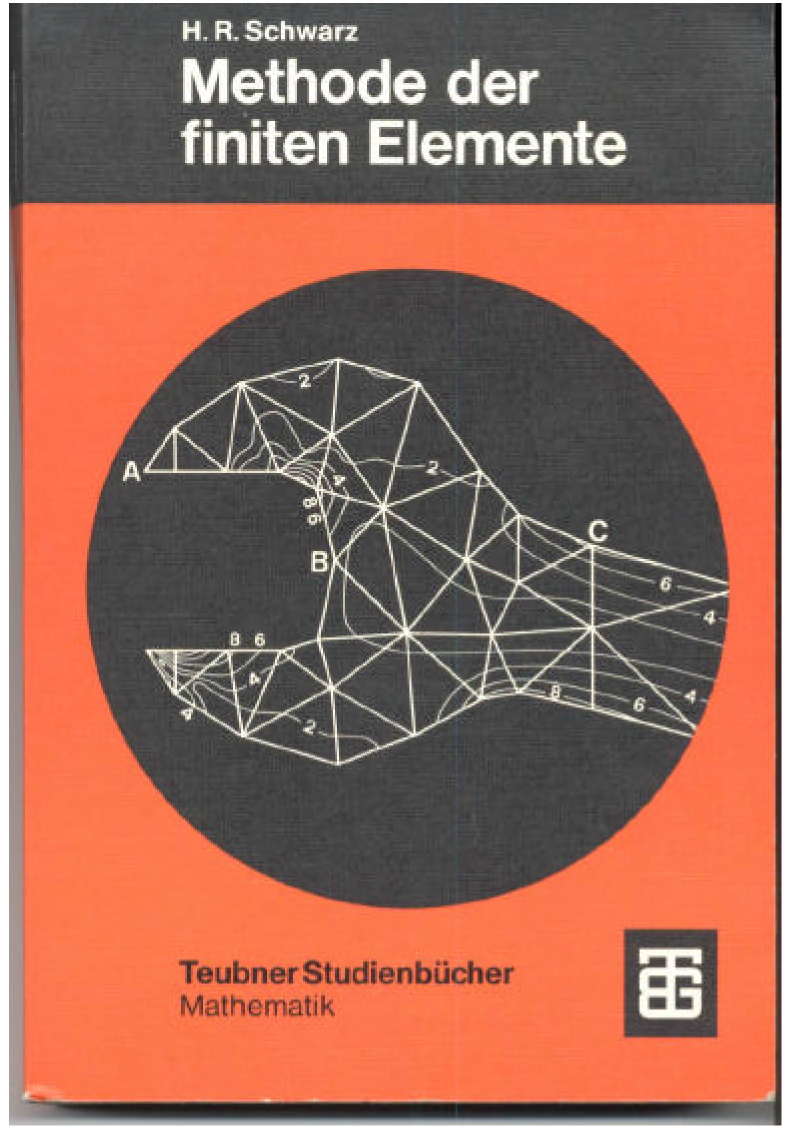
Einführung in die Methode der Finiten Elemente

Geophys. Seminar 11. 5. 04

Harro Schmeling

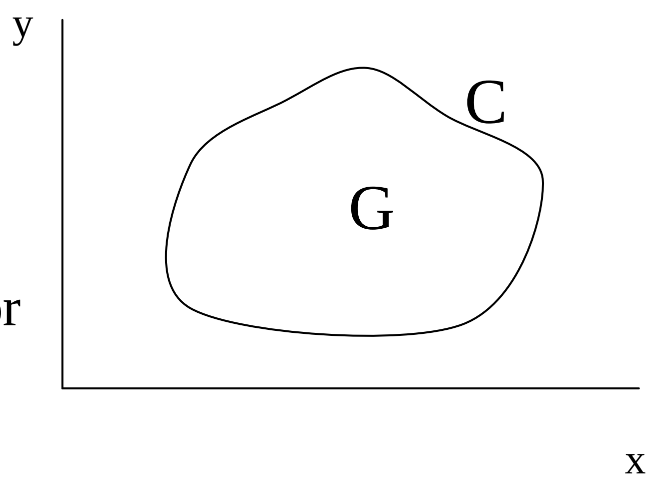


Historie

- Ingenieurwissenschaften, Strukturmechanik
- Mathematik/Physik: allg. Theorie, anwendbar auf beliebige partielle Differentialgleichungen „PDG“

Mathematisch/physikalischer Ansatz der Methode der Finiten Elemente

Ziel:



Gegeben:

Gebiet G

PDG A(f) = 0 in G

A: beliebiger Differentialoperator

f: auf G definierte Funktion

Randbedingung B(f)=0 auf C

Lösung f ?

→ Approximative Lösung f_h: $$f \approx f_h = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i = N \cdot a$$

N_i - Formfunktion (N_i(x,y,), z.B. einfache Polynome)

a_i - Koeffizienten

Vorgehen:

1. Theoretische Formulierung des Problems, Variationsansatz
2. Gebiet diskretisieren
3. Formfunktionsansatz, Auflösen nach Koeffizienten

1. Theoretische Fomulierung des Problems

- Methode der Gewichteten Residuen (später)
- Variationsansatz:

$$\boxed{\text{PDG } A(f) = 0 \rightarrow \text{Lösung } f_0}$$

$$\downarrow$$

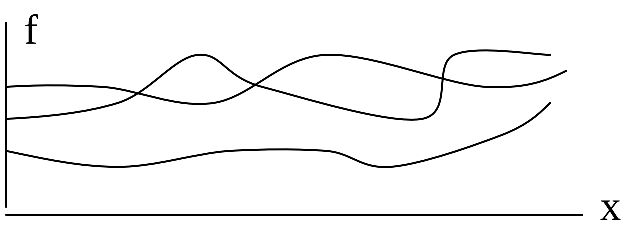
$$\boxed{\text{Variationsproblem eines Funktionals } I(f)}$$

Def. Funktional I(f): $f \longrightarrow I$ $\qquad$ $f \in M$ (Funktionenraum)

$I \in \Re$

Bsp $\quad I(f) = \int_a^b F(f)dx$

F: Differentialoperator



Variationsprinzip:

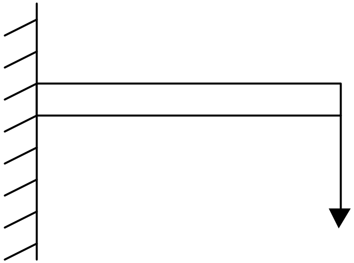
$$\boxed{\text{Finde } f_0 \text{ mit } I(f_0) \leq I(f) \quad \forall f \in M \;\Rightarrow\; f_0 \text{ ist Lsg der „Eulerglg“ } (A(f)=0)}$$

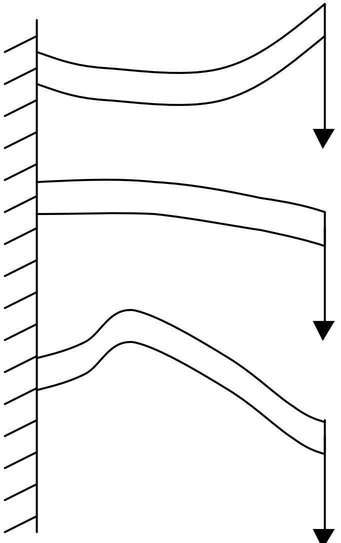
Eulerglg ist *die* zum Funktional zugehörige PDG,
Zu jedem Funktional lässt sich eine Eulerglg definieren

<u>Problem</u>: Zusammenhang $I(f) \leftrightarrow A(f) = 0$?

Häufig: $I(f)$ = gesamte potentielle Energie des Systems (=gespeicherte Energie minus in das System gesteckte Energie)

Beispiel:





Innere Energie im Gleichgewicht mit der in das System gesteckten Energie

Variationsprinzip:

$\boxed{\text{Finde } f_0 \text{ mit } I(f_0) \le I(f) \quad \forall\ f \in M \ \Rightarrow f_0 \text{ ist Lsg der „Eulerglg" } (A(f)=0)}$

Eulerglg ist *die* zum Funktional zugehörige PDG,
Zu jedem Funktional lässt sich eine Eulerglg definieren

<u>Problem</u>: Zusammenhang $I(f) \leftrightarrow A(f) = 0$?

Häufig: $I(f)$ = gesamte potentielle Energie des Systems (=gespeicherte Energie minus in das System gesteckte Energie)

Allg.: M = unendl. dim. Funktionenraum
exakte Lösung des Variationsproblems nicht möglich

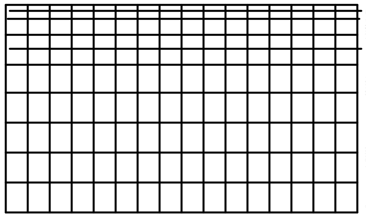
M_h = endl. dim. Funktionenraum, f_h beschreibbar durch endl viele Parameter. Minimierungsprobem nun:

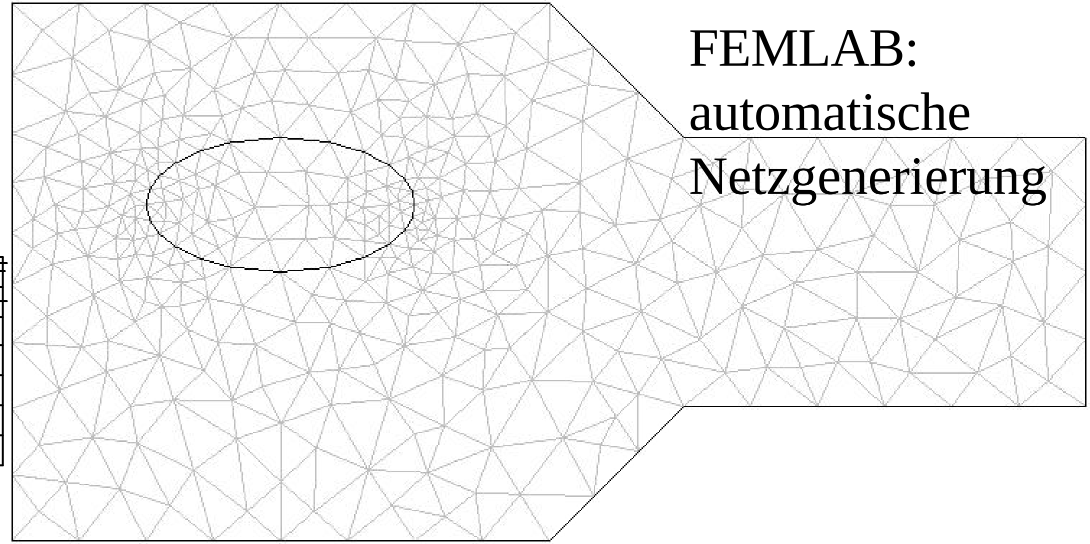
$\boxed{\text{Finde } f_{0h} \text{ mit } I(f_{0h}) \le I(f_h) \quad \forall\ f_h \in M_h}$ Beste Approximation

2. Schritt: Diskretisierung

FEMLAB:
automatische
Netzgenerierung

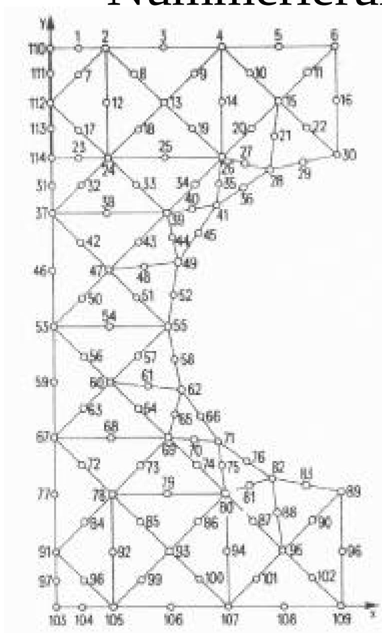
- Dreiecke
- Vierecke
- Tetraeder
- Quader



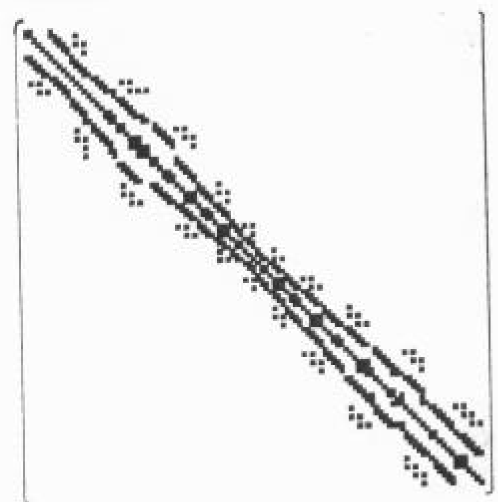


-Vermeidung von zu spitzen Winkeln, Gitteranisotropie

-Nummerierung der Knoten & Elemente → Bandbreite



Effektive Besetzung der Gesamtsteifigkeitsmatrix S, quadratische Elemente



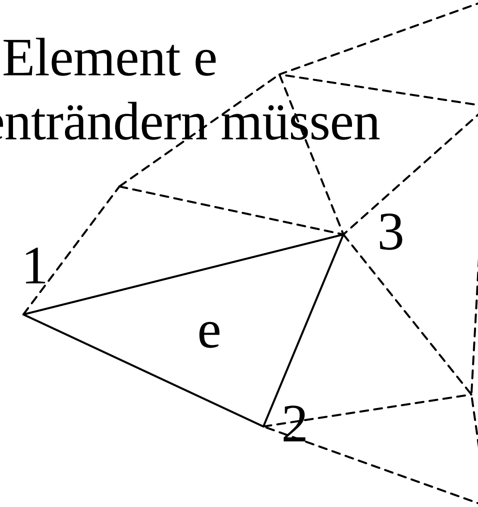
3. Schritt: Formfunktionsansatz

Ansatz f_h

Häufig Polynome $$f_h^e(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + \left(c_4 xy + c_5 x^2 + c_6 y^2\right)$$

$\rightarrow$Lokal gültige Koeffizienten für Element e

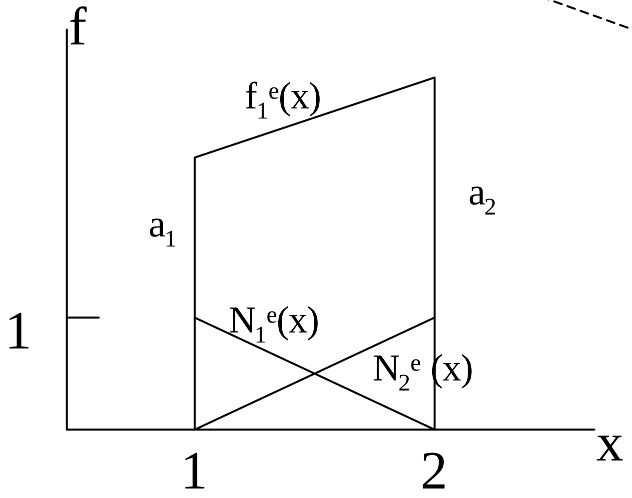
- stetigkeitsbedingungen an Elementrändern müssen erfüllt sein (konforme Elemente)



Häufig: $$f_h^e = \sum_{i=1}^{3} N_i^e(x,y)\, a_i^e$$

a_i – Knotenvariablen = $f_h(x_{Knoten}, y_{Knoten})$

N_i^e – Formfunktion, Basisfunktion



In 2D:

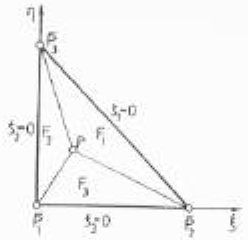


Fig. 2.19
Natürliche Koordinaten
im Einheitsdreieck

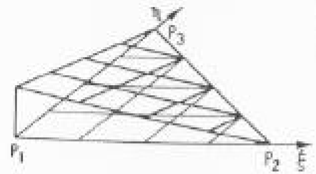
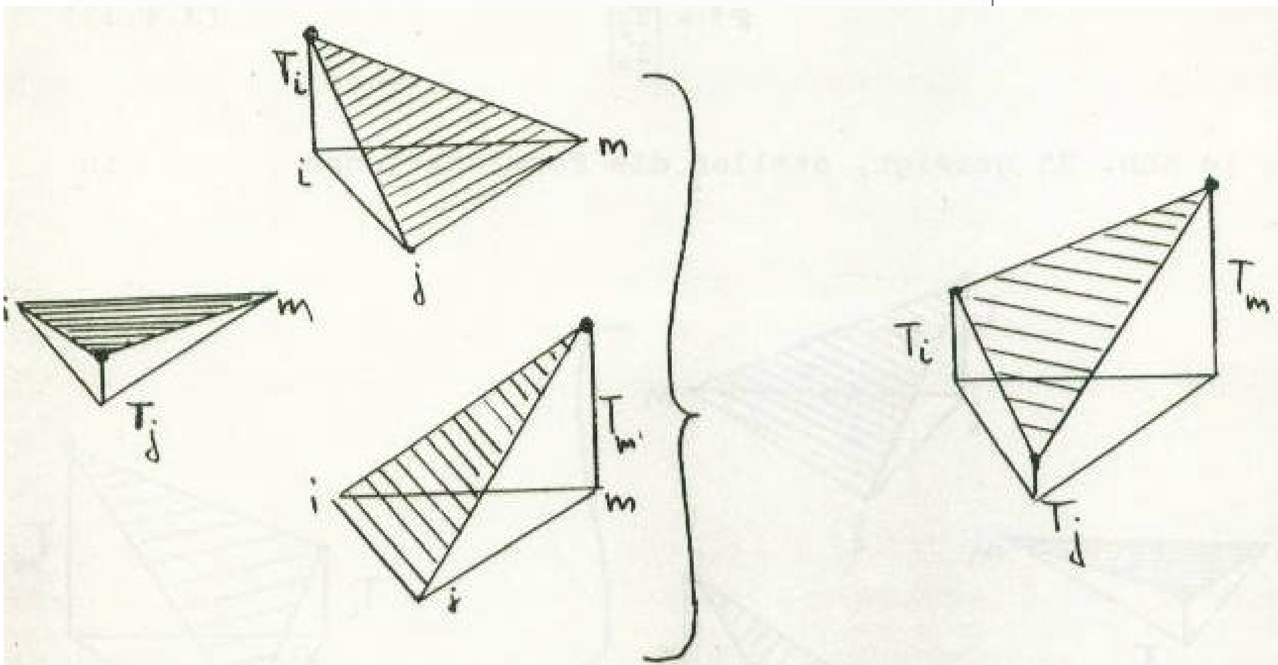


Fig. 2.20 Formfunktion N_1



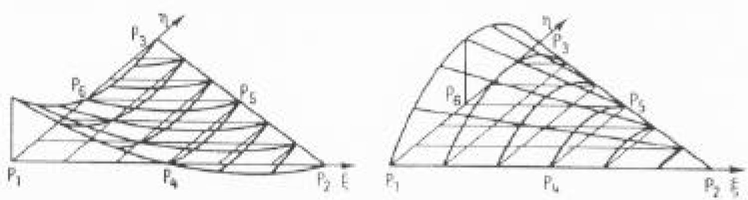


Fig. 2.21 Formfunktionen N_1 (ξ, η) und N_6 (ξ, η)

Quadratische Formfunktionen
6 Koeffizienten: 6 Knoten

Gesamtnäherung: $$f_h = \sum_k f_h^{e_k} = \sum_{k,i} N_i^{e_k}(x,y) a_i^{e_k}$$

k – Elementnummer
i - Knotennummer

$$mit \quad N_i^{e_j} = 0 \; in \quad e_j \neq e_k$$

Einsetzen in Minimierungsproblem

Allgemein: $$I = \int F(f_h) dG = \int F\left(\sum_{k,i} N_i^{e_k} a_i^{e_k}\right) dG$$

Minimiere I $\rightarrow$ Lineares Glg.system für $a_i^{e_k}$

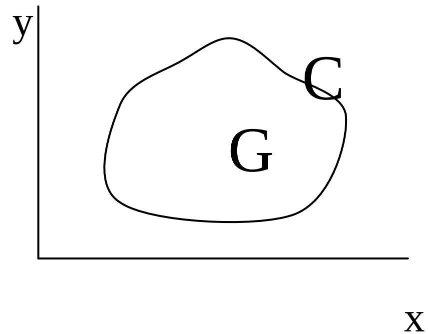
Aber... Wie formulieren wir das Minimierungsproblem?

Zurück zum Variationsansatz...

Variationsansatz

Ziel: Finde zu gegebener PDG A(f)=0 eine integrale Darstellung I(f) (Funktional), das ein Extremum annimmt, falls f die Lösung ist:

$$I(f) = \int_G F\left(x_i, f, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ldots\right) dG + \int_C E\left(x_i, f, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ldots\right) dC$$



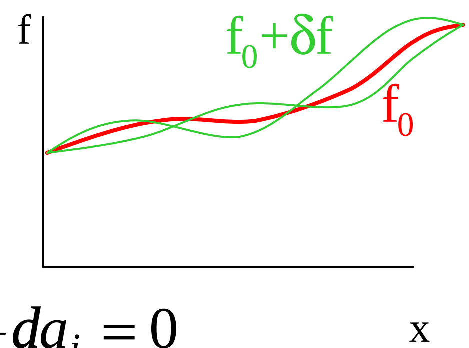
F, E : geeignete Differentialoperatoren

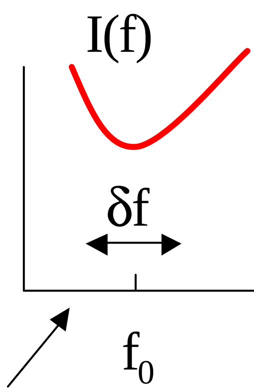
f_0 : $I(f_0)$ ist Extremum $\Leftrightarrow$ Variation von I durch Variation von f: $\delta I=0$

Ersetze f durch $f_h = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i$

Variiere I durch Variation der a_i:

$$dI = \frac{\partial I}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial I}{\partial a_2} da_2 + \ldots = \sum_i \frac{\partial I}{\partial a_i} da_i = 0$$





Achse repräsentiert alle Funktionen aus M

Variation der a_i beliebig, daher müssen Ableitungen selbst = 0 sein:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial I}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial I}{\partial a_n} \end{pmatrix} = 0$$

n Gleichungen
n Unbekannte

Ritz-Rayleigh Verfahren

Wichtiger Spezialfall: I „quadratisch": F mit f^p, $(\partial f/\partial x)^p$,... mit $p \leq 2$

→ $\frac{\partial}{\partial a_i} a_i^p = p a_i^{p-1}$ linear in a_i für $p \leq 2$

→ Lineares Gleichungssystem $\frac{\partial I}{\partial a_i} = \sum_j K_{ij} a_j + g_i = 0$

K_{ij} symmetrisch (wichtiger Vorteil im Vergleich zu anderen Verfahren)

Zusammenhang I(f) $\longleftrightarrow$ PDG A(f)=0 ?

Gegeben: $$I(f) = \int_G F\left(x_i, f, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ldots\right) dG + \int_C E\left(x_i, f, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ldots\right) dC$$

Bilde δI: $$dI = \int_G dF \; dG + \int_C dE \; dC = 0 \qquad \left(dF = \frac{\partial F}{\partial f} df + \frac{\partial F}{\partial f_x} df_x + \ldots \right)$$

$\downarrow$ Umformen, Kettenregel, partielle Integration, „δf ausklammern“

$$dI = \int_G A(f) df \; dG + \int_C B(f) df \; dC = 0$$

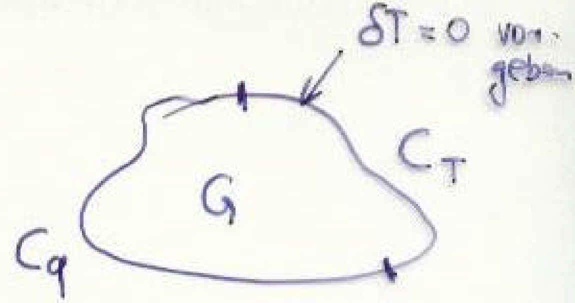
$\longrightarrow$ $$\boxed{\begin{array}{ll} A(f) = 0 & in\ G \\ B(f) = 0 & auf\ C \end{array}}$$ Eulergleichungen

Jedes Variationsprinzip $\Rightarrow$ Eulergleichung

Variationsprinzip $\not\Leftarrow$ jede PDG

Bsp Wärmeleitungsgly

Def. Variationsproblem:



$$I = \int_G \left(\frac{1}{2} k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 - HT \right) dG - \int_{C_q} q\,T\,dC$$

$k, H: \; k(x,y), \; H(x,y)$

Variation: $\left[\delta\left(\frac{1}{2} k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\right) = \frac{1}{2} k\, \delta \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 = k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \cdot \delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \right]$

$$\delta I = \int_G \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + k \frac{\partial T}{\partial y} \delta\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - H\delta T \right) dG - \int_{C_q} q\,\delta T\, dC$$

Wegen Linearität: $\delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta T)$ $\rightarrow$ $\int_G \left(k \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \delta T - H \delta T \right) dG$

δT „ausklammern“ durch Greens formel (partielle Integration)

Partielle Integration: $\int_a^b u'v'\,dx = u'v\Big|_a^b - \int_a^b u''v\,dx$

$$\boxed{\int_G \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}u)\cdot v\;dG + \int_G k\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v\;dG = \oint_C kv\frac{\partial u}{\partial n}\;dC} \qquad \text{(A1.11)}$$

Die Greensche Formel stellt also nichts anderes dar als eine partielle Integration im Dreidimensionalen. Sie läßt sich auch direkt durch subsequente partielle Integration in die drei verschiedenen Koordinatenrichtungen herleiten.

Partielle Integration (Greensche Formel in 2D):

$$\delta I = -\int \delta T\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + H\right)dG + \int_{C_q} \delta T\left(k\frac{\partial T}{\partial n} - q\right)dC = 0$$

$$\int \delta T\left(\vec{\nabla}\cdot k\vec{\nabla}T + H\right)dG$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} A(T) = \frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial T}{\partial y} + H = 0 & \text{in } G \\ B(T) = k\frac{\partial T}{\partial n} - q = 0 & \text{auf } C_q \end{array}}$$

Randbedingungen

Natürliche Randbedingung: f wird auf Rand C variiert, und stellt sich bei Variation gemäß B(f) = 0 ein. Von Neumann Randbedingung

Erzwungene Randbedigung. Vorgabe von f auf Rand C.
Funktionenraum M ist eingeschränkt: $M : \forall f \in M$ mit $f(C) = f_C$
$\rightarrow \delta f = 0$ auf C   Dirichlet

Variationsprinzip - PDG äquivalent?

$\downarrow$

Verallgemeinerte Lösung der PDG mit
weniger strengen Stetigkeitsbedingungen

Bsp: T einmal stückweise stetig diff.bar beim Variationsprinzip
T zweimal stetig diff.bar bei der PDG

Approximative Lösung

$$\left[I = \int_G \left(\frac{1}{2} k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 - H T \right) dG - \int_{C_q} q T \, dc \right]$$

Reihenansatz $T \cong T_h = \sum_{i=1}^{n} N_i \, a_i$

N_i : Basisfunktionen, Formfunktionen, $N_i(x,z)$

a_i : unbekannte Koeffizienten

Einsetzen in das Funktional:

$$I = \int_G \frac{1}{2} k \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot a_i \right)^2 dG + \int_G \frac{1}{2} k \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} a_i \right)^2 dG$$

$$- \int_G H \sum N_i a_i \, dG - \int_{C_q} q \sum N_i a_i \, dC$$

Variation $\delta I = \sum_j \frac{\partial I}{\partial a_j} \delta a_j = 0$

$\frac{\partial}{\partial a_j} \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} a_i = \frac{\partial N_j}{\partial x}$

da_i: $\frac{\partial a_i}{\partial a_j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = \int_G k \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} a_i \right) \frac{\partial N_j}{\partial x} \, dG + \int_G k \left(\sum \frac{\partial N_i}{\partial y} a_i \right) \frac{\partial N_j}{\partial y} \, dG$$

$$- \int_G H N_j \, dG - \int_{C_q} q N_j \, dC = 0$$

$\rightarrow$ Lin. Glgsyst: $\boxed{\mathbf{K a = f}, \text{ od. } \sum_i K_{ij} \cdot a_i = f_j}$ $j = 1, 2, \ldots$

mit $K_{ij} = K_{ji} = \int_G \left[k \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dG$ Steifigkeits- System- matrix

$f_j = \int_G H N_j \, dG + \int_{C_q} q N_j \, dC$ Lastvektor

Bisher: Funktional erraten. Nun eindeutige Zuordnung PDG - Funktional

Positiv definite Differentialoperatoren

PDG:
$$L f + g = 0$$
L: Diff. operator, linear

Symmetrie:
$$\int_G f_1 \cdot L f_2 \, dG = \int_G f_2 \cdot L f_1 \, dG$$

Positiv definit:
$$\int_G f \cdot L f \, dG \geq 0$$
(Gleichheit nur bei $f \equiv 0$)

Variationstheorem

L sei symm. u. pos. definit, PDG habe eine Lösung.
Hom. Rand bed. Dann gilt

$$I(f) = \int_G \left(\frac{1}{2} f \cdot L f + f \cdot g \right) dG$$ hat Minimum dann und nur dann, falls f eine Lösung der PDG ist

Variationstheorem

L sei symm. u. pos. definit, PDG habe eine Lösung.
Hom. Randbed. Dann gilt

$I(f) = \int_G \left(\frac{1}{2} f \cdot Lf + f \cdot g \right) dG$ hat Minimum dann und nur dann, falls f eine Lösung der PDG ist

Vereinf. bew: Bilde δI (Produktenregel):

$$\delta I = \int_G \left(\frac{1}{2} \delta f \cdot Lf + \frac{1}{2} f \cdot \delta(Lf) + \delta f \cdot g \right) dG$$

L ist linear: $\delta(Lf) = L\,\delta f$

Symmetrie: $\int_G f \cdot L\delta f \, dG = \int_G \delta f \cdot Lf \, dG$

$$\delta I = \int (\delta f \cdot Lf + \delta f \cdot g)\, dG = \int \delta f \, \underbrace{(Lf + g)}_{\text{Eulergl.}} \, dG = 0$$

Ritzverfahren für positiv definite symm. PDG'n

Endlicher Ansatz: $f \approx f_n = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i = N a$

Funktional:

$$I = \int_G \left(\frac{1}{2} \sum_i N_i a_i \cdot L \sum_i N_i a_i + \sum_i N_i a_i g \right) dG$$

Variation $\delta I = \sum_j \frac{\partial I}{\partial a_j} \delta a_j = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial I}{\partial a_j} = \int_G \left(\frac{1}{2} \sum_i N_i a_i \cdot L N_j + \frac{1}{2} N_j L \sum_i N_i a_i + N_j g \right) dG = 0$$

da: $\frac{\partial}{\partial a_j} \sum_i N_i a_i = N_j$

$$\rightarrow \sum_i a_i \underbrace{\int_G \left(\frac{1}{2} N_i \cdot L N_j + \frac{1}{2} N_j L N_i \right) dG}_{\int_G N_i L N_j \, dG \text{ wg. Symmetrie}} + \int_G N_j g \, dG = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_i a_i \int_G N_i L N_j \, dG = -\int_G N_j g \, dG \quad \text{od} \sum_i K_{ij} a_i = f_j}$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_i a_i \int_G N_i \, L N_j \, dG = -\int_G N_j \, q \, dG \quad \text{od} \sum_i K_{ij} a_i = P_j}$$

Lin. Glg. system mit

$K_{ij} = \int_G N_i \, L N_j \, dG$ System-Matrix
Steifigkeits- "

$P_j = \int_G N_j \, q \, dG$ Lastvektor

Methode der gewichteten Residuen

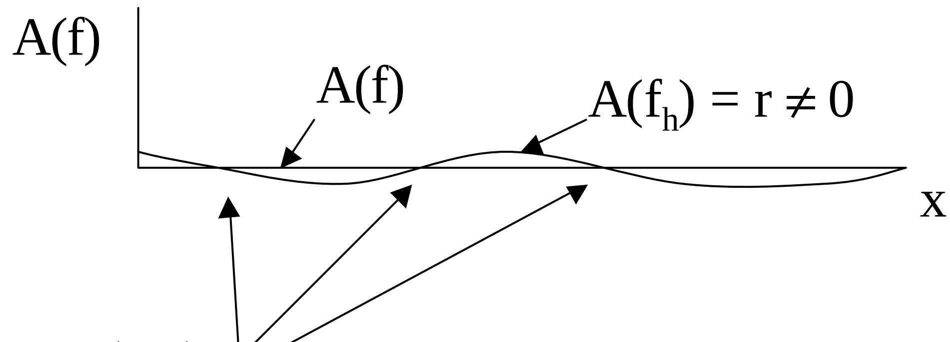
Anwendbar, auch wenn kein Variationsprinzip existiert!

Prinzip: PDG: $A(f) = 0$

Ziel: Approximation $f_h \approx f$

Nun ist $A(f_h) = r \neq 0$, r = Residuum, $r=r(x,y)$

Ziel: r möglichst klein machen



$$f_h = \sum_i N_i a_i$$

a_i ?

Konstruiere n Bedingungen, z.B. $r(x_j) = 0, \quad j = 1,\ldots,n$

oder $$\int_{G_j} r(x)\,dG = 0$$

Allg.: $$\int_G w_j \, r(x)\,dG = 0$$ w_j = Wichtung

Methode der gewichteten Residuen

Zu lösen: $A(f) = 0$ in G

$B(f) = 0$ auf C

Ansatz $f \approx f_n = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i \quad \rightarrow$ Residuum $r(x,y) = A(f_n)$

$r_c = B(f_n)$

Bilde

$$\int_G w_j \cdot r \, dG + \int_C w_{c_j} \cdot r_c \, dC \qquad w_j \text{ - Wichtung}$$

$$= \int_G w_j \, A\left(\sum_{i=1}^{n} N_i a_i\right) dG + \int_C w_{c_j} \, B\left(\sum_i N_i a_i\right) dC = 0$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Nach partieller Integration (Greensche Formel)

$$\int_G C(w_j) \, D\left(\sum N_i a_i\right) dG + \int_C E(w_{c_j}) \, F\left(\sum_i N_i a_i\right) dC = 0$$

$j = 1, 2, \ldots, n$

$$= \int_G w_j \, A\left(\sum_{i=1}^{n} N_i a_i\right) dG + \int_C w_{cj} \, B\left(\sum_i N_i a_i\right) dC = 0$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Nach partieller Integration (Greensche Formel)

$$\int_G C(w_j) \, D\left(\sum N_i a_i\right) dG + \int_C E(w_{cj}) \, F\left(\sum_i N_i a_i\right) dC = 0$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

n Glgn mit n Unbekannten

Falls $A(\varphi)$ linear, stelle PDG dar: $L(\varphi) + g = 0$

$L_B(\varphi) + g_B = 0$

Summe, a_i aus dem Integral ziehen

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\left(\int_G w_j L(N_i) \, dG + \int_C w_{cj} L_B(N_i) \, dC\right)}_{\text{Systemmatrix}} = \underbrace{-\int_G w_j \, g \, dG - \int_C w_{cj} \, g_B \, dC}_{\text{Lastvektor}}}$$

a) Punkt Kollokation

Vorgabe von n Punkten (x_j, y_j) mit

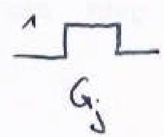
$$r_j = A\left(\sum_i N_i(x_j, y_j)\, a_i\right) = 0$$

$$\rightarrow w_j = \delta(x_j, y_j) \quad \text{dh} \quad \begin{cases} w_j = 0 & x \neq x_j,\ y \neq y_j \\ \int_G w_j \, dG = 1 & x = x_j,\ y = y_j \end{cases}$$

b) Kollokation in Teilbereichen

Unterteilung von G in G_j

$$w_j = E \quad \text{dh} \quad w_j = \begin{cases} 1 & \text{in } G_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\int_{G_j} r \, dG + \int_{C_j} r_c \, dC = 0$$

→ c) Galerkin Methode ←

$w_j = N_j$ falls L symm, dann Galerkin = Variations ansatz.

wichtiges Bsp: advektive Wärmetransportglg.

...Anwendungen mit FEMLAB...